

#### PÍSEMKA IV.

**1a.** Řešte následující soustavu rovnic o neznámých  $(x, y, z)$  a rozhodněte, pro které hodnoty parametrů  $t$  a  $s$  má soustava

- právě jedno řešení (toto řešení zapište)
- nekonečně mnoho řešení (zapište tato řešení pomocí volných neznámých)
- žádné řešení

$$\begin{array}{rccccrcr} -2x & + & y & + & & tz & = & 1 \\ & x & - & y & + & & z & = & 0 \\ & & & ty & + & & z & = & s \\ x & & & & - & (1+t)z & = & -1 \end{array}$$

**1b.** Uvedte příklad homogenní soustavy tří rovnic o třech neznámých, jejíž řešení má

- dvě volné neznámé,
- jednu volnou neznámou,
- žádnou volnou neznámou,
- neexistuje.

V každém z uvedených příkladů určete hodnotu matice a hodnotu rozšířené matice soustavy.

**BODOVÁNÍ:** **1a.:** úprava matice na schodovitý tvar ... 0,4 bodu, diskuse počtu řešení a zdůvodnění ... 0,4 bodu, zapsání řešení v jednotlivých případech 0,4 bodu, **1b.:** každá z podotázek ... 0,2 bodu. **CĚLKEM:** ... 2 body

---

**2.** Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

**BODOVÁNÍ:** Definiční obor, sudost, lichost, průsečíky s osami ... 0,3 bodu, první derivace, obor její existence, stacionární body, lokální

extrémy, rostoucí/klesající ... 0,5 bodu, druhá derivace, obor její existence, inflexní body, konvexní/konkávní ... 0,5 bodu, asymptoty se směrnicí, asymptoty bez směrnice a výpočet ostatních potřebných limit ... 0,4 bodu, zakreslení grafu funkce ... 0,3 bodu. CELKEM ... 2 body.

---

**3a.** Definujte *limitu* funkce v daném bodě, definujte pojem: funkce je *klesající na množině*  $M$  a funkce je *klesající v bodě*  $a$ , definujte *derivaci* funkce v daném bodě.

**3b.** Uveďte příklad funkce, která

- má v nějakém bodě  $a$  nevlastní derivaci  $\pm\infty$ ,
- je klesající v každém bodě svého  $D_f$ , ale není klesající na  $D_f$ ,
- má asymptoty  $x = 0$  a  $y = 0$ ,
- je v nějakém bodě  $a$  nespojitá, ale je v tomto bodě definovaná.

Funkci vždy zadejte předpisem a načrtněte obrázek.

BODOVÁNÍ: **3a.** ... 1 bod, **3b.** Každá z podotázek ... 0,25 bodu. CELKEM ... 2 body.

---

**4a.** Vypočtete plochu ohraničenou grafy funkcí  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  a  $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ . Vypočtete obvod tohoto obrazce. Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací grafu  $f(x)$  kolem osy  $x$ .

**4b.** Určete primitivní funkci k  $y = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$ .

BODOVÁNÍ: **4a.:** každá z podotázek ... 0,6 bodu, **4b.:** 0,8 bodu. CELKEM ... 2 body.

---

**5.** Byl vybrán soubor třiceti studentů, kteří se dostavili na zkoušku z matematiky. Studenti mohli získat u písemky  $i$  bodů, kde  $i = 0, \dots, 5$ . Výsledky byly následující: Dva studenti nezískali žádný bod, jeden bod získali tři studenti, dva body získalo patnáct studentů, tři body získalo šest studentů, čtyři body získali tři studenti a pět bodů získal jeden student. Náhodnou veličinu  $X$  s diskrétním rozdělením definujeme jako počet bodů získaných jedním, náhodně vybraným studentem.

- Určete rozdělení veličiny  $X$ ,  $\{(x_i, p_i)\}$ , kde  $p(i)$  je pravděpodobnost  $i$ , kdy  $x_i = i$ .
- Pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude mít alespoň  $I$  bodů,  $I = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .
- Střední hodnotu veličiny  $X$ .
- Střední kvadratickou odchylku veličiny  $X$ .
- Pravděpodobnost, že náhodně vybraný student získal počet bodů v intervalu  $i \in [2, 4]$ .

BODOVÁNÍ: Každá z podotázek ... 0,4 bodu. CELKEM ... 2 body.

---