TEST II.

1. Uvažujme grupu $(\mathbf{Z}, +)$ (množinu celých čísel s operací sčítání).

a) Nalezněte nejmenší podmnožinu obsahující prvek $z_0 = 4$, která je sama grupou vzhledem k operaci $+$, zdůvodněte.

b) Rozhodněte, zda podmnožina všech lichých čísel je grupou vhledem k operaci $+$, zdůvodněte.

2.

a) Rozhodněte, zda $\mathbf{R}^3$ je přímým součtem podprostorů

$$V_1 = [(0,1,1),(0,1,0),(0,0,1)]$$

a

$$V_2 = [(1,0,0),(0,0,0)].$$

Zdůvodněte.

b) Uveďte příklad dvou netriviálních podprostorů v $\mathbf{R}^2$ takových, že $V_1 + V_2 = V_1 \cup V_2$.

3. V prostoru $P_2[x]$ je skalární součin definován vztahem

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1),$$

vypočtěte skalární součin vektoů $u(x) = x^2 + 1$ a $v(x) = x$, určete jejich odchylku.

4. Určete matici skalárního součinu z předchozího příkladu v bázi $B = \{1, x, x^2\}$.

5. Určete ortogonální doplněk $L_\perp$ k podprostoru $L = [(0,0,0,1),(0,1,0,0)]$, skalární součin je v téže bázi zadán maticí

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Ortogonalizujte systém vektorů $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (1,-1,2)$, $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} = (2,0,2)$, složky jsou zadány v ortonormální bázi.

7. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ je dáno předpisem

$$f(x, y, z, w) = (x + z, x - z).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

8. Je dána transformace souřadnic $(u, v) \to (x, y)$

$$\begin{aligned} x &= u \cdot v \\ y &= \frac{u}{v} \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $u =$ konst., $v =$ konst.

9. Lineární zobrazení $f : P_2[x] \to P_2[x]$ je dáno vztahem

$$f(ax^2 + bx + c) = 2a.$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Uveďte příklad lineárního zobrazení $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, pro které obraz splývá s jádrem. Lze takové zobrazení nalézt také v prostoru $\mathbf{R}^3$? Zdůvodněte.