Kapitola 4

Vícerozměrná linearita aneb lineární algebra podruhé

V prvním dílu tohoto textu jsme se seznámili s elegantní dámou — lineární algebrou. Pomocí jejích pravidel jsme nejen řešili soustavy lineárních rovnic, ale také počítali s maticemi a vektory. Zatímco operace s maticemi, a koneckonců i řešení lineárních rovnic pomocí matic, bychom mohli chápat jako užitečnou ekvilibristiku s číselnými soubory, za počítáním s vektory se zdálo být přece jen něco hlubšího a závažnějšího. Vázané vektory pro nás totiž byly orientovanými úsečkami v trojrozměrném euklidovském prostoru, v němž bylo definováno měření délek a úhlů. Volné vektory pak byly množinami stejně velkých a souhlasně rovnoběžných orientovaných úseček. Jednalo se tedy o *geometrické objekty*. Každý vektor byl určen svou velikostí a směrem. Směr byl přitom zadán například pomocí úhlů mezi daným vektorem a vybranými směry, které byly předem pevně zvoleny. Mohli jsme s vektory provádět základní algebraické operace, jimiž jsou sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, podle pravidel zavedených pro (v tomto případě řádkové) matice. S vektory v trojrozměrném prostoru jsme mohli velmi pohodlně počítat jako s trojicemi čísel. Na druhé straně jsme vektory vyjadřovali jako lineární kombinace jiných vektorů, tvořících v prostoru všech vektorů *bázi*. Koeficienty lineární kombinace, která představovala zápis daného vektoru ve zvolené bázi, byly jeho *složkami* v této bázi. Při změně báze se změnily složky vektoru, vektor sám však nikoliv. Vektor je stále sám sebou, jen se v různých bázích jinak tváří — projeví se jinou trojicí čísel. Protože se však při změně báze změní složky vektoru přesně definovaným způsobem (vzpomeňte na transformační vztahy), dokážeme jej vždy rozpoznat. Tuto vlastnost, *invarianci vůči volbě báze*, mají všechny geometrické objekty. A je to právě algebra, která nám umožňuje tyto objekty reprezentovat číselnými soubory a také tak s nimi počítat. Jde-li navíc o objekty řídící se lineárními pravidly, jakými jsou například distributivní zákony, je počítání s nimi, v rámci *lineární algebry*, zvláště jednoduché. Oceníme to zejména v prostorech vyšší dimenze, než je náš běžný euklidovský prostor. Při počítání s vektory v trojrozměrném prostoru, kde umíme měřit délky a úhly a kde platí trigonometrická pravidla, bychom se bez rutinních algebraických procedur ještě třeba obešli. Už ale například ve čtyřrozměrném časoprostoru, v němž se odehrávají všechny přírodní jevy a v němž je třeba formulovat fyzikální zákony, však pro měření délek a úhlů platí jiná pravidla, než jsou obvyklá v běžném, tj. trojrozměrném euklidovském, prostoru. Například tam neplatí

čtyřrozměrná verze Pythagorovy věty. A někdy je příroda dokonce tak nepřívětivá, že nás nutí pracovat i s prostory vícerozměrnými. Například jedna z velmi účinných teorií pro výklad chování elementárních částic, teorie strun, je založena na geometrii prostoru jedenáctirozměrného. A v takových dimenzích jsme už s jakkoli vynikající geometrickou představivostí v koncích. Tehdy se vděčně obracíme k metodám algebry. V této kapitole, jak její název napovídá, půjde o algebru lineární.

4.1 Prostory s vektory

V kapitole 1 jsme pracovali s číselnými maticemi typu m/n, tj. soubory čísel uspořádaných v m řádcích a n sloupcích, a zavedli jsme pro ně operaci součtu a násobení číslem. Zjistili jsme, že pro sčítání matic a násobení matice číslem platí určitá pravidla. (Jejich souhrn je uveden v samém závěru odstavce 1.3.3.) V odstavci 1.4 jsme zase počítali s vektory. Ty měly jednou *konkrétní podobu* řádkových matic s pravidly pro jejich sčítání a násobení číslem, podruhé, v trojrozměrném prostoru, naopak *konkrétní podobu* orientovaných úseček, resp. množin, které byly orientovanými úsečkami vytvořeny, generovány. Zavedli jsme tenkrát *konkrétní způsob* sčítání vektorů a násobení vektoru číslem pomocí geometrických operací. Součet dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ znamenal, že jsme podle zcela určitého pravidla, pravidla vektorového rovnoběžníka, přiřadili uspořádané dvojici $[\vec{u}, \vec{v}]$ třetí vektor $\vec{u} + \vec{v}$, násobek vektoru a čísla byl opět vektor $\alpha\vec{u}$, který jsme přiřadili dvojici $[\alpha, \vec{u}]$ tvořené číslem a vektorem. Uvedli jsme, že pravidla pro tyto *geometrické* operace jsou shodná s pravidly pro počítání s maticemi a lze je dokázat i geometrickými postupy. Množinu volných vektorů generovaných orientovanými úsečkami spolu s uvedenými dvěma operacemi jsme nazvali *vektorovým prostorem*. Šlo tedy o zcela odlišné množiny základních objektů a zcela odlišným způsobem definované operace, pro které se však dala dokázat tatáž pravidla. Nyní se podíváme na problém definice vektorového prostoru obecněji a poněkud „opačně“. Budeme pracovat s *nosnou množinou* V, a přitom nebude podstatné, jak konkrétně vypadají její prvky. Ani je nebudeme označovat šipkami (u šipek ze zvyku zůstaneme pouze v případě orientovaných úseček v $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$, nebo vektorů s fyzikálním významem). Dále přibereme do hry množinu všech komplexních čísel $\mathbf{C}$, popřípadě jen množinu všech reálných čísel $\mathbf{R}$, a definujeme dvě operace (zobrazení):

$$V \times V \ni [a, b] \longrightarrow c \in V, \quad \mathbf{C} \times V \ni [\alpha, a] \longrightarrow d \in V. \tag{4.1}$$

Prvek c nazýváme *součet* prvků a a b a značíme jej $c = a + b$, prvek d je α-násobek prvku a a značíme $d = \alpha a$. Zobrazení uvedená ve vztazích (4.1) však nebudou moci být úplně libovolná. Budeme požadovat, aby měla určité vlastnosti, konkrétně ty, které jsou uvedeny pro matice na konci odstavce 1.3.3. Teprve pak řekneme, že množina V spolu s operacemi (4.1) splňujícími potřebné požadavky je vektorovým prostorem. Vidíme, že takto naše uvažování výrazně posuneme na abstraktní úroveň. Bude lhostejné, co jsou prvky nosné množiny, bude nepodstatné, jak konkrétně jsou definovány operace sčítání prvků a násobení prvku číslem. Důležité bude

jen to, aby abstraktní operace s abstraktními prvky splňovaly konkrétní pravidla. Než však k definici vektorového prostoru přistoupíme, všimneme si ještě některých jiných struktur s jednou nebo dvěma operacemi, které samy do oblasti lineární algebry nepatří, ale mohou být užitečné pro definici vektorového prostoru, popřípadě mají významné fyzikální aplikace.

4.1.1 Algebraické struktury s jednou operací, hlavně grupy

Při zavádění operací s vektory jsme zcela automaticky využívali toho, že umíme počítat s reálnými, popřípadě i s komplexními čísly. Skutečnost, že čísla umíme sčítat, násobit a provádět s nimi řadu dalších operací, považujeme za tak přirozenou a samozřejmou, že nad ní vůbec nepřemýšlíme. Již samotné operace sčítání a násobení vytvářejí na množině čísel velmi bohatou *algebraickou strukturu*. Tento pojem si nyní přiblížíme.

Algebraickou strukturu s jednou operací získáme, vezmeme-li v úvahu první ze zobrazení (4.1), nosnou množinu označíme tentokrát podle zvyku G:

$$G \times G \ni [a, b] \longrightarrow a + b \in G, \quad \text{nebo} \quad G \times G \ni [a, b] \longrightarrow a \cdot b \in G. \tag{4.2}$$

Pokud použijeme první možnosti označení této operace, hovoříme o operaci *sčítání* a *aditivní* struktuře, v případě druhé možnosti o operaci *násobení* a *multiplikativní struktuře*. Toto terminologické rozlišení nemá obecně žádný hlubší význam. Je spíše otázkou zvyklosti a souvisí především s algebraickou strukturou číselných množin, kterou běžně používáme, aniž o ní přemýšlíme (čísla sčítá a násobí školák, obchodník i účetní a o nějaké abstraktní struktuře nic netuší).

Zobrazení (4.2) samo o sobě, aniž na ně klademe další požadavky (podstatné je pouze to, že dvěma prvkům nosné množiny přiřadí prvek *téže množiny*), definuje nejjednodušší algebraickou strukturu s jednou operací, zvanou *grupoid*. Grupoid není pro fyzikální aplikace příliš užitečný, ale je základem pro konstrukci zajímavějších a užitečnějších struktur. Přidáme-li k definici grupoidu požadavek *asociativity* zobrazení $G \times G \ni [a, b] \to a + b \in G$ (nebo $G \times G \ni [a, b] \to a \cdot b \in G$)

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad \text{nebo} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{4.3}$$

pro libovolné prvky a, b, $c \in G$, stane se množina G spolu s operací „+“, nebo „$\cdot$“ *pologrupou*. I pologrupa je z hlediska fyzikálních aplikací poněkud chudá, další požadavek na zobrazení (4.2) z ní však již učiní strukturu v matematice i fyzice nepostradatelnou, grupu. Pologrupa, ve které existuje prvek $0_G \in G$ a současně ke každému prvku $a \in G$ existuje prvek $(-a) \in G$ tak, že platí

$$a + 0_G = 0_G + a = a, \quad a + (-a) = (-a) + a = 0_G, \tag{4.4}$$

se nazývá *aditivní grupou*. Prvek 0_G je univerzální pro celou grupu (žádný jiný s touto vlastností v grupě G není) a nazývá se *neutrální prvek grupy* neboli *nula*, prvek $(-a)$ je *opačný k prvku*

a. Pro dané a je určen jednoznačně. V případě operace násobení mají vlastnosti (4.4) tvar

$$a \cdot e_G = e_G \cdot a = a, \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e_G \tag{4.5}$$

a G se nazývá *multiplikativní grupou*. Prvek e_G je opět univerzální pro celou grupu a nazývá se *neutrální prvek grupy* neboli *jednička*, prvek a^{-1} je *inverzní k prvku* a.

Každá operace v množině G, která splňuje vztahy asociativity typu (4.3) a vztahy specifikující nulu a opačný prvek, nebo jedničku a inverzní prvek typu (4.4), nebo (4.5), představuje *grupovou operaci* bez ohledu na to, podobá-li se spíše sčítání, nebo spíše násobení, či dokonce něčemu jinému, například skládání zobrazení. Má-li grupa konečný počet prvků, nazývá se tento počet jejím *řádem*.

Příklad 4.1: Kolik nul má (aditivní) grupa?

Jak dokážeme, že má grupa právě jednu nulu? Co když předchozímu tvrzení nebudeme věřit? Můžeme se o jeho pravdivosti nějak přesvědčit? Ten, kdo mu nevěří, si může třeba představit, že grupa má nuly dvě. Označme je 0_G a $\bar{0}_G$. Vztah (4.4) platí pro libovolný prvek grupy, proto $0_G + \bar{0}_G = 0_G$ (to jsme brali $a = 0_G$ a $\bar{0}_G$ považovali za nulu) a současně $0_G + \bar{0}_G = \bar{0}_G$ (nyní zase byl prvek 0_G v roli nuly a $a = \bar{0}_G$). Je vidět, že $0_G = \bar{0}_G$. Nula je tedy skutečně jen jedna. Podobnou úvahu můžeme provést pro jedničku multiplikativní grupy. Platí tedy tvrzení:

> Neutrální prvek grupy je určen jednoznačně.

