2. To nejnutnější z lineární algebry (se sem stejně nevejde)

Soustavy lineárních rovnic, matice soustavy a rozšířená matice, homogenní a nehomogenní soustavy, kdy to má vlastně řešení?

1. Nechť $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ je soustava n rovnic o n neznámých, jejíž matice $\mathbf{A^T}$ je regulární. Taková soustava se nazývá *kramerovská* a má právě jedno řešení tvaru

$$(\chi) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\det \mathbf{B}_1, \ldots, \det \mathbf{B}_n),$$

kde matice $\mathbf{B}_i{}^{\mathbf{T}}$ vznikne nahrazením sloupce (α_i) v matici $\mathbf{A^T}$ sloupcem pravých stran soustavy (β). Určete řešení následujících kramerovských soustav:

(i)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x^1 & + & 2x^2 & + & x^3 & = & 5 \\ & & 4x^2 & + & 5x^3 & = & 2 \\ x^1 & + & 3x^2 & & & = & 0 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^1 & + & 3x^2 & - & x^3 & = & 4 \\ 2x^1 & + & x^2 & & & = & 4 \\ x^1 & - & x^2 & + & 2x^3 & = & 5 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^1 & + & 3x^2 & & & = & 4 \\ 2x^1 & & & + & x^3 & = & 0 \\ -x^1 & + & 2x^2 & + & x^3 & = & \alpha \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x^1 & + & x^2 & - & x^3 & = & \beta^1 \\ & - & x^2 & + & x^3 & = & \beta^2 \\ 2x^1 & + & 3x^2 & - & 2x^3 & = & \beta^3 \end{array}$$

$(\beta) = (0, 0, 0)$;
$(3, 5, -1)$; $(2, -10, 24)$

2. Určete všechna řešení následujících soustav rovnic. Použijte úpravy matice $\mathbf{B^T}$ na schodovitý tvar.

(i)

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & -1 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x^1 & + & x^2 & + & 2x^3 & = & -1 \\ 2x^1 & - & x^2 & + & 2x^3 & = & -4 \\ 4x^1 & + & x^2 & + & 4x^3 & = & -2 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x^1 & + & x^2 & - & 4x^3 & = & 0 \\ 3x^1 & + & 5x^2 & - & 7x^3 & = & 0 \\ 4x^1 & - & 5x^2 & - & 6x^3 & = & 0 \\ 7x^1 & & & - & 13x^3 & = & 0 \end{array}$$

3a) Udejte příklad homogenního systému s právě jedním řešením. Může mít homogenní systém právě dvě řešení?

3b) Ukažte, že dvě roviny v $\mathbf{R}^3$ procházenící počátkem mají alespoň jeden další společný bod (mají nekonečně mnoho společných bodů).

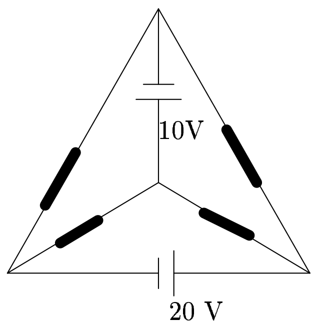
3c) Mohou dvě rovnice o třech neznámých mít jednoznačné řešení?

4. Rozhodněte o vzájemné poloze dvojice přímek:

a $p : x + y + z - 1 = 0, 2x + 3y + 6z - 6 = 0$
$q : y + 4z = 0, 3x + 4y + 7z = 0$

b $p : x = -1 + 3t, y = -3 - 2t, z = 2 - t$
$q : x = 2 + 2t, y = -1 + 3t, z = 1 - 5t$

5. Řešte následující síť, všechny odpory jsou 10 Ω. Použijte Kirhoffovy zákony.



Domácí úkol

1. Určete všechna řešení následujících soustav rovnic. Použijte úpravy matice $\mathbf{B^T}$ na schodovitý tvar.

(i)

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 2 \\ -4x & - & 2y & = & -4 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x^1 & + & 2x^2 & + & 3x^3 & = & 4 \\ 2x^1 & + & x^2 & - & x^3 & = & 3 \\ 3x^1 & + & 3x^2 & + & 2x^3 & = & 10 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x^1 & + & x^2 & + & x^3 & + & x^4 & = & 0 \\ x^1 & + & 2x^2 & + & 3x^3 & + & 4x^4 & = & 0 \\ x^1 & + & 3x^2 & + & 6x^3 & + & 10x^4 & = & 0 \\ x^1 & + & 4x^2 & + & 10x^3 & + & 20x^4 & = & 0 \end{array}$$