

PÍSEMKA — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2, 2006

1. Samoadjungovaný lineární operátor φ v \mathbf{U}_4 je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Určete:

- vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ , [1 bod]
 - spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce), [1 bod]
 - matici \bar{A} reprezentující φ v bázi vlastních vektorů \bar{B} a matice přechodu T, T^{-1} mezi bázemi B a \bar{B} . [0,5 bodu]
 - matici A^{10} . [0,5 bodu]
-

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic:

- $y'' - y' = x - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, [1,2 bodu]
 - $x^2 y' + xy + 1 = 0$, [1,2 bodu]
 - $y'(x^2 + 3x - 4) = y$. [0,6 bodu]
-

3. Je dáno zobrazení $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2xy^2z + \frac{1}{x}, 2yx^2z - y^2, x^2y^2 \right).$$

Určete

- Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]
 - zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce F a v kladném případě tuto funkci vypočtete, [1 bod]
 - rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]
-

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x, y)$ do nových proměnných $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $v(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$:

$$xz_{xx} - yz_{yy} = 0.$$

[1,5 bodu]