Reprezentace lineárních zobrazení v bázi

V tomto textu budeme také používat Einsteinovy sčítací symboliky, jestliže se v zápisu objeví stejný index nahoře i dole, pak se přes něj sčítá, hodnoty, které může index nabývat jsou většinou jasné z kontextu, tj. např. $a^i b_i = \sum_{i=1}^n a^i b_i = a^1 b_1 + \ldots + a^n b_n$, nebo $a^i \tau_i^j b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a^i \tau_i^j b_j = a^1 \tau_1^1 b_1 + \ldots + a^n \tau_n^1 b_1 + a^1 \tau_1^2 b_2 + \ldots + a^n \tau_n^2 b_2 + \ldots + \ldots + a^1 \tau_1^m b_m + \ldots + a^n \tau_n^m b_m$. Druhý ze vztahů vyjadřuje násobení $(a)T(b)^T$ řádkového vektoru $(a) = (a^1, \ldots, a^n)$ maticí $T = (\tau_i^j)$ zprava, která má n řádků a m sloupců (horní index je sloupcový, dolní řádkový) a následné násobení sloupcovým vektorem $(b)^T = (b_1, \ldots, b_m)^T$ zprava. Sami vidíte jak výrazně se zápis pomocí sčítací symboliky zkrátí a zpřehlední.

Matice lineárního zobrazení

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}_m$, bázi $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} = \{\vec{e}_i\}$ ve $\mathbf{V_n}$, bázi $C = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\} = \{\vec{f}_j\}$ ve $\mathbf{W}_m$. Nechť $\vec{a} \in \mathbf{V}_n$ je libovolný vektor, který má složky $(\alpha) = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ v bázi B. Je tedy

$$\vec{a} = \alpha^1 \vec{e}_1 + \ldots \alpha^n \vec{e}_n = \alpha^i \vec{e}_i.$$

Z linearity zobrazení φ získáme

$$\varphi(\vec{a}) = \varphi(\alpha^1 \vec{e}_1 + \ldots \alpha^n \vec{e}_n) = \varphi(\alpha^i \vec{e}_i) = \alpha^1 \varphi(\vec{e}_1) + \ldots + \alpha^n \varphi(\vec{e}_n) = \alpha^i \varphi(\vec{e}_i). \quad (1)$$

Odtud je již vidět, že obraz libovolného vektoru z $\mathbf{V}_n$ jednoznačně určíme, pokud budeme znát obrazy bázových vektorů $\varphi(\vec{e}_i)$. Každý z těchto obrazů je však prvkem $\mathbf{W}_m$ a lze ho tedy zapsat jako lineární kombinaci vektorů báze C, tj.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{e}_1) &= A_1^1 \vec{f}_1 + \ldots + A_1^m \vec{f}_m \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \varphi(\vec{e}_n) &= A_n^1 \vec{f}_1 + \ldots + A_n^m \vec{f}_m, \end{aligned} \qquad (2)$$

pomocí sčítací symboliky $\varphi(\vec{e})_i = A_i^j \vec{f}_j$. Zadáním bází B a C a koeficientů A_i^j (pro reálné vektorové prostory jsou tyto koeficienty reálná čísla) je zobrazení φ jednoznačně určeno. Matici A_i^j o n řádcích a m sloupcích říkáme *matice lineárního zobrazení φ (matice reprezentující φ v bázích B, C)*. Jestliže označíme (α) složky vektoru $\vec{a}$ v bázi B, resp. (β) složky jeho obrazu $\vec{b} = \varphi(\vec{a})$ v bázi C, získáme dosazením vzatů 2 do vztahu 1

$$\varphi(\vec{a}) = \alpha^i A_i^j \vec{f}_j \quad \Rightarrow \quad (\beta) = (\alpha) \cdot A.$$

Složky obrazu libovolného vektoru (v bázi C) získáme vynásobením složek původního vektoru (v bázi B) maticí A (reprezentující zobrazení φ) zprava, $\beta^j = \alpha^i A_i^j$.

Transformace do jiných bází

Označme $B = \{\vec{e}_i\}$, $B' = \{\vec{e}_i\,'\}$ dvě báze ve $\mathbf{V}_n$, $T = (\tau_i^k)$ matici přechodu, tj.

$$\begin{aligned} \vec{e}_1\,' &= \tau_1^1 \vec{e}_1 + \ldots + \tau_1^n \vec{e}_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \vec{e}_n\,' &= \tau_n^1 \vec{e}_1 + \ldots + \tau_n^n \vec{e}_n, \end{aligned}$$

s pomocí sčítací symboliky: $\vec{e}_i{}' = \tau_i^k \vec{e}_k$. Pro transformaci složek vektoru pak platí $\vec{a} = \alpha^k \vec{e}_k = \alpha^{i\prime} \vec{e}_i{}' = \alpha^{k\prime} \tau_k^i \vec{e}_i$, tedy $\alpha^i = \alpha^{k\prime} \tau_k^i$.