Stejně tak bychom mohli mít pochybnost o tom, že opačný prvek k danému $a \in G$ je jen jeden. Předpokládejme, že b a c jsou dva opačné prvky k a. Platí $a + b = 0_G$. Přičteme k této rovnosti c zleva, tj. $c + a + b = c$. Protože však $c + a = 0_G$, dostáváme $b = c$, a tedy:

> Opačný (resp. inverzní) prvek k libovolně zvolenému prvku grupy je určen jednoznačně.

V úvodu odstavce jsme se zmínili o tom, že množiny reálných a komplexních čísel získají zavedením běžných operací sčítání a násobení jistou algebraickou strukturu. Všimněme si jich nyní podrobněji.

Příklad 4.2: Algebraická struktura a kupecké počty

Uvažujme o množině reálných čísel $G = \mathbf{R}$ tak, jako bychom je uměli pouze sčítat. Násobení si zatím nevšímejme. Sčítání reálných čísel je zobrazením typu prvního vztahu v (4.2), které bezpochyby splňuje požadavky (4.3) i (4.4). Neutrálním prvkem $0_{\mathbf{R}}$ je „obyčejná“ nula, opačným prvkem k číslu a je číslo $-a$, položené na reálné ose symetricky k a vzhledem k nule. Množina reálných čísel s operací sčítání je tedy aditivní grupou. Pro operaci sčítání platí dokonce něco navíc — komutativní zákon

$$a + b = b + a \quad \text{pro libovolné } a, b \in \mathbf{R}. \tag{4.6}$$

Grupu s komutativním zákonem nazýváme grupou *komutativní* nebo také *abelovskou*.

> Množina reálných čísel s operací sčítání je komutativní grupou.

Nyní se místo na sčítání zaměřme na násobení reálných čísel a znovu posuďme vlastnosti grupy. Násobení reálných čísel je zobrazením typu druhého vztahu v (4.2) a splňuje požadavek asociativnosti (4.3). Dále je zřejmé,

že číslo $e_{\mathbf{R}} = 1$ („obyčejná“ jednička) vyhovuje prvnímu požadavku ve vztazích (4.5). Potíž je s požadavkem druhým. Inverzní prvek najdeme jen k nenulovým číslům. Nula inverzní prvek nemá. Tato zdánlivá drobnost je příčinou toho, že množina reálných čísel s operací násobení není grupou.

Příklad 4.3: Algebraická struktura na množině komplexních čísel

Množina $\mathbf{C}$ komplexních čísel je kartézským součinem reálných os, $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, tedy množinou uspořádaných dvojic $[a, b]$ čísel reálných. Značíme $z = [a, b]$. Reálné číslo $a = \mathrm{Re}\, z$ je *reálnou* částí komplexního čísla z a reálné číslo $b = \mathrm{Im}\, z$ částí *imaginární*. Operace sčítání a násobení komplexních čísel jsou definovány takto:

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C} \ni [[a_1, b_1], [a_2, b_2]] \longrightarrow [a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \in \mathbf{C},$$

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C} \ni [[a_1, b_1], [a_2, b_2]] \longrightarrow [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1] \in \mathbf{C}.$$

Množina komplexních čísel s operací součtu je komutativní grupou.

Jejím neutrálním prvkem je číslo $0_{\mathbf{C}} = [0, 0]$, opačným prvkem k číslu $z = [a, b]$ je $-z = [-a, -b]$. Při operaci násobení je neutrálním prvkem číslo $[1, 0]$, prvkem inverzním k číslu $z = [a, b] \neq 0_{\mathbf{C}}$ je

$$z^{-1} = \left[\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right].$$

K číslu $0_{\mathbf{C}}$ však inverzní prvek opět neexistuje. Množina komplexních čísel není grupou vzhledem k násobení.

Příklad 4.4: Struktura aditivní grupy na podmnožinách reálné osy

Některé významné podmnožiny reálné osy mají svá zavedená označení. $\mathbf{N}$ je množina přirozených čísel, $\mathbf{Z}$ množina celých čísel a $\mathbf{Q}$ množina racionálních čísel. Můžeme se zajímat o to, zda při zúžení definičního oboru operace sčítání na $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, popřípadě $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, budou tyto množiny stále ještě grupami. Ihned vidíme, že množina přirozených čísel grupou nebude, neboť neobsahuje nulu ani záporná čísla, která jsou v grupě $\mathbf{R}$ opačnými prvky k číslům kladným. Tímto nedostatkem netrpí množiny celých a racionálních čísel, které tedy budou grupami.

O podmnožině $H \subset G$ grupy G s operací sčítání nebo násobení zúženou na H, která je sama grupou, hovoříme jako o *podgrupě* grupy G. Například množina reálných čísel zapsaných ve tvaru $z = [a, 0]$ se sčítáním je podgrupou množiny komplexních čísel.

Koho grupy nebaví a chce se rychle prokousat k vektorovým prostorům, které jsou koneckonců hlavní náplní našeho příběhu o lineární algebře, může zbytek tohoto odstavce přeskočit. Ale byla by to škoda, grupy jsou opravdu zajímavé.

Příklad 4.5: Grupy některých číselných objektů

Komutativní grupou je například množina číselných matic typu m/n (osazených reálnými nebo komplexními čísly) s obvyklým sčítáním matic. Není divu — sčítání matic se děje po jednotlivých prvcích, které jsou čísly. Komutativní grupou je i množina všech funkcí reálné proměnné $\mathcal{F}(\mathbf{R})$, v níž je sčítání definováno „bod po bodu“:

$$\mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \ni [f, g] \longrightarrow f + g \in \mathcal{F}(\mathbf{R}), \quad \text{kde} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

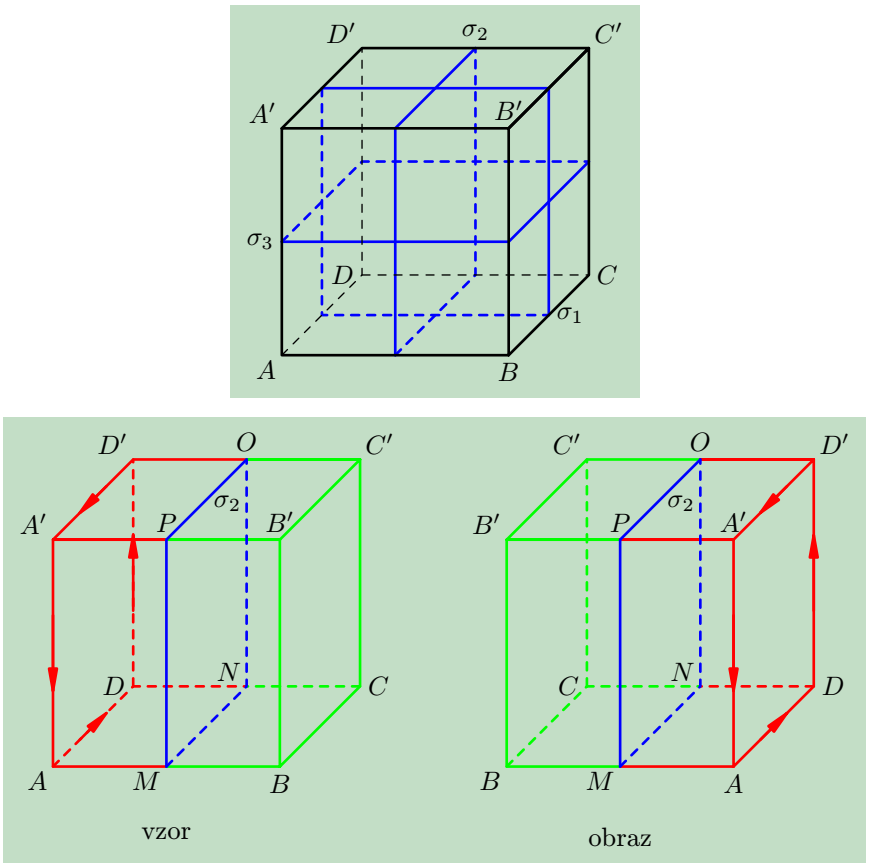
pro libovolné $x \in \mathbf{R}$. Ve výsledku jde totiž opět jen o počítání s čísly. Je zřejmé, že proměnná by mohla být i komplexní. Na množině všech reálných funkcí jedné reálné proměnné s definičním oborem $\mathbf{R}$ máme z kapitoly 2 definovanou operaci skládání funkcí. Tato operace je asociativní, funkce $f(x) = x$ (identita) hraje roli neutrálního prvku. Radost nám kazí pouze ty funkce, ke kterým neexistuje funkce inverzní s definičním oborem $\mathbf{R}$, tj. funkce, které nejsou prosté nebo jejich oborem hodnot není celé $\mathbf{R}$. Vezmeme-li v úvahu pouze podmnožinu prostých funkcí s oborem hodnot $\mathbf{R}$, vytváří na ní operace skládání strukturu (nekomutativní) grupy.

Posuďme nyní algebraickou strukturu množiny čtvercových matic typu n/n s operací maticového násobení. Operace je zobrazením, které má tvar druhého vztahu v (4.2), asociativní zákon (4.3) rovněž platí. Jednotková matice hraje roli prvku e_G, avšak inverzní prvek existuje pouze k regulárním maticím. Množina matic typu n/n s operací maticového násobení tedy není grupou. Pokud bychom se však omezili pouze na podmnožinu matic regulárních, potíž s inverzním prvkem odpadne.

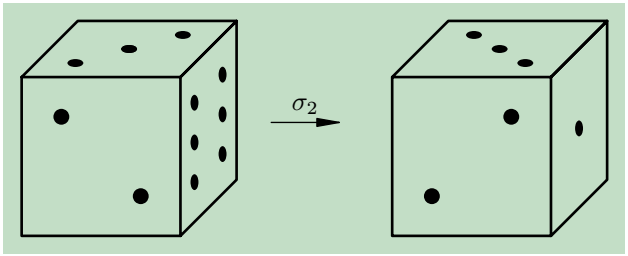
Množina regulárních čtvercových matic typu n/n s operací násobení je (nekomutativní) grupou.

Tato grupa, ke které se později ještě vrátíme, je velmi důležitá ve fyzikálních teoriích.

