Matematika 2 - písemka první

1. Relace.
Nechť A je tříprvková množina (např. $A = \{a, b, c\}$).

i) Kolik existuje relací na $A \times A$? (Nesnažte se všechny vypsat, je jich hodně.)

ii) Kolik existuje zobrazení $A \to A$? (tj. $D_f = A$, $H_f \subseteq A$.)

iii) Kolik existuje bijekcí $A \to A$? (tj. vzájemně jednoznačných zobrazení.)

iv) Kolik existuje relací ekvivalence na A? (Můžete si všechny vypsat.)

v) Kolik existuje relací uspořádání na A?

2. Vektorové prostory.
Rozhodněte, zda následující množiny s operacemi sčítání a násobení skalárem tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$. Zdůvodněte (tj, pokud ano — dokažte, pokud ne — uveďte příklad, kdy není splněn některý z axiomů). V kladném případě určete jeho dimenzi, nalezněte nějakou bázi.

a) Množina komplexních čísel s operací sčítání danou sčítáním komplexních čísel a operací násobení skalárem danou násobením komplexního čísla číslem reálným.

b) Množina $\mathbf{V} = \mathbf{R^2}$ s operací sčítání $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ a násobení $t \odot (x, y) = (t^2 x, t^2 y)$.

3. Podprostory.
Uvažujme vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše n nad $\mathbf{R}$, se sčítáním a násobením skalárem definovaným standardně. Zadejte v tomto prostoru dva různé, netriviální podprostory, určete jejich dimenzi a nalezněte nějakou bázi. Nalezněte bázi jejich součtu a jejich průniku. Je jejich součet přímý? Ke každému z nich nalezněte tři různé doplňky. Zdůvodněte

4. Součet a průnik.
Jsou zadány podprostory $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ v $\mathbf{R}^3$. Nalezněte jejich bázi a dimenzi. Nalezněte bázi a dimenzi jejich součtu a jejich průniku. Nalezněte bázi (nějakého) doplňku k prostoru $\mathbf{V}_1$.

$$\mathbf{V}_1 = [(1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 0)]$$

$\mathbf{V}_2 = [(2,-1,1),(0,0,1)]$

5. Lineární zobrazení.
Lineární zobrazení $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ zobrazuje vektor $\vec{u} = (1,1,0)$ na vektor $f(\vec{u}) = (-1,1)$, vektor $\vec{v} = (1,0,1)$ na vektor $f(\vec{v}) = (0,2)$ a vektor $\vec{w} = (0,1,1)$ na $f(\vec{w}) = (-3,1)$. Složky vektorů jsou zadány ve standardních bázích.

a) Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bázích.

b) Určete jádro a image zobrazení.

c) Určete matici tohoto zobrazení v bázích $B'_{\mathbf{R}^3} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, $B'_{\mathbf{R}^2} = (f(\vec{v}), f(\vec{u}))$ (pozor na pořadí).

d) Správnost ověřte použitím transformačního vztahu pro matici lineárního zobrazení.

6. Definice.

- Napište definici *lineárního obalu systému vektorů* a uveďte příklad, kdy čtyři různé vektory generují dvourozměrný podprostor v $\mathbf{R}^3$. Zdůvodněte.
- Napište definici *lineární závislosti systému vektorů* a uveďte příklad systému vektorů v prostoru čtvercových matic řádu dva, který je závislý, a systému, který je nezávislý. Zdůvodněte.

7.

- Nalezněte bázi v prostoru $\mathbf{C^2}$ nad $\mathbf{C}$ obsahující vektor $(1+\mathrm{i},1)$.
- Nalezněte bázi v prostoru $\mathbf{C^2}$ nad $\mathbf{R}$ obsahující vektor $(1+\mathrm{i},1)$.

Zdůvodněte.

8. Uveďte příklady a) až e) lineárního zobrazení $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ (prostory nad polem $\mathbf{C}$), pro které (postupně):

a) $\ker f = [(\mathrm{i},0,1)]$, $\mathrm{Im} = [(\mathrm{i},0,1),(1,0,0)]$,

b) vektor $\vec{u} = (0,\mathrm{i},1)$ je vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě $\lambda = -1$,

c) f není diagonalizovatelné,

d) f má tři různé vlastní hodnoty a je izomorfismem,

e) f je projekcí (tj. $f \circ f = f$), ale není ani nulovým zobrazením, ani identitou.

Zadejte jednotlivá zobrazení přepisem $f(x, y, z) = ...$ i maticí ve standardní bázi.

9. Určte vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Nalezněte nějakou bázi, v níž je f reprezentováno diagonální maticí a ověřte pomocí transformačního vztahu.

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 3x - y + z, 3z).$$

10. Napište tabulky operací sčítání a násobení v množině zbytkových tříd modulo 8. Uveďte příklad lineární rovnice, která má v $\mathbf{Z}_8$

a) Právě jedno řešení.

b) Více než jedno řešení.

c) Žádné řešení.