PÍSEMKA IV. — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2, 2006

1. Samoadjungovaný lineární operátor φ v $\mathbf{U}_4$ je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete:

a) vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ, [1 bod]

b) spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce), [1 bod]

c) matici $\overline{A}$ reprezentující φ v bázi vlastních vektorů $\overline{B}$ a matice přechodu T, T^{-1} mezi bázemi B a $\overline{B}$. [0,5 bodu]

d) matici A^{10}. [0,5 bodu]

---

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic (nebo soustavy):

a) $y'' + y = \sin 2x, \quad y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1,$ [1,2 bodu]

b) $y_1' = y_1 + y_2, \quad y_2' = 2y_1 + 3y_2,$ [1,2 bodu]

c) $y'(x^2+1) = xy.$ [0,6 bodu]

---

3. Je dáno zobrazení $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x - \frac{2x}{x^2+z^2}, y+1, z - \frac{2z}{x^2+z^2}\right).$$

Určete

a) Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]

b) zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce F a v kladném případě tuto funkci vypočtěte, [1 bod]

c) rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]

---

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x,y)$ do nových proměnných $u(x,y) = x + y$, $v(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$:

$$x^2 z_{xx} - (x^2+y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} - \frac{1}{2} z_y = 0.$$

[1,5 bodu]