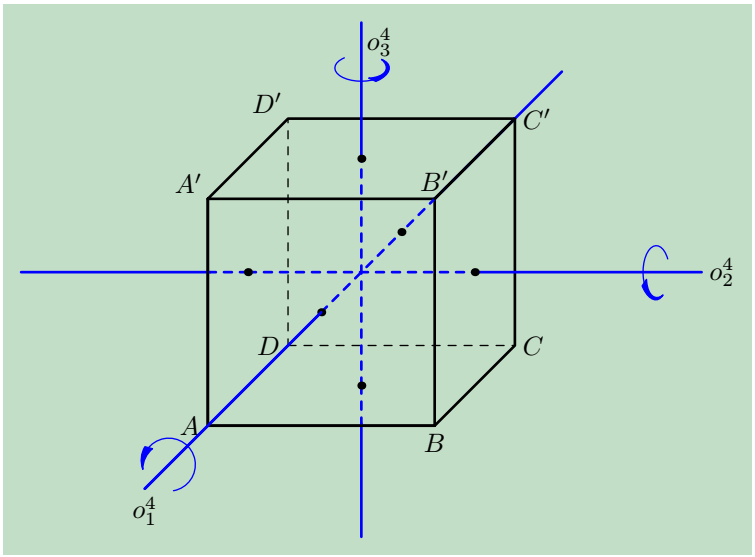
Příklad 4.6: Grupy nemusí být tvořeny jen čísly



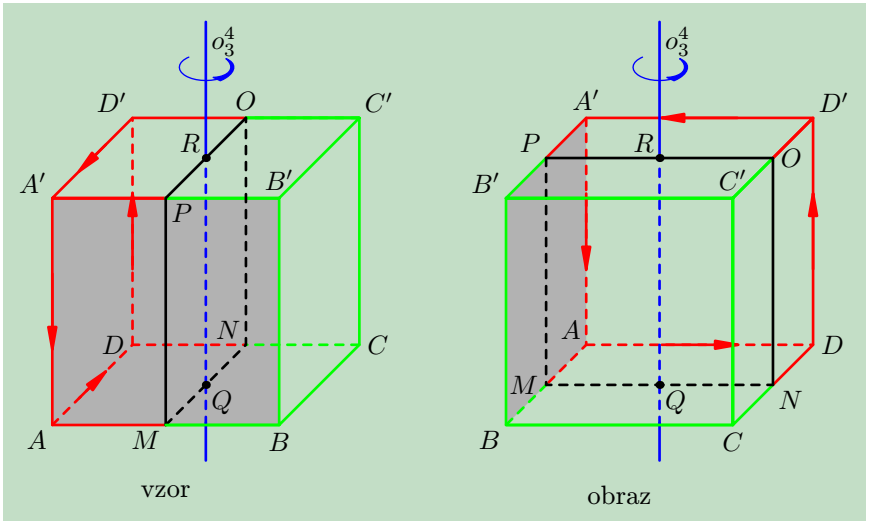
Obr. 4.1 Prvky symetrie krychle — zrcadlení.



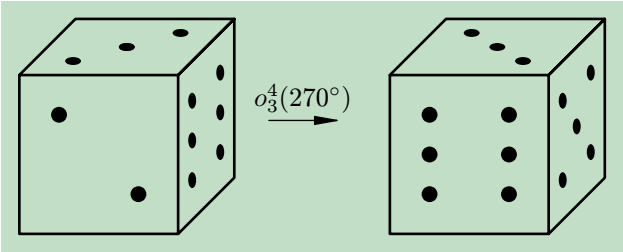
Obr. 4.2 Prvky symetrie krychle — zrcadlení.



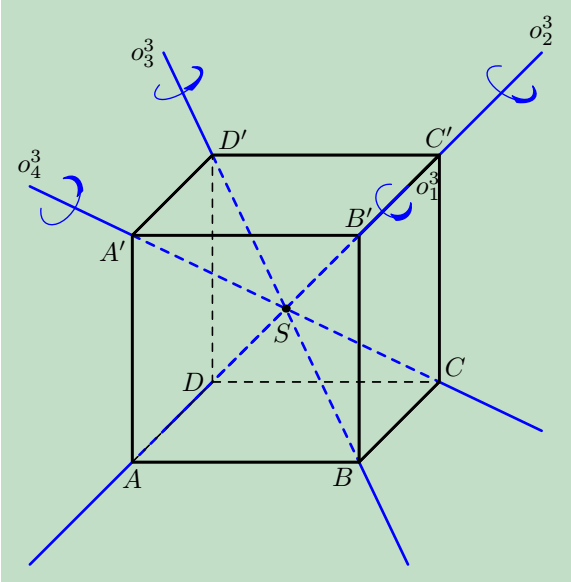
Obr. 4.3 Prvky symetrie krychle — otáčení.



Obr. 4.4 Prvky symetrie krychle — otáčení.



Obr. 4.5 Prvky symetrie krychle — otáčení.



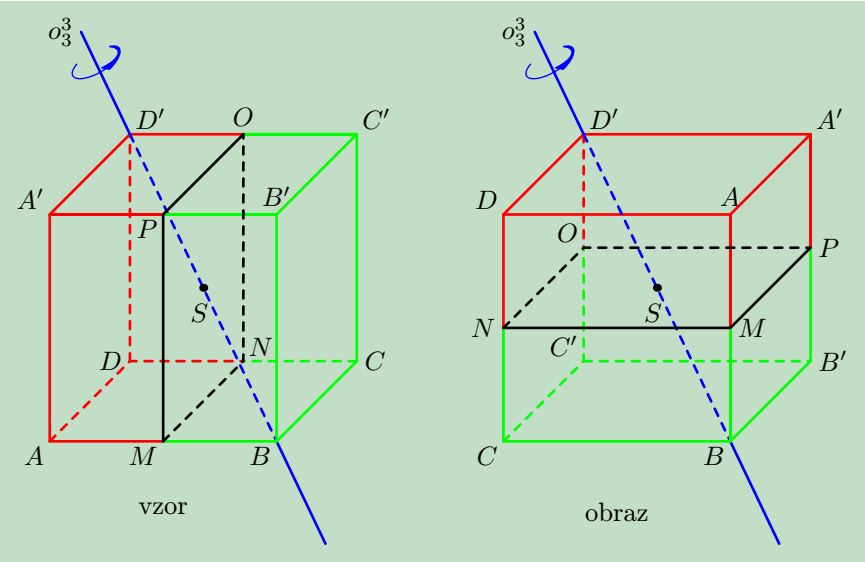
Obr. 4.6 Prvky symetrie krychle — otáčení.

Operace sčítání nebo násobení si umíme velmi dobře představit, provádíme-li je standardním způsobem s čísly. Definice algebraických struktur jsou však obecné a zahrnují i jiné možnosti. Představme si například krychli, se kterou provádíme *operace symetrie*. Jsou to všechna taková přemístění krychle z počáteční do koncové polohy, která „se nepoznají“. Znamená to, že krychle vypadá v koncové poloze stejně jako ve výchozí. Pokud bychom při přemisťování zavřeli oči, nepoznali bychom, že někdo mezitím s krychlí hýbal. Přemístění jsou několikerých typů a definují *prvky symetrie* krychle. Abychom si je mohli názorně ukázat na obrázcích, označíme vrcholy, popřípadě jiné důležité body krychle písmeny. V některých ukázkách také použijeme hrací kostku. Prvky symetrie krychle můžeme roztřídit do následujících typů:

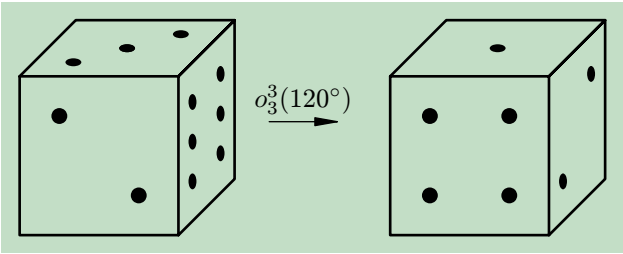
- zrcadlení vzhledem k rovině symetrie — existuje rovina, jejíž body zůstávají při přemístění v klidu,
- rotace kolem osy symetrie — existuje přímka (osa), jejíž body zůstávají při přemístění v klidu,
- středová inverze — existuje právě jeden bod (střed inverze), který při přemístění zůstává v klidu,
- identita — přemístění do téže polohy, v klidu jsou všechny body krychle.

Jednotlivé typy prvků symetrie jsou znázorněny na obrázcích 4.1 až 4.15. Na prvním z obrázků 4.1 jsou vyznačeny tři roviny symetrie krychle, σ_1, σ_2 a σ_3. Zkuste najít a nakreslit další. Druhý z obrázků 4.1 znázorňuje situaci při zrcadlení vzhledem k rovině σ_2. Pro klasickou herní kostku pak operaci zrcadlení ilustruje obrázek 4.2.

Kolik existuje os symetrie krychle? Zkuste procvičit svou prostorovou představivost a zamyslet se nad touto



Obr. 4.7 Prvky symetrie krychle — otáčení.



Obr. 4.8 Prvky symetrie krychle — otáčení.

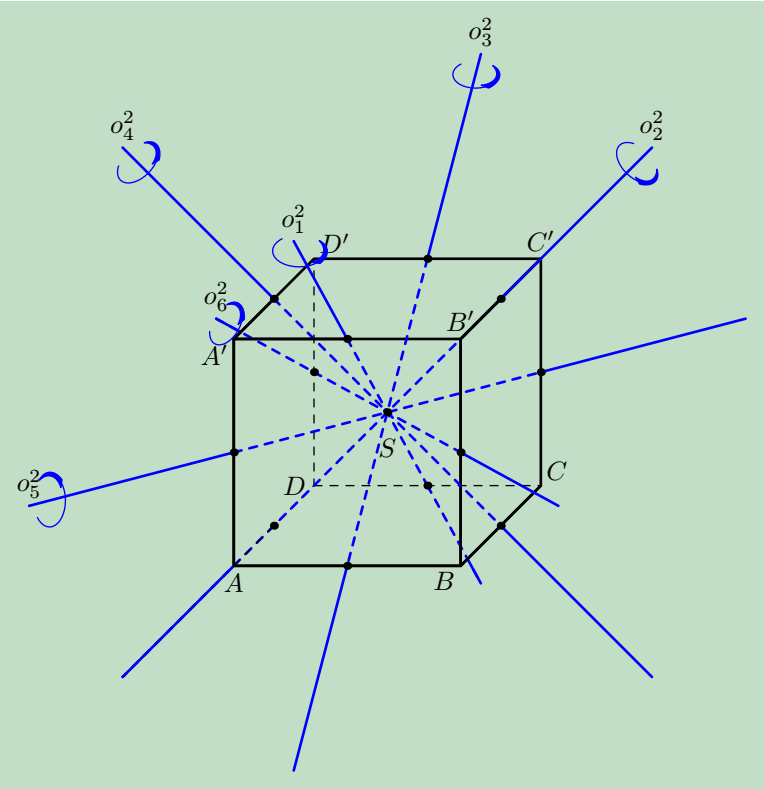
otázkou sami ještě dříve, než se podíváte na následující obrázky. Vezměte si k tomu třeba libovolnou hrací kostku. (Pozor, rozmístění teček na vaší kostce může být jiné, než na té naší, podle které jsou nakresleny obrázky.) Na obrázku 4.3 jsou vyznačeny tři osy symetrie o_1^4, o_2^4, o_3^4. Prvkem symetrie je otočení kolem kterékoli z nich o jedenkrát, dvakrát, nebo třikrát 90°, při čtvrtém otočení o 90° přejde krychle do původní polohy. Osy se proto nazývají čtyřčetné (vyznačeno horním indexem). Obrázek 4.4 znázorňuje konkrétní situaci při otočení o úhel 270° kolem osy o_3^4, zatímco obrázek 4.5 ukazuje toto otočení pro klasickou herní kostku.

Další čtyři osy symetrie odpovídají tělesovým úhlopříčkám krychle a jsou znázorněny na obrázku 4.6. Jsou označeny symboly o_1^3, o_2^3, o_3^3 a o_4^3 a nazývají se trojčetné (víte proč?).

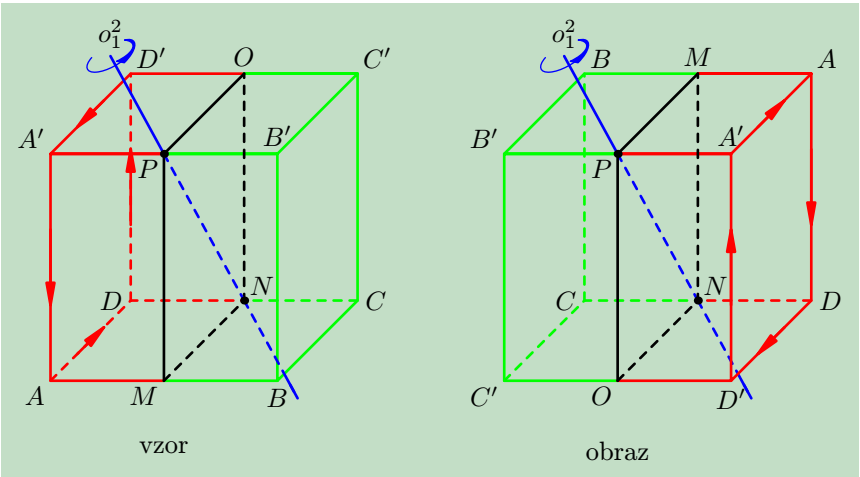
Obrázky 4.7 a 4.8 odpovídají konkrétnímu otočení kolem osy o_3^3 o úhel 120°.

