Matematika 2 - domácí písemka algebra

1. Relace.
Definujte *relaci, zobrazení, bijekci, ekvivalenci, uspořádání*

Nechť A je tříprvková množina (např. $A = \{a, b, c\}$).

i) Kolik existuje relací na $A \times A$? (Nesnažte se všechny vypsat, je jich hodně.)

ii) Kolik existuje zobrazení $A \to A$? (tj. $D_f = A$, $H_f \subseteq A$.)

iii) Kolik existuje bijekcí $A \to A$? (tj. vzájemně jednoznačných zobrazení.)

iv) Kolik existuje relací ekvivalence na A? (Můžete si všechny vypsat.)

v) Kolik existuje relací uspořádání na A?

2. Vektorové prostory.
Definujte *grupu, těleso, vektorový prostor*

Rozhodněte, zda následující množiny s operacemi sčítání a násobení skalárem tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$. Zdůvodněte (tj, pokud ano — dokažte, pokud ne — uveďte příklad, kdy není splněn některý z axiomů). V kladném případě určete jeho dimenzi, nalezněte nějakou bázi.

a) Množina komplexních čísel s operací sčítání danou sčítáním komplexních čísel a operací násobení skalárem danou násobením komplexního čísla číslem reálným.

b) Množina $\mathbf{V} = \mathbf{R^2}$ s operací sčítání $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ a násobení $t \odot (x, y) = (t^2 x, t^2 y)$.

3. Podprostory.
Definujte *podprostor, součet podprostorů, přímý součet podprostorů, doplněk*

Uvažujme vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše n nad $\mathbf{R}$, se sčítáním a násobením skalárem definovaným standardně. Zadejte v tomto prostoru dva různé, netriviální podprostory, určete jejich dimenzi a nalezněte nějakou bázi. Nalezněte bázi jejich součtu a jejich průniku. Je jejich součet přímý? Ke každému z nich nalezněte tři různé doplňky. Zdůvodněte

4. Součet a průnik.

Jsou zadány podprostory $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ v $\mathbf{R}^3$. Nalezněte jejich bázi a dimenzi. Nalezněte bázi a dimenzi jejich součtu a jejich průniku. Nalezněte bázi (nějakého) doplňku k prostoru $\mathbf{V}_1$.

$$\mathbf{V}_1 = [(1,1,0),(1,-1,0),(1,0,0)]$$

$$\mathbf{V}_2 = [(2,-1,1),(0,0,1)]$$

5. Lineární zobrazení.

Definujte *lineární zobrazení, izomorfismus, jádro, image, defekt a hodnost*

Lineární zobrazení $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ zobrazuje vektor $\vec{u} = (1,1,0)$ na vektor $f(\vec{u}) = (-1,1)$, vektor $\vec{v} = (1,0,1)$ na vektor $f(\vec{v}) = (0,2)$ a vektor $\vec{w} = (0,1,1)$ na $f(\vec{w}) = (-3,1)$. Složky vektorů jsou zadány ve standardních bázích.

a) Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bázích.

b) Určete jádro a image zobrazení.

c) Určete matici tohoto zobrazení v bázích $B'_{\mathbf{R}^3} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, $B'_{\mathbf{R}^2} = (f(\vec{v}), f(\vec{u}))$ (pozor na pořadí).

d) Správnost ověřte použitím transformačního vztahu pro matici lineárního zobrazení.

6.

- Napište definici *lineárního obalu systému vektorů* a uveďte příklad, kdy čtyři různé vektory generují dvourozměrný podprostor v $\mathbf{R}^3$. Zdůvodněte.
- Napište definici *lineární závislosti systému vektorů* a uveďte příklad systému vektorů v prostoru čtvercových matic řádu dva, který je závislý, a systému, který je nezávislý. Zdůvodněte.

7. Příklady
Definujte *vlastní vektor, vlastní hodnotu.*
Uveďte příklady a) až e) lineárního zobrazení $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ (prostory nad polem $\mathbf{C}$), pro které (postupně):

a) $\ker f = [(\mathrm{i}, 0, 1)]$, $\mathrm{Im} = [(\mathrm{i}, 0, 1), (1, 0, 0)]$,

b) vektor $\vec{u} = (0, \mathrm{i}, 1)$ je vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě $\lambda = -1$,

c) f není diagonalizovatelné,

d) f má tři různé vlastní hodnoty a je izomorfismem,

e) f je projekcí (tj. $f \circ f = f$), ale není ani nulovým zobrazením, ani identitou.

Zadejte jednotlivá zobrazení přepisem $f(x, y, z) = ...$ i maticí ve standardní bázi.

8. Skalární součin
Definujte *skalární součin.*

Rozhodněte, zda operace $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ definuje skalární součin ve vektorovém prostoru V nad $\mathbf{R}$ a dokažte:

- $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$,
$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\rangle = a \cdot e + 2b \cdot f + 3c \cdot g + d \cdot h.$$

- $V = \mathbf{C}$, $\langle a + \mathrm{i}b | c + \mathrm{i}d \rangle = a \cdot b - c \cdot d$.

9. Ortogonalizace
Definujte *ortogonální systém vektorů, ortonormální bázi, ortogonální doplněk, ortogonální projekci vektoru do podprostoru*

a) Určete ortogonální projekci vektoru x^2 do podprostoru $L = [1, x]$ v prostoru polynomů stupně nejvýše 2, skalární součin je zadán takto:
$$(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

b) Určete ortogonální doplněk k podprostoru $L = [(1, \mathrm{i}, 0)]$ v $\mathbf{C}^3$, složky jsou zadány v ortonormální bázi.

c) Ortogonalizujte soubor vektorů $((1,1,1),(0,1,2),(1,0,-1))$ v $\mathbf{R}^3$, skalární součin je zadán maticí

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Spektrální reprezentace

Samoadjungovaný lineární operátor φ v $\mathbf{U}_4$ je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete:

a) vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ,

b) spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce),

c) matici $\overline{A}$ reprezentující φ v bázi vlastních vektorů $\overline{B}$ a matice přechodu T, T^{-1} mezi bázemi B a $\overline{B}$.

d) matici A^{10}.