PÍSEMKA V. — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2, 2006

1. Samoadjungovaný lineární operátor φ v $\mathbf{U}_4$ je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete:

a) vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ, [1 bod]

b) spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce), [1 bod]

c) matici $\overline{A}$ reprezentující φ v bázi vlastních vektorů $\overline{B}$ a matice přechodu T, T^{-1} mezi bázemi B a $\overline{B}$. [0,5 bodu]

d) matici A^{10}. [0,5 bodu]

---

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic:

a) $2y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^x$, [1,2 bodu]

b) $y' - \dfrac{4xy}{x^2+1} = \dfrac{x}{x^2+1}$, $y(0) = 2, y'(0) = 0$ [1,2 bodu]

c) $y' = \dfrac{y-1}{x^2y^2}$. [0,6 bodu]

---

3. Je dáno zobrazení $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$\vec{F}(x, y, z) = (-x + \frac{2x}{x^2+y^2}, -y + \frac{2y}{2x^2+y^2}, z).$$

Určete

a) Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]

b) zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce F a v kladném případě tuto funkci vypočtěte, [1 bod]

c) rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]

---

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x, y)$ do nových proměnných $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = \frac{1}{x-y}$:

$$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} - \frac{1}{2}z_y = 0.$$

[1,5 bodu]