Dalších šest os symetrie najdeme v obrázku 4.9. Každá z nich vždy prochází bodem S (průsečíkem tělesových úhlopříček) a spojuje středy protilehlých hran. Tyto dvojčetné osy jsou označeny symboly o_1^2, o_2^2, o_3^2, o_4^2, o_5^2, o_6^2. Konkrétní příklad otočení kolem osy o_1^2 o úhel 180° ilustrují obrázky 4.10 a 4.11. Obrázky 4.12 a 4.13 znázorňují středovou inverzi a obrázky 4.14 a 4.15 identitu.

Přemístění můžeme *skládat*, tzn. postupně provádět. Polohy, ve kterých (neoznačená) krychle vypadá stejně, nazvěme ekvivalentní. Označme A určitou polohu krychle a $\mathcal{P}_A$ množinu všech přemístění krychle mezi kteroukoli dvojicí poloh ekvivalentních poloze A. Operaci *skládání* přemístění definujeme takto: Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_A$ je přemístění krychle z polohy B do polohy C a $\psi \in \mathcal{P}_A$ její přemístění z polohy C do polohy D. Označme jako $\psi \circ \varphi$ přemístění,



Obr. 4.9 Prvky symetrie krychle — otáčení.

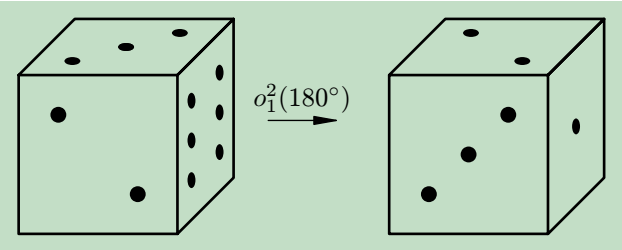


Obr. 4.10 Prvky symetrie krychle — otáčení.

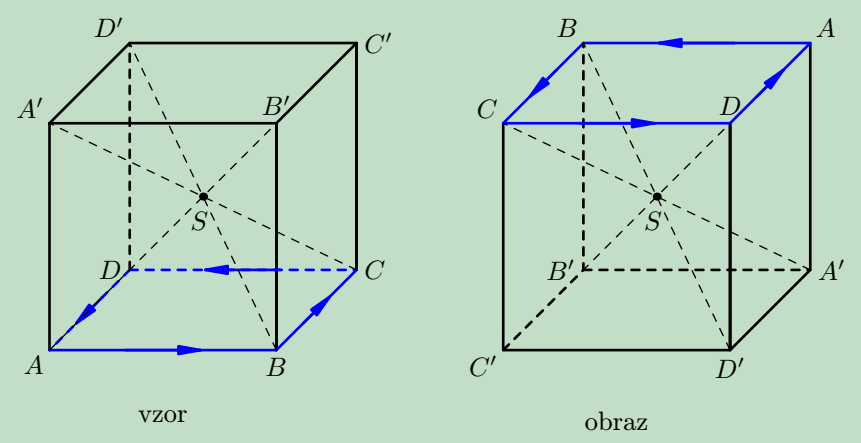
které vznikne postupným provedením nejprve φ a potom ψ. Vzniká tak zobrazení

$$\mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_A \ni [\varphi, \psi] \longrightarrow \psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_A,$$

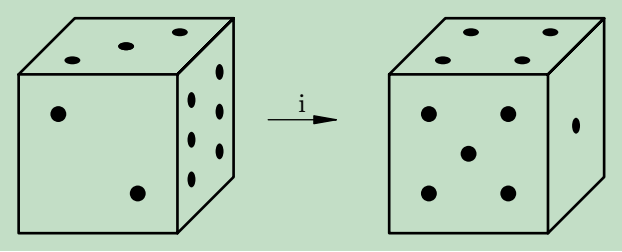
které je typu (4.2). Asociativní zákon (4.3) je splněn, identita (přesunutí do téže polohy) je neutrálním prvkem,



Obr. 4.11 Prvky symetrie krychle — otáčení.

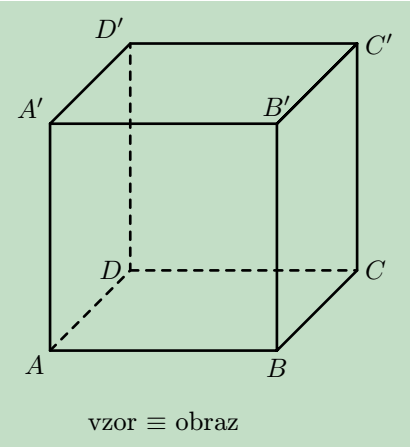


Obr. 4.12 Prvky symetrie krychle — středová inverze.

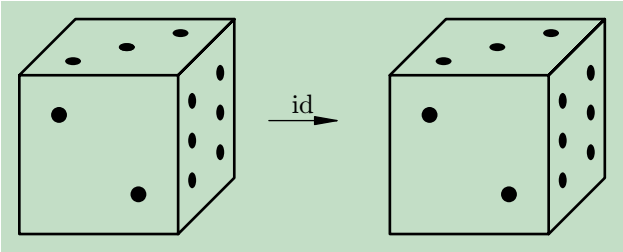


Obr. 4.13 Prvky symetrie krychle — středová inverze.

zpětné přemístění z polohy C do B je inverzním prvkem k přemístění φ. Množina $\mathcal{P}_A$ s operací skládání přemístění je grupou. Není však grupou komutativní, jak ukazují následující obrázky (4.16, 4.17 a 4.18). Tato grupa má velmi zajímavé vlastnosti. Na rozdíl od všech předchozích příkladů grup je počet jejích prvků konečný. Navíc, každý z prvků symetrie krychle definuje jistou podgrupu grupy $\mathcal{P}_A$. Vezměme například trojčetnou osu symetrie o_3^3 zadanou tělesovou úhlopříčkou AC' na obrázcích 4.6 a 4.7. Přemístění, která s touto osou souvisejí, jsou všechny rotace kolem ní o úhel, který je celistvým násobkem úhlu 120°. Patří sem i identita, představíme-li si ji jako rotaci o nulový úhel. Všechna přemístění odpovídající těmto rotacím tvoří podgrupu grupy $\mathcal{P}_A$. Všimněme si, že každý prvek této podgrupy můžeme dostat pomocí skládání jediného prvku sama se sebou. Tímto jediným prvkem je rotace kolem osy o_3^3 o úhel 120°. Grupa s takovou vlastností se nazývá *cyklická*. Zkuste zjistit, které další cyklické podgrupy obsahuje grupa operací symetrie krychle.



Obr. 4.14 Prvky symetrie krychle — identita.



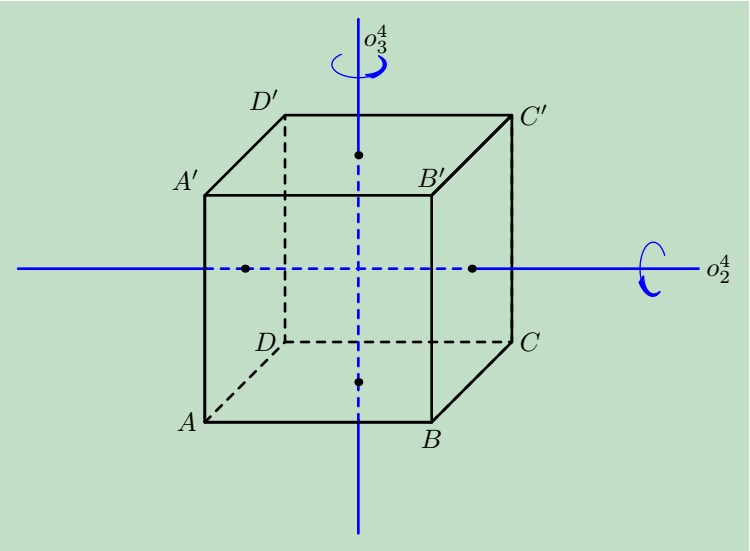
Obr. 4.15 Prvky symetrie krychle — identita.

Pozn.: Obecně se grupa G nazývá *cyklická*, jestliže je tvaru

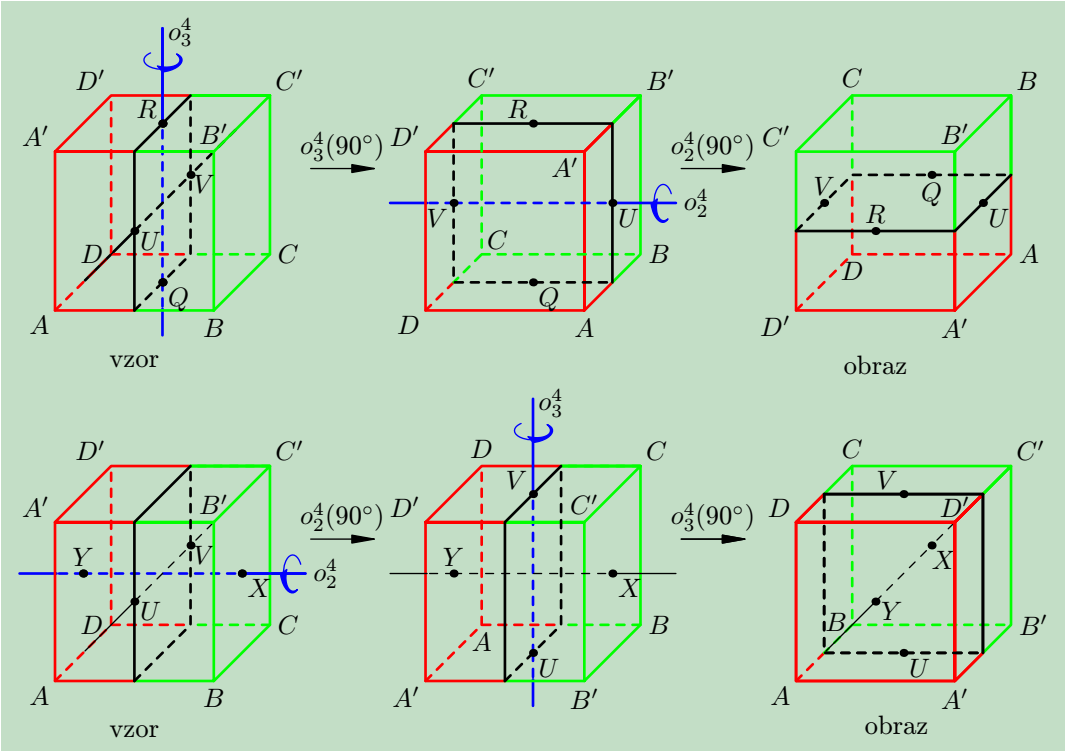
$$G = \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n = e_G\}.$$

Číslo n je rovno řádu grupy. Cyklické grupy se významně uplatní například v krystalografii.

