PÍSEMKA II. — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2, 2006

1. Samoadjungovaný lineární operátor φ v $\mathbf{U}_4$ je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete:

a) vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ, [1 bod]

b) spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce), [1 bod]

c) matici $\overline{A}$ reprezentující φ v bázi vlastních vektorů $\overline{B}$ a matice přechodu T, T^{-1} mezi bázemi B a $\overline{B}$. [0,5 bodu]

d) matici A^{10}. [0,5 bodu]

---

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic:

a) $y'' + y = x^3$, [1,2 bodu]

b) $xy' - 2y = 2x^4$, [1,2 bodu]

c) $y'\mathrm{cotg}x + y = 2$, $\quad y(0) = -1$. [0,6 bodu]

---

3. Je dáno zobrazení $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, yz^2, zy^2 + x^2z + 1).$$

Určete

a) Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]

b) zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce F a v kladném případě tuto funkci vypočtěte, [1 bod]

c) rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]

---

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x, y)$ do nových proměnných $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = \frac{y}{x+y}$:

$$xz_{xx} - yz_{xy} + z_x = 0.$$

[1,5 bodu]