TEST VIII.

1. Definujte *součet podprostorů* a *přímý součet podprostorů*. Na konkrétním příkladě ukažte rozdíl mezi těmito pojmy.

2. Určete průnik podprostorů v $\mathbf{R}^3$ zadaných takto:

$$L_1 = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}, \qquad L_2 = [(1, 2, 0), (-1, -1, 1)].$$

3. Zadejte skalární součin v $\mathbf{R}^3$ tak, aby vektory $\vec{a} = (1, 1, 0)$ a $\vec{b} = (1, -1, 1)$ nebyly ortogonální.

4. Určete ortogonální doplněk k podprostoru $L = [x]$ v prostoru $P_2[x]$ (polynomy stupně nejvýše 2), skalární součin je zadán takto:

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

5. Vypočtěte parciální derivice prvního a druhého řádu $(z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy})$ funkce

$$z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

6. Rozhodněte, zda maticí

$$G = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

je zadán skalární součin v $\mathbf{R}^2$. Zdůvodněte a v kladném případě nalezněte nějakou ortonormální bázi.

7. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ je dáno předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y, x + y + z + w, x + z, y + w).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a obraz.

8. Je dána transformace souřadnic $(u, v) \to (x, y)$

$$\begin{aligned} x &= u - 2v \\ y &= 3u + v \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$

9. Lineární zobrazení $f : P_2[x] \to P_2[x]$ ($P_2[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše dva nad $\mathbf{R}$) je dáno vztahem

$$f(ax^2 + bx + c) = (cx^2 + ax + b).$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Uveďte příklad vektorového pole, které není rotací jiného vektorového pole. Zdůvodněte.