PÍSEMKA III. — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2, 2006

1. Samoadjungovaný lineární operátor φ v $\mathbf{U}_4$ je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 4\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete:

a) vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ, [1 bod]

b) spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce), [1 bod]

c) matici $\overline{A}$ reprezentující φ v bázi vlastních vektorů $\overline{B}$ a matice přechodu T, T^{-1} mezi bázemi B a $\overline{B}$. [0,5 bodu]

d) matici A^{10}. [0,5 bodu]

---

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic (nebo soustavy):

a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$, [1,2 bodu]

b) $y_1' = 2y_1 + y_2$, $y_2' = -y_1 + 4y_2$, $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$, [1,2 bodu]

c) $\dfrac{y'}{\sqrt{1-x^2}} = xy$. [0,6 bodu]

---

3. Je dáno zobrazení $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x^2+1}, \frac{2y}{y^2+z^2}, \frac{2z}{y^2+z^2} - 1\right).$$

Určete

a) Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]

b) zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce F a v kladném případě tuto funkci vypočtěte, [1 bod]

c) rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]

---

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x,y)$ do nových proměnných $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = xy$:

$$y^2 z_{xx} + x^2 z_{yy} - 2xyz_{xy} - xz_x - yz_y = 0.$$

[1,5 bodu]