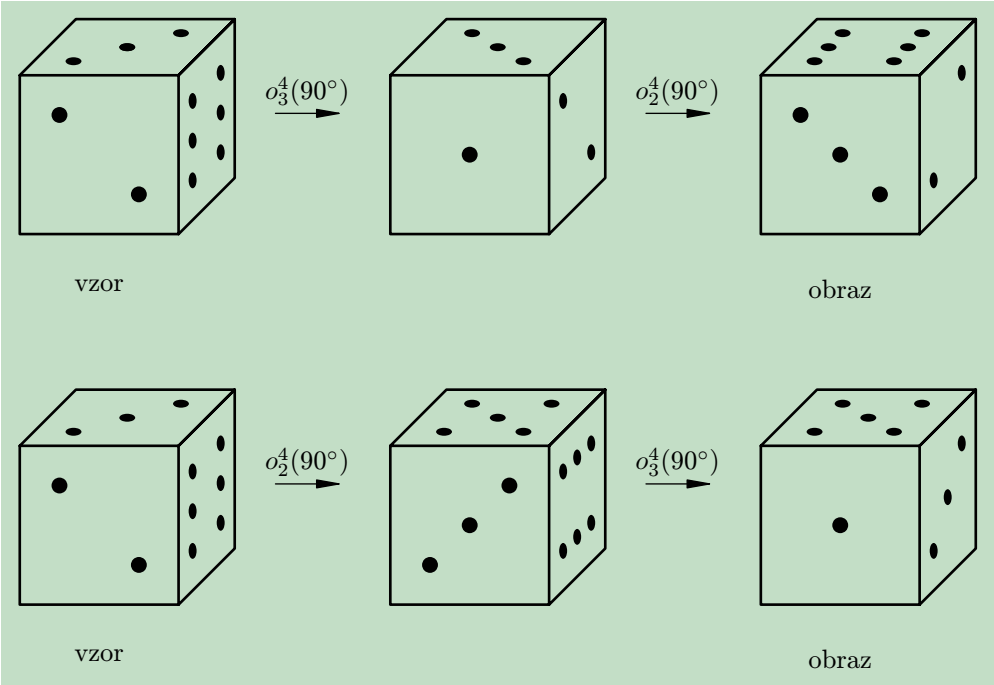
A uvědomte si ještě, o co zajímavější, ale složitější, by naše úvahy byly, kdybychom se zajímali o grupu operací symetrie Rubikovy kostky!



Obr. 4.16 Pořadí přemístění krychle nelze zaměňovat — k příkladu 4.6.



Obr. 4.17 Pořadí přemístění krychle nelze zaměňovat — k příkladu 4.6.



Obr. 4.18 Pořadí přemístění krychle nelze zaměňovat — k příkladu 4.6.

Příklad 4.7: Grupa permutací

S permutacemi jsme se setkali v kapitole 3 v souvislosti s kombinatorikou a pravděpodobností. Neprováděli jsme však s nimi žádné operace. To teď napravíme. Permutací n prvků očíslovaných známkami 1 až n jsme rozuměli jakékoli jejich pořadí. Například permutace indexů (1, 2, 3) mohla mít tvar (2, 1, 3), nebo (1, 3, 2), apod. Celkem je permutací $n!$, včetně té základní $(1, 2, \ldots, n)$. Představme si nyní permutaci jako *prosté* zobrazení σ, které každému z prvků množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ přiřadí prvek téže množiny. Předpoklad, že zobrazení je prosté, tj. přiřazuje dvěma různým vzorům dva různé obrazy, je podstatný. Takových zobrazení existuje $n!$ a snadno ukážeme, že společně s operací skládání tvoří grupu. Tato grupa je konečná, její řád je $n!$. Její prvky napíšeme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \text{například} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skládání permutací σ a ν pak můžeme interpretovat jako standardní skládání (kompozici) zobrazení, zavedené v kapitole 2, tj. $\nu \circ \sigma$. Praktická ukázka:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že permutace σ přiřazuje číslu 1 číslo 4, permutace ν, prováděná následně, pak přiřadí číslu $4 = \sigma(1)$ hodnotu 3. Přeskládáme-li první řádek zápisu permutace ν tak, aby vzniklo pořadí druhého řádku permutace σ

a současně stejným způsobem přerovnáváme druhý řádek permutace ν, vznikne druhý řádek složené permutace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nu \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Protože permutace jsou v naší nové interpretaci prostými zobrazeními definovanými na konečné množině přirozených čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ a jejich oborem hodnot je rovněž tato množina, můžeme použít výsledek příkladu 4.5 týkající se skládání zobrazení a konstatovat, že množina permutací s operací jejich skládání je nekomutativní grupou. Inverzní permutace k permutaci σ je

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zkuste najít složené permutace $\sigma \circ \sigma^{-1}$ a $\sigma^{-1} \circ \sigma$. Měli byste v obou případech dostat základní (identickou) permutaci.

Příklad 4.8: Grupové panoptikum

V geometrických a fyzikálních aplikacích mají značný význam grupy, jejichž počet prvků není konečný, a dokonce ani spočetný. Jsou to zejména grupy, jejichž prvky popisují transformace prostoru (obecně n-rozměrného) a jsou tvořeny reálnými čísly. Mají proto stejnou mohutnost jako reálná osa, tedy nespočetně mnoho prvků. Jistě si vzpomenete, jak jsme v kapitole 1 popisovali přechod mezi dvěma bázemi v trojrozměrném prostoru vektorů. Přechod od báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ k bázi $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$ byl zadán reálnou regulární maticí přechodu T, jejímiž prvky byly koeficienty potřebné pro vyjádření vektorů čárkované báze jako lineárních kombinací vektorů báze nečárkované. Matice „dvojitého“ přechodu od výchozí báze přes „mezibázi“ k výsledné bázi je součinem matic popisujících jednotlivé kroky tohoto přechodu. Víme však, že množina regulárních matic typu n/n opatřená operací násobení je grupou. Tato grupa je základem pro další, speciální grupy transformací prostoru, které jsou jejími podgrupami.

Grupa regulárních matic typu n/n s operací násobení se nazývá *obecná lineární grupa* a značí se $\mathrm{GL}(\mathbf{R}, n)$. (Označení GL odpovídá anglické terminologii, General Linear.)

Jejími důležitými podgrupami jsou

- podgrupa $\mathrm{SL}(\mathbf{R}, n)$ (Special Linear) všech matic typu n/n s jednotkovým determinantem, zvaných též *unimodulární*,
- podgrupa $\mathrm{O}(\mathbf{R}, n)$ (Orthogonal) všech ortogonálních matic n/n, tj. takových, pro něž je $A^{-1} = A^T$ (tato vlastnost zajišťuje, že $\det A = \pm 1$),
- podgrupa $\mathrm{SO}(\mathbf{R}, n)$ (Special Orthogonal) všech ortogonálních matic s jednotkovým determinantem, tj. průnik podgrup $\mathrm{SL}(\mathbf{R}, n)$ a $\mathrm{O}(\mathbf{R}, n)$.

Obdobně můžeme definovat množinu $\mathrm{GL}(\mathbf{C}, n)$ regulárních matic typu n/n tvořených komplexními čísly. Soubor jejích významných podgrup samozřejmě obsahuje podgrupy $\mathrm{SL}(\mathbf{C}, n)$ unimodulárních komplexních matic, $\mathrm{O}(\mathbf{C}, n)$ ortogonálních komplexních matic, $\mathrm{SO}(\mathbf{C}, n)$ komplexních ortogonálních unimodulárních matic, ale také další významné podgrupy, které nad $\mathbf{R}$ nebyly definovány:

- podgrupa $\mathrm{U}(\mathbf{C}, n)$ všech unitárních matic typu n/n, tj. takových, pro které je $A^{-1} = A^{T*}$, tato vlastnost zaručuje, že determinant takové matice je roven komplexní jednotce, $\det A = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = \exp \mathrm{i}\alpha$,
- podgrupa $\mathrm{SU}(\mathbf{C}, n)$ všech unitárních unimodulárních matic typu n/n.

Nakonec si ještě všimněme toho, jak se dají grupy navzájem zobrazovat. Řeknete si, nic na tom není. Jednoduše přiřadíme každému prvku jedné grupy nějaký prvek jiné grupy. Protože však v obou grupách, které jsou ve hře, je definována grupová operace, neměla by smysl taková přiřazení, která by v zavedeném počítání s prvky v grupě dělala nepořádek. Budeme hledat jen taková zobrazení, která „přenášejí“ i grupovou operaci. Přesněji, součtu dvou libovolných prvků grupy vzorů H přiřadí součet jejich obrazů v grupě obrazů G.

Každé takové zobrazení

$$h : H \ni a \longrightarrow h(a) \in G, \quad \text{s vlastností} \quad h(a+b) = h(a) + h(b) \tag{4.7}$$

pro libovolné prvky $a, b \in H$ se nazývá *homomorfismus* grup.

(Podotkněme, že znak „+“ v zápisu $a + b$, tj. operace sčítání v grupě vzorů, může značit úplně odlišnou konkrétní operaci než týž symbol ve výrazu $h(a) + h(b)$, vyjadřující sčítání v grupě obrazů.) Homomorfismus, který je zobrazením *na*, tj. při zobrazení všech vzorů se „vyčerpají“ všechny prvky grupy G, se nazývá *epimorfismus*, je-li homomorfismus prostým zobrazením, jedná se o *monomorfismus*. Tímto názvoslovím se však nebudeme zatěžovat. Pamatujme si pouze, že:

Homomorfismus, který je prostým zobrazením grupy H na grupu G se nazývá *izomorfismus*.

Grupy, mezi kterými lze definovat izomorfismus, jsou z hlediska algebry považovány za stejné. Je totiž úplně jedno, se kterou z nich počítáme, neboť pomocí izomorfismu můžeme jasně definovaným a jednoznačným způsobem kdykoli přecházet od jedné k druhé.

Existence homomorfismu vytváří v grupě vzorů i v grupě obrazů důležité podmnožiny. Jsou jimi

$$\operatorname{Ker} h = \{a \in H | h(a) = 0_G\}, \quad \operatorname{Im} h = \{h(a) \in G | a \in H\}.$$

První z nich, zvaná *jádro* homomorfismu h, je množinou všech vzorů, které se zobrazily na neutrální prvek grupy G. Druhá z obou množin, *obraz* homomorfismu h, je množinou všech obrazů, které vzniknou ze všech prvků grupy H.

Dokážete se přesvědčit o platnosti následujícího důležitého tvrzení?

Jádro libovolného homomorfismu $h : H \to G$ je podgrupou v grupě H, obraz je podgrupou v grupě G.

Stačí použít toho, že homomorfismus „přenáší“ grupovou operaci.

Příklad 4.9: V žádném textu o grupách nesmějí chybět zbytkové třídy

V příkladu 4.4 jsme viděli, že množina přirozených čísel s operací sčítání není grupou. Můžeme ji však použít k definici určitých speciálních grup, které nám budou možná připadat poněkud zvláštní. Jejich prvky totiž nebudou čísla, nýbrž množiny čísel. Jak bychom ale mohli definovat sčítání dvou množin čísel? Například takto: Zvolme libovolné přirozené číslo n. Budeme-li kterékoli přirozené číslo q dělit dělitelem n, dostaneme částečný podíl p a zbytek r, tj. $q = pn + r$. Zbytek může nabývat hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Takto můžeme přirozená čísla třídit do skupin podle toho, jaký zbytek dávají při dělení číslem n. Tyto skupiny se nazývají *zbytkové třídy modulo n*. Například pro $n = 3$ připadají v úvahu zbytky 0, 1, 2. Dostáváme tedy třídy Z_0, Z_1 a Z_2. Třída Z_0 obsahuje všechna přirozená čísla, která jsou dělitelná třemi, tj. $Z_0 = \{3, 6, 9, \ldots, 3k, \ldots\}$, třídě Z_1 náleží čísla, při jejichž dělení třemi je zbytek 1, tj. $Z_1 = \{1, 4, 7, \ldots, 3k-2, \ldots\}$, zbývající přirozená čísla dávají po dělení třemi zbytek 2 a náleží třídě $Z_2 = \{2, 5, 8, \ldots, 3k-1, \ldots\}$. Číslo k nabývá hodnot $1, 2, 3, \ldots$ Všimněme si nyní možná zajímavé, ale samozřejmé věci: Sečteme-li kterékoli dva prvky třídy Z_0, dostaneme opět prvek této třídy. Sečtením prvku třídy Z_0 s prvkem třídy Z_1 dostaneme prvek třídy Z_1, sečtením dvou prvků třídy Z_1 dostaneme prvek třídy Z_2, a tak bychom mohli pokračovat. Výsledek takového sčítání nezávisí na konkrétních prvcích, ale pouze na jejich příslušnosti k třídám. Každý prvek tedy zastupuje „svou“ třídu rovnocenným způsobem, a proto se nazývá jejím *reprezentantem*. Výsledky shrnuje následující tabulka.

