TEST IV.

1. Uvažujte grupu všech matic řádu n s operací sčítání matic.

a) Nalezněte v ní dvě různé podgrupy.

b) Uveďte příklad podmnožiny, která není podgrupou. Zdůvodněte.

2.

a) Nalezněte nějaký doplněk k podprostoru všech diagonálních matic ve vektorovém prostoru $Mat_{2\times 2}$. Je doplněk určen jednoznačně? Zdůvodněte.

b) Rozhodněte, zda systém $\{1, x, 2x-4\}$ je lineárně nezávislý v prostoru $P_2[x]$. Zdůvodněte.

3. Zobrazení $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je v nějaké bázi reprezentováno maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda toto zobrazení je projekcí na nějaký podprostor a jeho doplněk. Zdůvodněte. V kladném případě podprostor i doplněk určete. (Návod: uvědemte si jakou vlastnost má projekce, když ji aplikujeme dvakrát po sobě).

4. Určete ortogonální doplněk k podprostoru $L = [1, x+1, x-1]$ v prostoru $P_2[x]$, skalární součin je definován

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

5. Ortogonalizujte systém vektorů $\{(1,-1,1), (1,1,1)\}$ a doplňte ho na ortogonální bázi $\mathbf{R}^3$. Složky jsou zadány v ortonormální bázi.

6. Rozhodněte, zda maticí

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je definován skalární součin v $\mathbf{R}^3$. Zdůvodněte.

7. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ je dáno předpisem

$$f(x, y, z, w) = (x + z, x - z, w).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

8. Je dána transformace souřadnic $(u, v) \to (x, y)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{v} \\ y &= 2u \cdot v \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $u =$ konst., $v =$ konst.

9. Lineární zobrazení $f : Mat_{2\times 2} \to Mat_{2\times 2}$ je dáno vztahem

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}.$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Uveďte příklad ortonormální báze v prostoru $\mathbf{C}^2$ se skalárním součinem zadaným maticí $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$.