

**PÍSEMKA VIII. — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2, 2006**

1. Samoadjungovaný lineární operátor  $\varphi$  v  $\mathbf{U}_4$  je v ortonormální bázi  $B$  reprezentován maticí  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete:

- vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení  $\varphi$ , [1 bod]
  - spektrální reprezentaci zobrazení  $\varphi$  v bázi  $B$  (tj. rozklad  $A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r$ , kde  $P_i$  jsou matice projekce), [1 bod]
  - matici  $\bar{A}$  reprezentující  $\varphi$  v bázi vlastních vektorů  $\bar{B}$  a matice přechodu  $T, T^{-1}$  mezi bázemi  $B$  a  $\bar{B}$ . [0,5 bodu]
  - matici  $A^{10}$ . [0,5 bodu]
- 

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic (nebo soustav):

- $y'' + y = \sin 2x$ ,  $y(\pi) = 1$ ,  $y'(\pi) = 1$ , [1,2 bodu]
  - $xy' - 2y = 2x^4$ , [1,2 bodu]
  - $y'(x^2 + 3x - 4) = (x + 9)y$ . [0,6 bodu]
- 

3. Je dáno zobrazení  $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ :

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( x^2 - \frac{6x}{x^2 + z^2}, y - 1, z^2 - \frac{6z}{x^2 + z^2} \right).$$

Určete

- Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]
  - zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce  $F$  a v kladném případě tuto funkci vypočtete, [1 bod]
  - rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]
- 

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci  $z(x, y)$  do nových proměnných  $u(x, y) = x + y$ ,  $v(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ :

$$x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} - \frac{1}{2} z_y = 0.$$

[1,5 bodu]