Matematika 2 — Písemka druhá

1. Je to skalární součin, nebo není?

Rozhodněte, zda operace $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ definuje skalární součin ve vektorovém prostoru V nad $\mathbf{R}$ a dokažte:

- $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$,
$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\rangle = a\cdot e + 2b\cdot f + 3c\cdot g + d\cdot h.$$
- $V = \mathbf{C}$, $\langle a + \mathrm{i}b | c + \mathrm{i}d\rangle = a\cdot b - c\cdot d$.

[2 body]

2. Matice projekce

Určete ortogonální doplněk k podprostoru L v $\mathbf{R}^4$:
$L = [(1,0,-1,0), (-1,1,1,1), (0,1,0,1)]$, složky vektorů jsou zapsány v ortonormální bázi. Určete matici projekce a pro libovolný vektor zapište vztah pro ortogonální projekci a komponentu.

[3 body]

3. Ortogonalizace

V prostoru $P_1[x]$ uvažujte bázi $B = \{x+1, -x\}$. Skalární součin je definován vztahem
$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

- Určete matici skalárního součinu v bázi B,
- ortogonalizujte systém B,

Není třeba dopočítávat do konce, stačí zapsat příslušné vztahy.

[2 body]

4. Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace:

Matice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
reprezentuje lineární transformaci (vektory píšeme do řádků a násobíme je maticí A zprava) $\varphi : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ v bázi (e_1, e_2, e_3).
a) určete vlastní hodnoty této transformace
b) určete vlastní vektory této transformace
c) nalezněte bázi, ve které je φ reprezentována diagonální maticí, určete matici přechodu
d) pomocí trasformačního vztahu převeďte matici A do této báze. (Vyšla vám diagonální s vlastními hodnotami na diagonále?)

[3 body]

Matematika 2 — Písemka druhá

1. Je to skalární součin, nebo není?

Rozhodněte, zda operace $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ definuje skalární součin ve vektorovém prostoru V nad $\mathbf{R}$ a dokažte:

- $V = \mathrm{Mat}_{2\times2}$,
$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\rangle = a\cdot e + 2b\cdot f + 3c\cdot g + d\cdot h.$$
- $V = \mathbf{C}$, $\langle a + \mathrm{i}b | c + \mathrm{i}d\rangle = a\cdot b - c\cdot d$.

[2 body]

2. Matice projekce

Určete ortogonální doplněk k podprostoru L v $\mathbf{R}^4$:
$L = [(1,0,-1,0),(-1,1,1,1),(0,1,0,1)]$, složky vektorů jsou zapsány v ortonormální bázi. Určete matici projekce a pro libovolný vektor zapište vztah pro ortogonální projekci a komponentu.

[3 body]

3. Ortogonalizace

V prostoru $P_1[x]$ uvažujte bázi $B = \{x+1, -x\}$. Skalární součin je definován vztahem
$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

- Určete matici skalárního součinu v bázi B,
- ortogonalizujte systém B,

Není třeba dopočítávat do konce, stačí zapsat příslušné vztahy.

[2 body]

4. Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace:

Matice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
reprezentuje lineární transformaci (vektory píšeme do řádků a násobíme je maticí A zprava) $\varphi : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ v bázi (e_1, e_2, e_3).
a) určete vlastní hodnoty této transformace
b) určete vlastní vektory této transformace
c) nalezněte bázi, ve které je φ reprezentována diagonální maticí, určete matici přechodu
d) pomocí trasformačního vztahu převeďte matici A do této báze. (Vyšla vám diagonální s vlastními hodnotami na diagonále?)

[3 body]