TEST V.

1.

a) Uveďte příklad okruhu, který není tělesem. Zdůvodněte.

b) Uveďte příklad grupy, která není komutativní. Zdůvodněte.

2.

a) Nalezněte nějaký doplněk k podprostoru všech symetrických matic ve vektorovém prostoru $Mat_{2\times 2}$. Je doplněk určen jednoznačně? Zdůvodněte.

b) Rozhodněte, zda systém $\{1, x^2, 2x-4\}$ tvoří bázi $P_2[x]$. Zdůvodněte.

3. Nechť $\mathbf{E}$ je prostor se skalárním součinem. Zobrazení $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ je v nějaké ortonormální bázi reprezentováno maticí

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Zobrazení je ortogonální projekcí na nějaký podprostor. Určete tento podprostor a jeho ortogonální doplněk.

4. Určete ortogonální doplněk k podprostoru $L = [x^2, x, 2x]$ v prostoru $P_2[x]$, skalární součin je definován

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

5. Ortogonalizujte systém vektorů $\{(1,-1,1),(2,-2,2)\}$ a doplňte ho na ortogonální bázi $\mathbf{R}^3$. Složky jsou zadány v ortonormální bázi.

6. Rozhodněte, zda maticí

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je definován skalární součin v $\mathbf{R}^3$. Zdůvodněte.

7. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ je dáno předpisem

$$f(x,y,z,w) = (x+z, x-z).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

8. Je dána transformace souřadnic $(u, v) \to (x, y)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{v} \\ y &= u \cdot v + 2 \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $u =$ konst., $v =$ konst.

9. Lineární zobrazení $f : Mat_{2\times 2} \to Mat_{2\times 2}$ je dáno vztahem

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Uveďte příklad vektorového pole, které není rotací jiného vektorového pole. Zdůvodněte.