Písemka první - matematika I.
(Čtvrtý příklad za dva body, ostatní po jednom bodu.)

1. Pepíček chce rodičům připravit ďábelský drink, aby brzo usnuli. K dispozici má víno (12 procent objemu alkoholu), domácí slivovici (60 procent objemu alkoholu) a rum (48 procent objemu alkoholu). Dle receptu má výsledný drink mít 36 procent objemu alkoholu, použít Pepíček musí dvojnásobný objem vína než slivovice. Výsledného drinku je zapotřebí jeden litr. Jakým způsobem to má Pepíček namíchat? Kolik existuje řešení?

2. Skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je roven velikosti jejich vektorového součinu.
a) Určete všechny úhly, které mohou vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírat.
b) Víte-li, že vektorový součin má směr osy z a vektor $\vec{a}$ má směr kladné osy x a navíc velikosti vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou rovny jedné, zakreslete do obrázku všechny možnosti, které připadají v úvahu. Určete velikost $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

3. Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \\ 2a & -a \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte v jakém pořadí lze tyto matice násobit, násobení proveďte a vypočtěte determinant jejich součinu.

4. Je dána soustava rovnic o neznámých (x, y, z):

$$\begin{aligned} -x - y + a^2 z &= a + 1 \\ x + y - az &= -1 \\ ax + 2y - 3z &= 1 - a \end{aligned}$$

Určete matici soustavy a převeďte ji na schodovitý tvar. Určete, pro která a má soustava nekonečně mnoho řešení a řešení zapište, určete, pro která a nemá řešení žádné a pro která a má právě jedno řešení (řešení určete). CELKEM 3 body.

5. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek v $\mathbf{R^3}$
$p : x + y - 4 = 0, x - z - 2 = 0$
$q : y - z = 0, x + z + 1 = 0$

6. Zapište matici přechodu mezi bázemi $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ a $B' = (\vec{e}_1', \vec{e_2}', \vec{e}_3')$ v $\mathbf{R}^3$ jestliže $\vec{e_1} = \vec{e}_1'$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_3'$ a $\vec{e}_3 = -\vec{e}_2'$. Určete matici inverzní. Vektor $\vec{a}$ má v B složky $(1, 1, 2)$, určete jeho složky v B'.

7. Doplňte následující systém vektorů na ortogonální bázi $\mathbf{R}^3$ a vektory normujte.

$$\vec{a} = (2, 0, -1), \quad \vec{b} = (1, 0, 2)$$

8. Uveďte příklad soustavy tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých, jejíž řešení má

- tři volné neznámé,
- dvě volné neznámé,
- jednu volnou neznámou,
- žádnou volnou neznámou,
- neexistuje.

V každém z uvedených příkladù určete hodnost matice a hodnost rozšířené matice soustavy.

9. Vypočtěte $\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^{10}$. Nalezněte všechna řešení rovnice $x^8 - 1 = 0$.