4. Báze, dimenze a podprostory, ještě nějaké násobení a determinanty

Co je to báze vektorového prostoru, matice přechodu mezi dvěma bázemi. Podprostory, jejich dimenze a jak to souvisí s hodností matic.

1. V bázi $B = < \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_5} >$ jsou dány vektory
$\vec{a_1} = (1\ \ 0\ \ -2\ \ 3\ \ -1)$,$\vec{a_2} = (0\ \ 4\ \ -2\ \ 2\ \ 0)$,
$\vec{a_3} = (-1\ \ 1\ \ 0\ \ -4\ \ 2)$, $\vec{a_4} = (-2\ \ 11\ \ -6\ \ -5\ \ 5)$. Určete, jsou-li lineárně závislé či nezávislé a stanovte dimenzi vektorového podprostoru v $\mathbf{R}^5$, který generují.

2. Přechod mezi bázemi B a B' v $\{R^4$ je dán vztahy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \vec{e_1} & = & -\vec{e_1}' & + & \vec{e_2}' & + & \vec{e_3}' & & \\ \vec{e_2} & = & \vec{e_1}' & & & + & 2\vec{e_3}' & & \\ \vec{e_3} & = & \vec{e_1}' & + & \vec{e_2}' & + & \vec{e_3}' & + & \vec{e_4}' \\ \vec{e_4} & = & 3\vec{e_1}' & & & & & + & \vec{e_4}' \end{array} \quad \text{(Báze } B \text{ je ortonormální.)}$$

- Určete matice přechodu T a S. Vyjádřete vektory báze B' jako lineární kombinace vektorů báze B.
- Vektor $\vec{a} = (1\ \ 0\ \ -2\ \ 1)$ v bázi B. Určete jeho složky v B'.
- Rozhodněte, zda báze B' je ortonormální, či nikoliv.

3a. Dokažte, že hodnota skalárního součinu je nezávislá na volbě báze.

3b. Určete možné hodnoty determinantu matice přechodu při přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi.

4. Dokažte následujcící vztahy pro dané matice

i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix} \tag{1}$$

ii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

5. Vypočtěte determinant následujícćh matic

i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ii)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

iii)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{pmatrix} \tag{5}$$

iv)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Domácí úkol

3a) V $\mathbf{R}^2$ určete matici přechodu od pevně zvolené ortonormální báze $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ k bázi pootočené o úhel φ. Ukažte, že vynásobením matic příslušných pootočení o úhly φ a φ' získáme matici přechodu od původní báze k bázi pootočené o součet těchto úhlů. Závisí na pořadí násobení?

3b) Nepovinné!

V $\mathbf{R}^3$ určete matici přechodu od pevně zvolené ortonormální báze $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ k bázi získané pootočením o úhel φ kolem osy z a následným pootočením o úhel ϑ kolem osy x. Návod: Určete postupně matice přechodu jednotlivých pootočení a ty potom vynásobte. Bude výsledek záviset na pořadí otečení?