TEST IX.

1. Definujte bázi vektorového prostoru. V prostoru $\mathbf{R}^4$ uveďte příklad dvou různých bází B a B'. Určete složky vektoru $a = (1, -1, 2, 0)$ v bázi B, resp. v bázi B'.

2. Určete bázi a dimenzi podprostorů L_1 a L_2 v prostoru $V = P_3[x]$ všech polynomů stupně nejvýše 3, určete bázi a dimenzi jejich součtu a průniku.

$$L_1 = \{p(x) \in V | p(0) = 0\}, \quad L_1 = [|x^3 - 1, x^3 + 1, x^2 - 1, x^2 + 1|].$$

3. V prostoru $\mathbf{C}^2$ zadejte tři různé skalární součiny (například ve standardní bázi pomocí matice G, jaké vlastnosti musí mít matice G?). Pro každé z vašich zadání spočtěte skalární součin (a, b), kde $a = (\mathrm{i}, 0)$, $b = (1, \mathrm{i})$.

4. Definujte unitární lineární zobrazení a uveďte příklad zobrazení, které je unitární a příklad zobrazení, které není unitární. Zdůvodněte.

5. Vypočtěte paricální derivace až do druhého řádu z funkce $f = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. Ortogonalizujte systém vektorů $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$, $\vec{w} = (2, -2, 2)$, složky jsou zadány v ortonormální bázi.

7. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ je dáno předpisem

$$f(x, y, z) = (x + z, x - z, y).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

8. Je dána transformace souřadnic $(r, \varphi) \to (x, y)$, $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \\ y &= r \cos \varphi \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $u =$ konst., $v =$ konst.

9. Uveďte příklad lineárního zobrazení $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, pro které jsou vektory $a = (1, 1)$ a $b = (1, -1)$ vlastní, a jsou příslušné různým vlastním hodnotám. Zapište zobrazení předpisem nebo maticí ve standardní bázi.

10. Uveďte příklad vektorového pole, které není gradientem žádného skalárního pole. Zdůvodněte.