3. Matice, vektory, skalární a vektorový součin

Co jsou to matice a co s nimi lze provádět? Hodnost, determinant, matice inverzní (a kdy existuje). Co jsou to vektory, skalární a vektorový součin, kdy jsou vektory lineárně závislé a kdy nezávislé, báze.

1a. Jsou zadány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & a \\ 0 & 2a & 3 & 0 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, které dvojice z těchto matic lze spolu násobit a v jakém pořadí a násobení proveďte.

1b) Dokažte $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, kde symbol $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ značí matici transponovanou k $\mathbf{A}$.

2. U následujících matic zjistěte, zda jsou regulární (u číselných matic) resp. za jakých podmínek jsou regulární (u matic s parametry) a v kladném případě stanovte matice inverzní. Užijte obou způsobů výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$ a výsledky porovnejte.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3a. Určete, zda dané vektory $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$ jsou lineárně závislé či nezávislé

i) $\mathbf{u} = [1, 2, -2]$, $\mathbf{v} = [-2, -3, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, 2, 2]$

ii) $\mathbf{u} = [1, 3, -2]$, $\mathbf{v} = [1, 1, 2]$, $\mathbf{w} = [-1, 2, -8]$

3b. Určete hodnotu parametru a, pro kterou jsou dané vektory lineárně závislé či nezávislé

i) $\mathbf{u} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{v} = [1, a, 1]$, $\mathbf{w} = [2, 2, a]$

i) $\mathbf{u} = [0, 2, a]$, $\mathbf{v} = [-1, 3, 2]$, $\mathbf{w} = [2, -4, a]$

4a. Určete, zda dané vektory jsou ortogonální či ortonormální $\mathbf{u} = [1, -2, 2, 1]$, $\mathbf{v} = [1, 3, 2, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, 0, 1, -1]$

4b. Určete parametry a , b tak, aby dané vektory byly ortogonální

i) $\mathbf{u} = [1, 1, 2, 0, 0]$, $\mathbf{v} = [1, -1, 0, 1, a]$, $\mathbf{w} = [1, b, 2, 3, -2]$

ii) $\mathbf{u} = [2, -1, 0, a, b]$, $\mathbf{v} = [a, b, 0, -2, 1]$, $\mathbf{w} = [a, 2b, 5, b, -a]$

4c. Určete vektor $\mathbf{x} = [x, y, z, t]$, který je ortogonální k dané trojici vektoru $\mathbf{u} = [1, 1, 1, 1]$, $\mathbf{v} = [1, -1, -1, 1]$, $\mathbf{w} = [2, 1, 1, 3]$

5. Dokažte, že pro smíšený součin $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \equiv \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ platí

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}] = [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$$

Domácí úkol

2a. Dokažte následující vztahy, které platí pro vektory v $\mathbf{R}^3$

i) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$

ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

iii) $(k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$, $k \in \mathbf{R}$

iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

2b. Dokažte, že pro libovolné dva vektory $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ platí, že jejich skalární součin s vektorem $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je roven nule, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.