$$(\alpha) = (\alpha') \cdot T, \quad (\alpha') = (\alpha) \cdot T^{-1} \tag{3}$$

Podobně, jestliže zvolíme dvě báze $C = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$, $C' = (\vec{f}_1{}', \ldots, \vec{f}_m{}')$ ve $\mathbf{W}_m$ s maticí přechodu M, získáme pro složky vektoru $\vec{b}$ transformační vztah

$$(\beta) = (\beta') \cdot M, \quad (\beta') = (\beta) \cdot M^{-1}. \tag{4}$$

Pro práci v bázích B, C je zobrazení φ reprezentováno maticí A a

$$(\beta) = (\alpha) \cdot A, \tag{5}$$

při práci v bázích B', C' je totéž zobrazení φ reprezentováno maticí A' a

$$(\beta') = (\alpha') \cdot A'. \tag{6}$$

Když teď dosadíme vztahy 4 a 3 do vztahu 5, dostaneme transformační vztah pro matici lineárního zobrazení:

$$(\beta') \cdot M = (\beta) = (\alpha) \cdot A = (\alpha') \cdot T \cdot M \quad \Rightarrow \quad (\beta') = (\alpha') \cdot TAM^{-1},$$

porovnáním s 6:

$$A' = TAM^{-1}.$$

Příklad, který jsme nedořešili na cvičení:

Zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je v bázích $B = \{(1,1), (1,-1)\}$, $C = \{(1)\}$ reprezentováno maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jakou maticí bude reprezentováno v bázích $B' = \{(1,0), (0,1)\}$, $C' = \{(2)\}$.

Řešení: Matice přechodu T získáme tak, že vektory čárkované báze zapíšeme jako lineární kombinaci nečárkovaných, tj.

$$\begin{aligned} (1,0) &= \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) \\ (0,1) &= \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1), \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Analogicky pro M: $(2) = 2(1)$, $M = (2)$, $M^{-1} = (\frac{1}{2})$. Teď již snadno spočítáme

$$A' = TAM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

To bylo jednoduchý, co?

Ještě jeden (typicky písemkový) příklad navíc

Lineární zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ zobrazuje vektor $\vec{a} = (1,-1,0)$ na $\varphi(\vec{a}) = (-1,-1)$, vektor $\vec{b} = (1,0,1)$ na $\varphi(\vec{b}) = (1,-2)$ a vektor $\vec{c} = (0,1,-1)$ na $\varphi(\vec{c}) = (2,1)$. Složky vektorů jsou zadány ve standardních bázích.

a) Určete matici zobrazení φ ve standardních bázích,

b) Určete jádro a obraz zobrazení φ,

c) Určete matici A' zobrazení φ v bázích $B' = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ na $\mathbf{R}^3$ a $C' = \{\varphi(\vec{c}), \varphi(\vec{b})\}$.

Řešení: Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou evidentně lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi $\mathbf{R}^3$. Zadáním jejich obrazů je zobrazení φ již jednoznačně určeno. Matice zobrazení A má tři řádky a dva sloupce a získáme ji řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Soustavu získame z požadavku, že vynásobením trojice složek vektoru $\vec{a}$ maticí A musíme získat dvojici složek vektoru $\varphi(\vec{a})$, analogicky pro $\vec{b}$ a $\vec{c}$). Výsledná soustava je soustavou šesti rovnic o šesti neznámých, která má právě jedno řešení (proč? ... platí Frobeniova věta a levé strany rovnic soustavy jsou linárně nezávislé, neboť vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ byly lineárně nezávislé, hodnost matice soustavy je tedy šest, hodnost matice rozšířené je také šest, stejně jako neznámých). Vyřešením

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jádrem je množina (podprostor) všech vektorů (x, y, z) z $\mathbf{R}^3$, které se zobrazí na nulový vektor v $\mathbf{R}^2$, tyto vektory získáme řešením rovnic

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Soustava má vždy řešení, neboť je homogenní. V tomto případě je to soustava dvou nezávislých rovnic o třech neznámých, má tedy určitě řešení netriviální. Hodnost matice soustavy je 2, řešení závisí na jedné volné neznámé, dimenze prostoru řešení (i hledaného jádra) je 3-2=1.

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{(2t, -t, 2t) | t \in \mathbf{R}\} = [(2, -1, 1)],$$

kde závorky [ ] značí lineární obal vektoru(ů), které jsou uvnitř. Obraz φ je generován obrazy vektorů jakékoli báze, tedy například obrazy vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, odtud

$$\mathrm{Im}\varphi = [(-1, -1), (1, -2), (2, 1)] = [(-1, -1), (1, -2)] = \mathbf{R}^2$$

(třetí vektor jsme klidně mohli vypustit, neboť byl lineární kombinací prvých dvou).

Klidně můžeme uhodnout, jak bude vypadat macice A' v bázích B', C':

$$A' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak jsme to uhodli? Když nevíte, mužete si to prověřit pomocí transformačního vztahu:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$A' = TAM^{-1} = \ldots$ FUJ (ale jinak je algebra fakt krásná :-)