$+$	Z_0	Z_1	Z_2
Z_0	Z_0	Z_1	Z_2
Z_1	Z_1	Z_2	Z_0
Z_2	Z_2	Z_0	Z_1

Tabulka definuje operaci pro třídy. Každé uspořádané dvojici tříd totiž přiřazuje třídu. Množina tříd s takto zavedenou operací splňuje požadavky grupy. Neutrálním prvkem je třída Z_0. Opačnými prvky k třídám Z_0, Z_1, Z_2 jsou postupně třídy Z_0, Z_2, Z_1. Tato grupa je dokonce komutativní. Obdobně se definuje grupová operace pro zbytkové třídy modulo n. Jejich počet je n, můžeme je označit Z_0, Z_1, …, Z_{n-1}. Platí

$$Z_m + Z_\ell = Z_{m+\ell} \text{ pro } m+\ell < n, \quad Z_m + Z_\ell = Z_{m+\ell-n} \text{ pro } m+\ell \geq n.$$

Neutrálním prvkem je třída Z_0, opačným prvkem k třídě Z_m je třída Z_{n-m}.

Od příkladu počítání s třídami je jen krok k důležité proceduře, které u grup často využíváme. Jedná se o *faktorizaci* podle tzv. *normální* podgrupy. Nechť G je grupa. Grupovou operaci označme obecně $\circ$ (zahrnuje veškeré možnosti včetně sčítání a násobení). Zvolme nejprve libovolnou podgrupu $H \subset G$ grupy G. Pro každý prvek $g \in G$ utvořme množiny $L_g = \{f \in G | f = g \circ h, h \in H\}$ a $P_g = \{f \in G | f = h \circ g, h \in H\}$. Tyto množiny se nazývají *levá a pravá třída rozkladu grupy G podle podgrupy H příslušná prvku g*. (Prozkoumejte množiny L_g a P_g pro případ, že $g \in H$.) Jestliže pro každé $g \in G$ platí $L_g = P_g$, nazývá se podgrupa H *normální*. Pomocí ní jsou teď roztříděny prvky do tříd tak, že prvky g, g' náleží téže třídě $L_g = P_g$ právě tehdy, když platí $g' = h \circ g$ pro nějaký prvek $h \in H$ (samozřejmě také platí, že $g' = g \circ h'$ pro nějaký prvek $h' \in H$). Definujme grupovou operaci pro třídy: $L_{g_2} \circ L_{g_1} = L_{g_2 \circ g_1}$. Ukážeme, že taková definice skutečně dává smysl. Zvolme libovolný prvek $a \in L_{g_1}$ a libovolný prvek $b \in L_{g_2}$. Pak existují prvky h_1, $h_2 \in H$ tak, že platí $a = h_1 \circ g_1$, $b = g_2 \circ h_2$. Pak

$$b \circ a = (g_2 \circ h_2) \circ (h_1 \circ g_1) = g_2 \circ (h_2 \circ h_1) \circ g_1 = g_2 \circ (h' \circ g_1) = g_2 \circ (g_1 \circ h) = (g_2 \circ g_1) \circ h \in L_{g_2 \circ g_1}$$

pro jistý prvek $h \in H$. (Zdůvodněte jednotlivé kroky předchozí úpravy včetně významu prvku h'. Podstatná je rovnost $L_g = P_g$ pro libovolné g.) Podgrupa H hraje roli neutrálního prvku, inverzním prvkem k třídě L_g je třída $L_{g^{-1}}$. Grupa tříd se nazývá *faktorovou grupou* grupy G podle normální podgrupy H a značí se G/H. Zdůrazněme, že kdyby podgrupa H nebyla normální, proceduru faktorizace bychom nemohli provést. Je-li grupa G komutativní, máme vyhráno, neboť každá její podgrupa je normální.

Příklad 4.10: Příklad faktorizace

S grupou, jejímiž prvky byly třídy, jsme se již seznámili v příkladu 4.9. Nešlo však o faktorizaci grupy, neboť výchozí množina, jejíž prvky jsme „třídili“, nebyla grupou. Stačilo by však vzít místo přirozených čísel $\mathbf{N}$ čísla celá $\mathbf{Z}$, ta už grupu tvoří. Je mezi nimi nula i záporná čísla, z nichž každé je opačným prvkem právě k jednomu číslu kladnému. Do téže zbytkové třídy po dělení celým číslem n, pro jednoduchost kladným, zařadíme všechna celá čísla se stejným zbytkem. Aby bylo rozhodování jednoznačné, definujeme částečné dělení tak, aby zbytek byl vždy nezáporný. Například číslo -5 budeme dělit třemi podle vztahu $-5 = 3\cdot(-2)+1$, nikoli $-5 = 3\cdot(-1)+(-2)$. Číslo -5 tedy při dělení trojkou padne do třídy Z_1. Třída $H = Z_0$ je podgrupou v grupě $\mathbf{Z}$. Protože číselné grupy jsou komutativní, jedná se automaticky o podgrupu normální. Množina $\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}$ s operací sčítání tříd je faktorovou grupou grupy $\mathbf{Z}$ podle normální podgrupy Z_0. Všimněme si ještě jedné zajímavé věci. Chceme-li určit součet třeba tříd Z_m a Z_ℓ, nemusíme si vůbec vzpomínat, jaký je na to vzorec, i když jsme si jej uváděli. Ani nemusíme sestavovat tabulku podobnou příkladu 4.9. Stačí vzít kterýkoli prvek třídy Z_m, kterýkoli prvek třídy Z_ℓ, sečíst je a zjistit zbytek po dělení číslem n. Vezměme třeba dělení sedmi a třídy Z_2 a Z_6. Do první z nich jistě patří dvojka, do druhé šestka (je to vidět v indexu označujícím třídy). Platí $2+6 = 6+2 = 7\cdot1+1$. Číslo 8 patří do třídy Z_1. Je tedy $Z_2 + Z_6 = Z_6 + Z_2 = Z_1$. Stejnou službu udělají prvky 9 a 48 nebo -12 a 20, atd. Třída tedy může být při výpočtech zastoupena kterýmkoli ze svých prvků, svým *reprezentantem*.

Hrátky se zbytkovými třídami jsou sice zábavné, ale pro fyzika málo praktické. A existuje vůbec nějaký praktický příklad faktorizace?

Příklad 4.11: Ještě jedna faktorizace — operace symetrie krychlové mřížky

Atomy krystalických látek jsou velmi často uspořádány v krychlové mřížce. Nemusí jít jen o diamant, také železo, měď, hliník a řada dalších docela obyčejných látek mají krychlovou mřížku. Tato mřížka není sice obsazena atomy jen v rozích krychlí, ale třeba i v jejich středech, nebo ve středech stěn, v našem příkladu to však nebude mít vliv. Malý kousíček kovu obsahuje obrovské množství malinkatých krychliček. Vzdálenost sousedních rohů v kovových krystalech je kolem $5\cdot10^{-10}$ m, do jednoho krychlového mikrometru se jich vejde skoro deset miliard. Představme si tedy, že by takový krystal byl nekonečný a zkusme popsat všechna přemístění krystalu, která jej převádějí do ekvivalentní polohy, tj. do takové, která se od té výchozí neliší (zavřeme-li oči, přesun nepoznáme). Kromě operací symetrie krychle, které jsme popsali v příkladu 4.6, můžeme mřížku ještě posouvat ve směru hran o libovolný vektor $\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \alpha^3\vec{a}_3$, kde $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ jsou vektory určující hrany základní krychle, čísla α^1, α^2, α^3 jsou celá. Tyto translace můžeme skládat mezi sebou a také s operacemi symetrie z příkladu 4.6. Množina všech operací symetrie je grupou G a podmnožina translací její normální podgrupou H. (Operace z příkladu 4.6 sice spolu nekomutují, takže celá velká grupa není komutativní, komutují však s translacemi, které také komutují navzájem.) Faktorizovat grupu G budeme tak, že do stejné třídy zařadíme všechny operace, které

se liší pouze libovolnou translací. Vidíme, že každá třída bude odpovídat právě jedné operaci symetrie z příkladu 4.6, která se tak může stát reprezentantem třídy.

Příklad 4.12: Počítání s primitivními funkcemi — také praktický příklad faktorizace

Že je nesmysl plést faktorizaci do počítání s primitivními funkcemi? Naopak, některá pravidla pro primitivní funkce bez ní ani nedokážeme napsat úplně korektně. Skutečně jsme se také takových drobných nepřesností při zápisu pravidel pro počítání s primitivními funkcemi v prvním dílu knihy dopustili. Vezměme třeba vzorce (2.30). Podle nich je primitivní funkce k součtu nebo rozdílu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ rovna součtu nebo rozdílu odpovídajících primitivních funkcí $F(x)$, $G(x)$, primitivní funkce k c-násobku dané funkce $f(x)$ je c-násobkem její primitivní funkce $F(x)$. Vzorce (2.30) jsou také takto zapsány. Ale o kterou z nekonečně mnoha primitivních funkcí, lišících se navzájem o konstantu, se ve vzorcích jedná? Správně bychom měli vzorce číst takto: Jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ libovolné z primitivních funkcí k funkcím $f(x)$ a $g(x)$ (například na intervalu $(a,\, b)$), pak funkce $F(x) \pm G(x)$ je jednou z primitivních funkcí k funkci $f(x) \pm g(x)$. A podobně pro primitivní funkci k $cf(x)$. Obdobně nepřesný je třeba vzorec pro výpočet primitivní funkce metodou per partes. Ve vztahu

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

je na levé straně zcela konkrétní, jednoznačně určená funkce $u(x)v(x)$, zatímco na pravé straně je součet dvou primitivních funkcí (k funkci $u'(x)v(x)$ a k funkci $u(x)v'(x)$), které díky možnosti přičítání libovolné konstanty již jednoznačné nejsou. Levá strana vzorce je tedy jednoznačná, pravá nikoliv. Je samozřejmé, že i tak dobře víme, co vzorce znamenají, a nepřesnost, kterou jsme si dovolili, není pro praktické výpočty zásadní. Přesto se však pokusíme zápisy opravit tak, aby jim ani zapřisáhlý matematický purista nemohl nic vytknout.

