TEST VI.

1.

a) Ve vektorovém prostoru všech polynomů stupně nejvýše 2 zadejte soubor vektorů, který tvoří bázi a soubor vektorů, který bází není. Zdůvodněte.

b) Uvažujme vektorový prostor V všech čtvercových matic řádu 2. Uveďte příklad podprostorů V_1 a V_2 ve V tak, aby platilo $V_1 + V_2 = V$. Zdůvodněte.

2. Určete průnik podprostorů v $\mathbf{R}^3$ zadaných takto:

$L_1 = [(1,1,1)(2,1,0)]$, $\qquad L_2 = [(1,0,-1),(1,0,1),(1,0,0),(0,0,1)]$.

3. Zadejte skalární součin v $\mathbf{R}^3$ tak, aby vektory $\vec{a} = (1,1,0)$ a $\vec{b} = (0,1,1)$ byly ortogonální.

4. Určete ortogonální doplněk k podprostoru $L = [x^2, 1]$ v prostoru $P_2[x]$ (polynomy stupně nejvýše 2), skalární součin je zadán takto:

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(1)q(1) + p(0)q(0) + p(-1)q(-1).$$

5. Vypočtěte parciální derivice prvního a druhého řádu $(z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy})$ funkce

$$z(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

6. Rozhodněte, zda maticí

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

je zadán skalární součin v $\mathbf{R}^2$. Zdůvodněte a v kladném případě nalezněte nějakou ortonormální bázi.

7. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ je dáno předpisem

$$f(x,y,z,w) = (x+y, x-z, w).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

8. Je dána transformace souřadnic $(u,v) \to (x,y)$

$$\begin{aligned} x &= u \cdot \sin(v/2) \\ y &= u \cdot \cos(v/2) + 1 \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $u =$ konst., $v =$ konst.

9. Lineární zobrazení $f : P_2[x] \to P_2[x]$ (prostor polynomů stupně nejvýše dva, čárka značí derivaci) je dáno vztahem

$$f(p) = p' - xp''.$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Uveďte příklad dvou různých, nekonstantních vektorových polí, které mají stejnou rotaci i divergenci.