TEST IV. — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2

1.

- Definujte *součet* a *přímý součet* podprostorů L_1 a L_2 ve vektorovém prostoru V.
- $V = P[3]$ je vektorový prostor polynomů supně nejvýše tři. Určete součet $L_1 + L_2$ podprostorů
$$L_1 = \{p(x) \in V \,|\, p(x) = p(-x)\}, \quad L_2 = [|x^3 - 1, x^3 + 1|]$$
(nalezněte jeho bázi a určete dimenzi) a rozhodněte, zda se jedná o přímý součet (zdůvodněte).

2.

- Definujte *těleso* (napište axiomy tělesa).
- Rozhodněte, které z následujících množin jsou a které nejsou tělesem (zdůvodněte):
  a) množina $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ všech racionálních čísel s operacemi sčítání a násobení,
  b) množina $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ všech celých čísel s operacemi sčítání a násobení,
  c) množina $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ všech komplexních čísel s operacemi sčítání a násobení,
  d) množina $(\mathbf{Mat}_{2x2}, +, \cdot)$ všech čtvercových matic řádu 2 s operacemi sčítání a násobení matic.

3.

- Definujte *defekt* a *hodnost* lineárního zobrazení $f : V_1 \to V_2$.
- Určete matici lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ ve standardní bázi, určete jeho hodnost a defekt, jestliže je zobrazení zadáno předpisem:
$$f(x,\, y,\, z) = (x + y + z,\, x + y,\, z,\, 0).$$

4.

- Definujte *vlastní vektor* lineárního operátoru $f : V \to V$.
- Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory operátoru $f : \mathbf{Mat}_{2x2} \to \mathbf{Mat}_{2x2}$ v prostoru čtvercových matic řádu 2, jestliže je operátor zadán předpisem
$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

---

5. Je dána transformace souřadnic $C : M_1 \to M_2$, $M_1, M_2 \subset \mathbf{R}^2$, $C : M_1 \ni (u,v) \to (x,y) \in M_2$:
$$x = \frac{1}{u} + v, \quad , \quad y = \frac{1}{u} - v.$$
Nalezněte inverzní transformaci $C^{-1} : (x,y) \to (u,v)$ a určete souřadnicové křivky $u =$ konst., $v =$ konst. a Jacobiho matice transformací C i C^{-1}.

---

6. Určete definiční obor a zakreslete vrstevnice funkce $f(x,y) = \arcsin\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$.

7.

- Definujte *ortonormální bázi* v unitárním prostoru U.
- Skalární součin $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ je zadán předpisem $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac^* + \mathrm{i}bc^* - \mathrm{i}ad^* + 2bd^*$. Nalezněte ortonormální bázi vzhledem k tomuto skalárnímu součinu.

8.

- Definujte *ortogonální doplněk* $L_\perp$ k podprostoru L v unitárním prostoru U.
- V unitárním prostoru $\mathbf{C}^4$ určete ortogonální průmět vektoru $\vec{a} = (1, \mathrm{i}, 0, 1)$ do podprostoru $L = [|(1, 1, \mathrm{i}, \mathrm{i})|]$. Složky vektorů jsou zadány v ortonormální bázi.

9.

- Definujte *ortogonální operátor* v Euklidovském prostoru a uveďte jeho základní vlastnosti (jaké má vlastní hodnoty, co platí pro vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám, jakou maticí je reprezentován v ortonormální bázi).
- Uveďte příklad ortogonálního operátoru v prostoru $\mathbf{R}^2$ se standardně zadaným skalárním součinem ($G = E$), který
  a) je diagonalizovatelný,
  b) není diagonalizovatelný.

10.

- Definujte parciální derivaci $f_y(a,b)$ v bodě $(a,b) \in D_f \subset \mathbf{R}^2$ funkce dvou proměnných $f(x,y)$.
- Pomocí diferenciálu funkce dvou proměnných určete přibližně hodnotu $\ln(0{,}97^2 + 0{,}05^2)$.