Vidíme, že problém spočívá v tom, že z primitivních funkcí k $f(x)$, lišících se navzájem o konstantu, je každá stejně dobrá jako jiná. Nemohli bychom tedy pracovat se všemi současně? Jistě ano! K tomu přece máme faktorizaci. Uvažme všechny funkce definované pro jednoduchost například na intervalu $(a,\, b)$. Tyto funkce tvoří vzhledem k operaci sčítání komutativní grupu, řekněme $\Phi_{(a,b)}$. Konstantní funkce definované na tomtéž intervalu tvoří její (samozřejmě normální) podgrupu $\mathcal{C}_{(a,b)}$. Grupa $\mathcal{C}_{(a,b)}$ je normální podgrupou také v podgrupě $\mathcal{F}_{(a,b)}$ všech funkcí, které mají na intervalu $(a,\, b)$ derivaci a slouží tedy jako funkce primitivní. Faktorová grupa $\Phi_{(a,b)}/\mathcal{C}_{(a,b)}$ je tvořena třídami funkcí lišících se navzájem o konstantu, faktorová grupa $\mathcal{F}_{(a,b)}/\mathcal{C}_{(a,b)}$ pak třídami funkcí primitivních. K odstranění výše zmíněných nepřesností stačí, abychom se dohodli, že symbol neurčitého integrálu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathcal{F}_{(a,b)}/\mathcal{C}_{(a,b)}$$

znamená nikoli jednotlivou primitivní funkci, ale celou třídu, tj. prvek faktorové grupy. (Koneckonců jsme to ani předtím jinak nemysleli.) Vztahy ve vzorcích (2.30) pak neznamenají rovnost funkcí, tj. prvků původní grupy, nýbrž rovnost tříd, tj. prvků faktorové grupy. Vzorec (2.31) pro metodu per partes však musíme poopravit takto:

$$[u(x)v(x)] = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $[u(x)v(x)]$ je množina všech funkcí, lišících se od $u(x)v(x)$ o konstantu, tj. třída funkcí, prvek faktorové grupy. (Funkce $u(x)v(x)$ je reprezentantem této třídy, přičemž každá jiná funkce, která náleží do této třídy, je stejně dobrým reprezentantem.) Obdobně si můžete zkusit zpřesnit zápis (2.32) pro nalezení primitivní funkce substituční metodou.

4.1.2 Algebraické struktury se dvěma operacemi, hlavně pole

Příklady grup i příklady množin s nějakou operací, které grupami nebyly, jsme si často ukazovali na množinách čísel. S čísly totiž umíme počítat, takže takové příklady jsou názorné. Ukázky však měly jednu nevýhodu. Grupy jsme si totiž označili jako struktury s jednou operací. Proto jsme v příkladech s množinou reálných čísel a jejími podmnožinami, v nichž naprosto přirozeně používáme operace dvě, sčítání a násobení, museli vždy jednu z nich ignorovat. Nyní naopak dobře využijeme obou. Předpokládejme, že v množině P jsou zadány dvě operace typu (4.2), pro zápis jedné z nich použijeme znaku „+“, pro druhou „·“.

Příklad 4.13: Reálná osa jako algebraická struktura se dvěma operacemi

Představme si, že nosnou množinou je množina reálných čísel $P = \mathbf{R}$ s „obyčejnými“ operacemi sčítání a násobení. Pokusme se popsat co nejvíce vlastností těchto operací. Pro libovolná reálná čísla a, b, c platí:

(1) Množina $\mathbf{R}$ se sčítáním je komutativní grupa, $0_{\mathbf{R}} = 0$,

(2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, násobení je asociativní,

(3) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, platí distributivní zákony,

(4) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, existuje neutrální prvek vzhledem k násobení, v tomto případě $1_{\mathbf{R}} = 1$,

(5) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ nebo $b = 0$, neexistují dělitelé nuly,

(6) pro každé $a \neq 0$ existuje prvek a^{-1} tak, že $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, tj. ke každému nenulovému prvku existuje inverzní prvek vzhledem k násobení,

(7) $a \cdot b = b \cdot a$, násobení je komutativní.

Porovnejte tyto vlastnosti s těmi, které jsme si pro množinu reálných čísel vypsali již v odstavci 1.2.1. K vlastnosti (1), která požaduje, aby množina P se sčítáním byla komutativní grupou, přidáváme vlastnosti další, týkající se násobení a kombinace sčítání s násobením. Pokud přidáme pouze vlastnosti (2) a (3), získáme algebraickou strukturu, která se nazývá *okruh*. Nejjednodušším příkladem okruhu je množina obsahující pouze jediný prvek r s operacemi $r + r = r$, $r \cdot r = r$, takový okruh se nazývá *triviální* a z dalších úvah ho vyloučíme. Přidáme-li ještě (4), máme *okruh s jedničkou*. Okruh s vlastností (7) je *komutativní*. Netriviální komutativní okruh s jedničkou, který nemá dělitele nuly (vlastnost (5)), je *oborem integrity*. Netriviální okruh splňující vlastnosti (1) až (6) resp. (1) až (7) se nazývá *tělesem* resp. *komutativním tělesem* neboli *polem*, přičemž vlastnost (5) plyne z vlastnosti (6).

Pozn.: Terminologie není jednotná, někteří autoři rozumějí tělesem automaticky těleso komutativní, v angličtině se používá slovo *field* pro strukturu s vlastnostmi (1) — (7).

Množina reálných čísel se sčítáním a násobením, je polem. Polem je i množina komplexnich čísel s operacemi součtu a součinu.

Příklad 4.14: Množina komplexních čísel je také pole

S komplexními čísly jsme již zvyklí počítat. Umíme je sčítat i násobit. V příkladu 4.3 jsme viděli, že množina komplexních čísel s operací sčítání je komutativní grupou, zatímco při operaci násobení grupou není. Je to proto, že ke komplexnímu číslu $[0, 0]$ neexistuje inverzní prvek. Je snadné prověřit, že množina komplexních čísel jako algebraická struktura se dvěma operacemi, sčítáním a násobením je polem. Prověřte axiomy pole.

Pole komplexních čísel obsahuje ještě jeden zvláštní prvek, *imaginární jednotku* $\mathrm{i} = [0, 1]$. Platí pro ni pravidla, která jsme uvedli již v odstavci 1.2.2. Zopakujme je:

$$\mathrm{i}^2 = [0, 1] \cdot [0, 1] = [-1, 0], \quad \mathrm{i} \cdot z = [0, 1] \cdot [a, b] = [-b, a],$$

$$[0,\,1]\cdot[a,\,0]=[0,\,a],\quad [0,\,1]\cdot[0,\,b]=[-b,\,0].$$

Pomocí imaginární jednotky můžeme zápis operací zjednodušit:

$$[a_1,\,b_1]=a_1+\mathrm{i}b_1,\quad [a_2,\,b_2]=a_2+\mathrm{i}b_2,$$

$$(a_1+\mathrm{i}b_1)+(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1+a_2)+\mathrm{i}(b_1+b_2),$$
$$(a_1+\mathrm{i}b_1)\cdot(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}(a_1b_2+a_2b_1).$$

V tomto místě je možné ukončit čtení o tělesech a polích a přejít k vektorovým prostorům (odstavec 4.1.3).

Příklad 4.15: Ještě jednou zbytkové třídy

Uvažujme o množině zbytkových tříd jako v příkladech 4.9 a 4.10. Za dělitele zvolme číslo n, máme tedy množinu $P=\{Z_0,\,Z_1,\,\ldots,\,Z_{n-1}\}$. Již o ní víme, že vzhledem ke sčítání je komutativní grupou, neutrálním prvkem je třída Z_0. Zkusme zbytkové třídy násobit. Třída $Z_m\cdot Z_\ell$ bude určena zbytkem po dělení čísla $m\cdot\ell$ dělitelem n (stačí počítat s reprezentanty). Například pro $n=12$ je $Z_2\cdot Z_8=Z_4$, neboť $2\cdot 8=16=12\cdot 1+4$. Toto násobení je asociativní i komutativní. Platí i distributivní zákony. Máme tedy komutativní okruh. Abychom zjistili, je-li polem, potřebujeme ještě prověřit vlastnosti (4) — (6). Jedničkou je třída Z_1. Neplatí však požadavek (5). Pro $n=12$ dostaneme $Z_2\cdot Z_6=Z_0$ nebo $Z_3\cdot Z_4=Z_0$. Protože je Z_0 současně neutrálním prvkem (nulou), není požadavek (5) splněn. Struktura není tělesem. Je možné ukázat, že:

> Okruh zbytkových tříd modulo n je tělesem právě tehdy, když n je prvočíslo. Toto těleso je pak automaticky komutativní, tj. pole.

Zkusíte to sami?

Příklad 4.16: Kvaterniony

To slovo zní tak tajemně, že se neubráníme zvědavosti a podíváme se, co se za ním skrývá. Komplexními čísly totiž naše možnosti nekončí. Komplexními čísly byly uspořádané dvojice reálných čísel, se kterými se počítalo podle speciálních pravidel tak, aby vznikla algebraická struktura pole. Důležité postavení v množině komplexních čísel měla imaginární jednotka, pro kterou platil poněkud nezvyklý vztah $\mathrm{i}^2=-1$. Jeho zdánlivá podivnost pramení z naší zkušenosti s počítáním s reálnými čísly, kde se nemůže stát, aby druhá mocnina nějakého čísla byla záporná. Nyní budeme počítat dokonce s uspořádanými čtveřicemi reálných čísel a budeme potřebovat tři imaginární jednotky, i, j, k, pro které předepíšeme vztahy

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1,\quad \mathrm{i}\cdot\mathrm{j}=\mathrm{k}.$$

Kvaternionem budeme rozumět uspořádanou čtveřici $[a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4]$ reálných čísel, kterou také můžeme zapsat ve tvaru $a_1+\mathrm{i}a_2+\mathrm{j}a_3+\mathrm{k}a_4$. Pro součet dvou kvaternionů předepíšeme přirozené pravidlo sčítání „po složkách“, tj.

$$(a_1+\mathrm{i}a_2+\mathrm{j}a_3+\mathrm{k}a_4)+(b_1+\mathrm{i}b_2+\mathrm{j}b_3+\mathrm{k}b_4)=$$
$$=(a_1+b_1)+\mathrm{i}(a_2+b_2)+\mathrm{j}(a_3+b_3)+\mathrm{k}(a_4+b_4).$$

Tato definice splňuje požadavky kladené na operaci sčítání v tělese, množina $\mathbf{H}$ kvaternionů s operací sčítání je komutativní grupou. Jejím neutrálním prvkem je $0=[0,\,0,\,0,\,0]$ a prvkem opačným k $a=a_1+\mathrm{i}a_2+\mathrm{j}a_3+\mathrm{k}a_4$ je prvek $-a=(-a_1)+\mathrm{i}(-a_2)+\mathrm{j}(-a_3)+\mathrm{k}(-a_4)$.

Nyní se soustřeďme na „rozumnou“ definici násobení. Násobení je třeba definovat tak, aby platily další požadované zákony, které činí algebraickou strukturu tělesem, tj. asociativita a distributivita, a aby jedničkou byla čtveřice [1, 0, 0, 0]. Pomocí požadavku asociativity můžeme získat další vztahy pro imaginární jednotky:

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{j}=\mathrm{k}\Longrightarrow \mathrm{i}^2\cdot\mathrm{j}=\mathrm{i}\cdot\mathrm{k}\Longrightarrow -\mathrm{j}=\mathrm{i}\cdot\mathrm{k}.$$

Obdobně dostaneme

$$\mathrm{j}\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{k},\quad \mathrm{j}\cdot\mathrm{k}=-\mathrm{k}\cdot\mathrm{j}=\mathrm{i},\quad \mathrm{k}\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}\cdot\mathrm{k}=\mathrm{j}.$$

Příklad násobení imaginárních jednotek ukazuje, že násobení není komutativní. Pro součin dvou kvaternionů pak, na základě vlastností imaginárních jednotek a požadavku asociativity a distributivity, dostaneme

$$(a_1+\mathrm{i}a_2+\mathrm{j}a_3+\mathrm{k}a_4)\cdot(b_1+\mathrm{i}b_2+\mathrm{j}b_3+\mathrm{k}b_4)=$$

$$=(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)+\mathrm{i}(a_2b_1+a_1b_2+a_3b_4-a_4b_3)+$$

$$+\mathrm{j}(a_3b_1+a_1b_3+a_4b_2-a_2b_4)+\mathrm{k}(a_4b_1+a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2).$$

Sdružený kvaternion k $a=(a_1+\mathrm{i}a_2+\mathrm{j}a_3+\mathrm{k}a_4)$ je definován jako $a^*=(a_1-\mathrm{i}a_2-\mathrm{j}a_3-\mathrm{k}a_4)$, *normou kvaternionu* nazýváme reálné číslo

$$|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}.$$

Pomocí násobení se přesvědčte, že inverzním prvkem k nenulovému kvaternionu a je

$$a^{-1}=\frac{a^*}{|a|^2}=\frac{a_1-\mathrm{i}a_2-\mathrm{j}a_3-\mathrm{k}a_4}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}.$$

Předchozí příklady ukazují, že algebraická struktura, kterou nazýváme tělesem, je definována vždy stejnými pravidly, na druhé straně má mnoho konkrétních podob — od reálných čísel, která jsou pro nás zcela běžná, až po neobvyklé kvaterniony. Komutativní tělesa, tj. pole, mají v lineární algebře význam prostoru skalárů. V „praktické“ lineární algebře, o kterou nám jde především, vystačíme se zcela „obyčejnými“ skaláry, tedy s polem reálných, nanejvýš komplexních čísel.

