TEST VII.

1.

a) Ve vektorovém prostoru všech čtvercových matic řádu 2 (s operací sčítání matic a násobení matice číslem) zadejte soubor vektorů, který tvoří bázi a soubor vektorů, který bází není. Zdůvodněte.

b) Uvažujme vektorový prostor V všech polynomů stupně nejvýše tři. Uveďte příklad podprostorů V_1 a V_2 ve V tak, aby platilo $V_1 + V_2 = V$. Zdůvodněte.

2. Určete průnik podprostorů v $\mathbf{R}^3$ zadaných takto:

$$L_1 = [(1,1,1)(2,1,0),(-1,0,1)], \qquad L_2 = [(1,0,1),(0,0,2)].$$

3. Zadejte skalární součin v $\mathbf{R}^3$ tak, aby vektory $\vec{a} = (1,-1,0)$ a $\vec{b} = (1,-1,1)$ byly ortogonální.

4. Určete ortogonální doplněk k podprostoru $L = [x^2]$ v prostoru $P_2[x]$ (polynomy stupně nejvýše 2), skalární součin je zadán takto:

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

5. Vypočtěte parciální derivice prvního a druhého řádu $(z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy})$ funkce

$$z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

6. Rozhodněte, zda maticí

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

je zadán skalární součin v $\mathbf{R}^2$. Zdůvodněte a v kladném případě nalezněte nějakou ortonormální bázi.

7. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ je dáno předpisem

$$f(x,y,z,w) = (x+y, x+y+z+w).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

8. Je dána transformace souřadnic $(u, v) \to (x, y)$

$$\begin{aligned} x &= u - v \\ y &= u + v \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $u =$ konst., $v =$ konst.

9. Lineární zobrazení $f : P_2[x] \to P_2[x]$ (prostor polynomů stupně nejvýše dva, čárka značí derivaci) je dáno vztahem

$$f(p) = xp''.$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Uveďte příklad vektorového pole, které není gradientem pole skalárního. Zdůvodněte.