

Matematika 2 - písemka první

1. Rozhodněte, zda následující množiny s operacemi sčítání a násobení skalárem tvoří vektorový prostor nad \mathbf{R} . Zdůvodněte. V kladném případě určete jeho dimenzi, nalezněte nějakou bázi.

a) Množina komplexních čísel s operací sčítání danou sčítáním komplexních čísel a operací násobení skalárem danou násobením komplexního čísla číslem reálným.

b) Množina $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ s operací sčítání $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ a násobení $t \odot (x, y) = (t^2x, t^2y)$.

2. Uvažujme vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše n nad \mathbf{R} , se sčítáním a násobením skalárem definovaným standardně. Nalezněte v tomto prostoru dva různé, netriviální podprostory, určete jejich dimenzi a nějakou bázi. Nalezněte bázi jejich součtu a jejich průniku. Ke každému z nich nalezněte tři různé doplňky.

3. Jsou zadány podprostory $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ v \mathbf{R}^3 . Určete jejich bázi a dimenzi. Určete bázi a dimenzi jejich součtu a jejich průniku. Určete bázi (nějakého) doplňku k prostoru \mathbf{V}_1 .

$$\mathbf{V}_1 = [(1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 0)]$$

$$\mathbf{V}_2 = [(2, -1, 1), (0, 0, 1)]$$

4. Lineární zobrazení $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ zobrazuje vektor $\vec{u} = (1, 1, 0)$ na vektor $f(\vec{u}) = (-1, 1)$, vektor $\vec{v} = (1, 0, 1)$ na vektor $f(\vec{v}) = (0, 2)$ a vektor $\vec{w} = (0, 1, 1)$ na $f(\vec{w}) = (-3, 1)$. Složky vektorů jsou zadány ve standardních bázích. Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bázích, jádro a image zobrazení. Určete matici tohoto zobrazení v bázích $B_{\mathbf{R}^3} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $B_{\mathbf{R}^2} = (f(\vec{v}), f(\vec{u}))$ (pozor na pořadí). Použijte transformačního vztahu pro matici lineárního zobrazení.

5.

- Napište definici *lineárního obalu systému vektorů* a uveďte příklad, kdy čtyři různé vektory generují dvourozměrný podprostor v \mathbf{R}^3 .
- Napište definici *lineární závislosti systému vektorů* a uveďte příklad systému vektorů v prostoru polynomů stupně nejvýše tři, který je závislý, a systému, který je nezávislý.

BONUS:

- Nalezněte bázi v prostoru \mathbf{C}^2 nad \mathbf{C} obsahující vektor $(1+i, 1)$.
- Nalezněte bázi v prostoru \mathbf{C}^2 nad \mathbf{R} obsahující vektor $(1+i, 1)$.