TEST III.

1. Rozhodněte, zda množina $M = \{0, 1, 2\}$ s operacemi $+, \cdot$ definovanými takto:

$$\begin{aligned} 0+0&=0\\ 0+1=1+0&=1\\ 0+2=2+0&=2\\ 1+1&=2\\ 1+2=2+1&=0\\ 2+2&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0\cdot 0&=0\\ 0\cdot 1=1\cdot 0&=0\\ 0\cdot 2=2\cdot 0&=0\\ 1\cdot 1&=1\\ 1\cdot 2=2\cdot 1&=2\\ 2\cdot 2&=1 \end{aligned}$$

je tělesem. Zdůvodněte. V kladném případě určete neutrální prvky vzhledem k oběma operacím.

2.

a) Určete vektorový prostor, který je součtem podprostorů

$$V_1 = [(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)]$$

a

$$V_2 = [(1,0,0)].$$

Rozhodněte, zda se jedná o přímý součet. Zdůvodněte.

b) Uveďte příklad tří lineárně nezávislých vektorů v $\mathbf{R}^2$. Zdůvodněte.

3. V prostoru $P_2[x]$ je skalární součin definován vztahem

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1),$$

ortogonalizujte systém vektorů $u(x) = x^2$ a $v(x) = x$, $w(x) = x^2 - x$.

4. Určete matici skalárního součinu z předchozího příkladu v bázi $B = \{1, x+1, x^2\}$.

5. Určete ortogonální doplněk $L_\perp$ k podprostoru $L = [(0,0,1),(0,1,0)]$, skalární součin je v téže bázi zadán maticí

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Vypočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (1, 1, 0)$ a $\vec{v} = (1, -1, 2)$ a určete jejich odchylku, je-li skalární součin v téže bázi zadán maticí

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ je dáno předpisem

$$f(x, y, z) = (x + z, x - z, x, 2x).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

8. Je dána transformace souřadnic $(u, v) \to (x, y)$

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $u =$ konst., $v =$ konst.

9. Lineární zobrazení $f : Mat_{2\times 2} \to Mat_{2\times 2}$ je dáno vztahem

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 2a \\ -a & a \end{pmatrix}.$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Uveďte příklad lineárního zobrazení $\varphi : P[2] \to P[2]$, které má podprostory vlastních vektorů tyto: $L_{\lambda_1=1} = [x^2 + x, 1]$, $L_{\lambda_2=0} = [x + 1]$. Zadejte jeho matici ve standardní bázi $(x^2, x, 1)$ a předpis $\varphi(ax^2 + bx + c) = \ldots$.