

PÍSEMKA I. — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2, 2006

1. Samoadjungovaný lineární operátor φ v \mathbf{U}_4 je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete:

- vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ , [1 bod]
 - spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce), [1 bod]
 - matici \bar{A} reprezentující φ v bázi vlastních vektorů \bar{B} a matice přechodu T , T^{-1} mezi bázemi B a \bar{B} . [0,5 bodu]
 - matici A^{10} . [0,5 bodu]
-

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic:

- $y'' + y = e^x \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, [1,2 bodu]
 - $(x^2 + 1)y' - 4xy = x$, [1,2 bodu]
 - $y'(x^2 - 1) = xy$. [0,6 bodu]
-

3. Je dáno zobrazení $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, yx^2 + 2z, \frac{1}{z} + 2y + 1).$$

Určete

- Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]
 - zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce F a v kladném případě tuto funkci vypočtěte, [1 bod]
 - rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]
-

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x, y)$ do nových proměnných $u(x, y) = x - 2\sqrt{y}$, $v(x, y) = x + 2\sqrt{y}$:

$$z_{xx} - yz_{yy} - \frac{1}{2}z_y = 0.$$

[1,5 bodu]