

## TEST VII.

1.

- a) Ve vektorovém prostoru všech čtvercových matic řádu 2 (s operací sčítání matic a násobení matice číslem) zadejte soubor vektorů, který tvoří bázi a soubor vektorů, který bázi není. Zdůvodněte.
- b) Uvažujme vektorový prostor  $V$  všech polynomů stupně nejvýše tři. Uveďte příklad podprostorů  $V_1$  a  $V_2$  ve  $V$  tak, aby platilo  $V_1 + V_2 = V$ . Zdůvodněte.

2. Určete průnik podprostorů v  $\mathbf{R}^3$  zadaných takto:

$$L_1 = [(1, 1, 1)(2, 1, 0), (-1, 0, 1)], \quad L_2 = [(1, 0, 1), (0, 0, 2)].$$

3. Zadejte skalární součin v  $\mathbf{R}^3$  tak, aby vektory  $\vec{a} = (1, -1, 0)$  a  $\vec{b} = (1, -1, 1)$  byly ortogonální.

4. Určete ortogonální doplněk k podprostoru  $L = [x^2]$  v prostoru  $P_2[x]$  (polynomy stupně nejvýše 2), skalární součin je zadán takto:

$$\langle p(x)|q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

5. Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu  $(z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy})$  funkce

$$z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

6. Rozhodněte, zda maticí

$$G = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

je zadán skalární součin v  $\mathbf{R}^2$ . Zdůvodněte a v kladném případě nalezněte nějakou ortonormální bázi.

7. Lineární zobrazení  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$  je dáno předpisem

$$f(x, y, z, w) = (x + y, x + y + z + w).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

**8.** Je dána transformace souřadnic  $(u, v) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{aligned}x &= u - v \\y &= u + v\end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky  $u = \text{konst.}$ ,  $v = \text{konst.}$

**9.** Lineární zobrazení  $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$  (prostor polynomů stupně nejvýše dva, čárka značí derivaci) je dáno vztahem

$$f(p) = xp''.$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

**10.** Uveďte příklad vektorového pole, které není gradientem pole skalárního. Zdůvodněte.