PÍSEMKA IV. — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2

1. Samoadjungovaný lineární operátor φ v $\mathbf{U}_4$ je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete:

a) vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ, [1 bod]

b) spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce), [1 bod]

c) matici $\overline{A}$ reprezentující φ v bázi vlastních vektorů $\overline{B}$ a matice přechodu T, T^{-1} mezi bázemi B a $\overline{B}$. [0,5 bodu]

d) matici A^{10}. [0,5 bodu]

---

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic:

a) $y'' + y = \mathrm{e}^x \cos x$, [1 bod]

b) $y' = 3x^2 y + (x+2)\mathrm{e}^{x^3}$ s počáteční podmínkou $y(0) = -2$, [1 bod]

c) $(xy' - y)\cos\dfrac{y}{x} = x$. [1 bod]

---

3. Je dáno zobrazení $\vec{F} : D \to \mathbf{R}^3$, ($D \subset \mathbf{R}^3$ je otevřená jednoduše souvislá množina):

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \cos x \ , \ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 2y \ , \ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{1+z^2} \right).$$

Určete

a) Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]

b) zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce F a v kladném případě tuto funkci vypočtěte, [1 bod]

c) rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]

---

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x,y)$ do nových proměnných $u(x,y) = x + \frac{1}{y}$, $v(x,y) = x - \frac{1}{y}$:

$$z_{xx} - y^4 z_{yy} - 2y^3 z_y = 0.$$

[1,5 bodu]