

5. Funkce

Vlastnosti funkcí, sudá, lichá, ohraničená, rostoucí, klesající a jiné funkce. Racionální lomenné funkce, rozklad na parciální zlomky, limita a spojitost.

1a) Určete definiční obor funkcí $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$, $y = \ln \sin(x-3) + \sqrt{16+x^2}$, $y = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$, $y = \frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3-x)$.

1b) Rozhodněte o sudosti resp. lichosti funkcí $y = x^3$, $y = x^2 + 1$, $\ln|x + \sqrt{1+x^2}|$.

1c) Určete periodu funkcí $y = \sin 3x$, $y = \sin^2 x$, $y = 2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin^2 x$, $y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

2a) Následující polynomy rozložte v \mathbf{R} a určete znaménka: $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, $x^6 - 1$, $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + x)$.

2b) Najděte inverzní funkce k funkcím $y = \frac{2x-1}{3x+5}$, $y = 10^{x-3}$.

2c) Nepovinné pro předmět Matematika 1!

Ukažte, že množina všech funkcí $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ s operacemi sčítání a násobení funkcí je okruhem s jedničkou (rozhodněte, zda je tento okruh oborem integrity resp. tělesem). Ukažte, že množina všech konstantních funkcí je podokruhem (rozhodněte, zda je tento podokruh ideálem). Nalezněte nějaký ideál v okruhu reálných funkcí.

2d) Ukažte, že množina všech funkcí $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ s operacemi sčítání a násobení funkce reálným číslem má strukturu vektorového prostoru nad \mathbf{R} . Ukažte, že množina všech konstantních funkcí je jeho podprostorem. Nalezněte nějaké další podprostory.

3. Pokud je třeba, podělením polynomů převedte neryze lomenné funkce na součet polynomu a ryze lomenné funkce, kterou následně rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^4(x^2 + 1)}, \quad \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 22x - 71}{x^2 + 2x - 15}.$$

4. Vypočtěte následující limity funkcí:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) \cdot \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cotg x - \frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{(2x^3 - 2x)^{\frac{1}{3}}}$

5. Vypočtěte následující limity posloupností:

- $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$
- $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$
- $\left((-1)^n\right)$
- $\left(\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{2n^2}\right)$
- $\left(\frac{n}{\ln n}\right)$
- $\left(\frac{\sin n + n}{\sin n - n}\right)$

Domácí úkol

a) Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}, \quad \frac{2x^4 - 2x^3 + x^2 + 1}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2}, \quad \frac{1}{(x^4-1)^2}$$

b)

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

c) Z definice vypočtěte derivace funkcí $f(x) = \operatorname{kons.}$ a $f(x) = x^n$.