4.1.3 Co je vektorový prostor?

Pro vytvoření vektorového prostoru potřebujeme komutativní grupu $(V,+)$, jejíž operaci „+“ označíme jako sčítání a její prvky nazveme vektory bez ohledu na jejich konkrétní podobu. Další součástí konstrukce je pole skalárů $\mathbf{C}$, nebo $\mathbf{R}$. Všechny situace, kdy polem skalárů je reálná osa, dostaneme jako speciální případ obecnějšího případu, kdy je polem skalárů komplexní rovina $\mathbf{C}$. Grupová operace představuje sčítání vektorů, pomocí pole skalárů definujeme násobení vektoru skalárem jako zobrazení přiřazující skaláru a vektoru vektor, pro které stanovíme jistá pravidla. Provedeme to tak, že pravidlům, která jsme v příslušných odstavcích kapitoly 1 formulovali pro konkrétní případy, třeba pro orientované úsečky, pro uspořádané n-tice čísel, pro matice typu m/n, atd., přisoudíme nyní obecnou platnost.

Množinu V s operacemi sčítání a násobení skalárem

$$V \times V \ni [a, b] \longrightarrow (a + b) \in V, \quad \mathbf{C} \times V \ni [\alpha, a] \longrightarrow \alpha a \in V$$

nazýváme *vektorovým prostorem nad polem čísel* $\mathbf{C}$, jsou-li pro každé $a, b \in V$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ splněny tyto požadavky:

$$\begin{aligned} &\bullet\ (V, +) \quad \text{je komutativní grupa} \\ &\bullet\ (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \\ &\bullet\ \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \\ &\bullet\ \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \\ &\bullet\ (-1)a = -a \end{aligned} \tag{4.8}$$

Zaměníme-li $\mathbf{C}$ za $\mathbf{R}$, dostaneme definici vektorového prostoru nad polem $\mathbf{R}$.

Jak už jistě tušíte, rozhodli jsme se prvky pole $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$) nazývat *skaláry* a prvky struktury V *vektory*. Z kapitoly 1 již víme, že všechny prvky vektorového prostoru, tj. vektory, nejsou navzájem nezávislé. Naopak, existují určité systémy „základních“ prvků, pomocí nichž můžeme vyjádřit všechny ostatní prvky jako jejich lineární kombinace. Připomeňme si stručně, o co jde.

Systém vektorů $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ vektorového prostoru V se nazývá *lineárně závislý*, jestliže existují čísla (skaláry) $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^k$, z nichž alespoň jedno je nenulové, tak, že *lineární kombinace* $\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \cdots + \alpha^k a_k$ dává neutrální prvek prostoru V, tj.

$$\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \cdots + \alpha^k a_k = 0_V.$$

Pokud nelze nulovou lineární kombinaci daných vektorů získat jinak než s nulovými koeficienty, říkáme, že systém vektorů je *lineárně nezávislý*.

Předpokládejme, že systém $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je lineárně závislý a že například zrovna číslo α^1 je nenulové. (Pokud by tomu tak nebylo, stačí vektory přečíslovat a jako a_1 označit ten, u kterého je právě v té lineární kombinaci, jejímž výsledkem je nulový vektor, nenulový koeficient.) Můžeme tedy psát

$$\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \cdots + \alpha^k a_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha^j a_j = 0_V, \quad \alpha^1 \neq 0.$$

Vynásobíme-li celou rovnost číslem $(\alpha^1)^{-1}$ (hned je vidět, proč jsme potřebovali, aby α^1 bylo nenulové), můžeme vektor a_1 zapsat pomocí ostatních vektorů systému jako jejich lineární

kombinaci

$$a_1 = \left(-\frac{\alpha^2}{\alpha^1}\right) a_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha^k}{\alpha^1}\right) a_k.$$

Pro systém tvořený alespoň dvěma vektory tedy platí:

Systém vektorů je lineárně závislý právě tehdy, je-li některý vektor ze systému lineární kombinací ostatních.

Z definice lineární závislosti je vidět, že systém obsahující jediný vektor je závislý právě když je tento vektor nulový.

Je přirozené, že si nyní klademe otázku, kolik vektorů prostoru V je nejméně potřeba, abychom pomocí nich vyjádřili všechny ostatní. Předpokládejme, že ve vektorovém prostoru V existuje lineárně nezávislý systém vektorů $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Číslo k by mělo být alespoň 1. (Pro $k = 0$ by vektorový prostor musel být tvořen jediným prvkem, který by současně plnil úlohu neutrálního prvku i prvku sama k sobě opačného. Pak by platilo $V = \{0_V\}$. Tento případ vektorového prostoru není příliš zajímavý, i když i on má nárok na své místo mezi vektorovými prostory.) Přidejme k systému $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ další vektor a zjišťujme, zda nový systém je lineárně závislý či nezávislý. Pokud najdeme vektor a_{k+1} tak, že systém $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ bude lineárně nezávislý, pokračujeme přidáním dalšího vektoru. Může se stát, že se procedura v jistém n-tém kroku zastaví, takže nebudeme schopni systém $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, stále ještě lineárně nezávislý, doplnit dalším nezávislým vektorem. Bude to znamenat, že systém $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ bude lineárně závislý, ať se snažíme sebevíc, tj. bude závislý pro libovolně zvolený vektor $b \in V$.

Lineárně nezávislý systém vektorů $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ve vektorovém prostoru V, pro který je systém $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ lineárně závislý při libovolném $b \in V$, nazýváme *maximálním lineárně nezávislým systémem* neboli *bází* vektorového prostoru V.

Takových bází je potom v prostoru V nekonečně mnoho, všechny však mají stejný počet prvků n. Vektorový prostor, ve kterém existuje báze s konečným počtem prvků, se nazývá *konečně-rozměrný*.

Příklad 4.17: Kolika způsoby lze vyjádřit vektor v dané bázi aneb k čemu jsou dobré obecné axiomy vektorového prostoru?

Pokusme se zodpovědět otázku položenou v názvu příkladu. Odpověď je velice důležitá. Kdybychom totiž zjistili, že jeden a týž vektor lze zapsat pomocí *jedné a téže báze* různými způsoby, měli bychom co do činění s nepříjemnou komplikací. Zapišme tedy vektor $b \in V$ jako lineární kombinaci vektorů báze $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dvěma způsoby, tj. pokaždé s jinými koeficienty. A budeme doufat, že nakonec zjistíme, že tyto dva způsoby nemohou být různé.

$$b = \beta^1 a_1 + \beta^2 a_2 + \cdots + \beta^n a_n \quad \text{nebo} \quad b = \gamma^1 a_1 + \gamma^2 a_2 + \cdots + \gamma^n a_n.$$

Prvkem opačným k vektoru b je vektor $(-1)b = (-\gamma^1)a_1 + (-\gamma^2)a_2 + \cdots + (-\gamma^n)a_n$. (Víte, kterých axiomů vektorového prostoru jsme k tomuto jednoduchému konstatování využili?) Součet prvku s prvkem opačným dává

neutrální prvek prostoru V, tj. $b + (-b) = 0_V$. Odtud, opět s využitím pravidel pro počítání ve vektorových prostorech (kterých?), dostaneme

$$(\beta^1 - \gamma^1)a_1 + (\beta^2 - \gamma^2)a_2 + \cdots + (\beta^n - \gamma^n)a_n = 0_V.$$

A teď bychom potřebovali dospět k závěru, že $\beta^1 = \gamma^1$, $\beta^2 = \gamma^2$, … , $\beta^n = \gamma^n$. To už je ale velice snadné. Předchozí výraz totiž znamená, že se nám podařilo z vektorů báze sestavit lineárním kombinováním nulový vektor. To ale nejde s výjimkou jediné situace, kdy jsou všechny koeficienty v takové lineární kombinaci nulové.

Libovolný vektor je jednoznačně vyjádřen jako lineární kombinace vektorů dané báze.

Pomocí předchozího příkladu jsme se přesvědčili, že axiomy vektorového prostoru, tedy pravidla, jak s jeho prvky počítat, nejsou samoúčelné, ale vedou k velmi závažným důsledkům. Kdyby nebyly vymyšleny tak šikovně, třeba by taková abstraktní algebraická struktura ani k ničemu nebyla. On také někdo nevymyslel ta pravidla „jen tak“, zničehonic. Vznikla zobecněním, na základě praktických výpočtů s konkrétními geometrickými objekty, především takovými, které měly fyzikální význam a kterým se začalo říkat vektory.

Příklad 4.18: Užitečná vsuvka — Einsteinova sčítací symbolika

Všimli jste si jistě, že na rozdíl od kapitoly 1 jsme nyní napsali indexy složek vektorů do horní polohy. Toto umístění indexů začneme nyní, kdy se budeme zabývat obecnějšími a abstraktnějšími objekty lineární algebry, používat systematicky. Má totiž svůj význam: Představme si součet typu

$$\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \cdots + \alpha^n a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i a_i,$$

aniž zkoumáme význam jednotlivých symbolů. Obě uvedené varianty zápisu, ať již verze, která vypisuje jednotlivé členy, tak ta, která využívá sumačního znaku, jsou poněkud nepohodlné (mimochodem, zkuste si, jak se sumační znak $\sum$ špatně píše a každý pokus dopadne trochu jinak). Přitom obsahují docela zbytečné informace, třeba tu, že sčítací index probíhá od jedné do n. To většinou víme předem a během výpočtu meze sumace neměníme. Příští dohoda tedy bude následující:

Index, který se v zápisu vyskytne dvakrát, a to jednou v dolní, jednou v horní poloze, je indexem sčítacím a probíhá předem dohodnutou množinu přirozených čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Například ve výrazu

$$z^i = p^{ij} q_j = p^{i1} q_1 + p^{i2} q_2 + \cdots + p^{in} q_n = \sum_{j=1}^{n} p^{ij} q_j$$

se *sčítací index* jmenuje j, index i je indexem *volným*, ve výrazu není ničím „vykompenzován“. Nabývá rovněž hodnot $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, předchozí výraz tedy představuje ve skutečnosti n veličin $z^1, z^2, \ldots, z^n$. Obdobně interpretujeme zápis

$$A^{ij} = B^{ijrs} C_{rs} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} B^{ijrs} C_{rs} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(B^{ijr1} C_{r1} + B^{ijr2} C_{r2} + \cdots + B^{ijrn} C_{rn} \right) =$$

$$= \left(B^{ij11}C_{11} + B^{ij12}C_{12} + \cdots + B^{ij1n}C_{1n}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(B^{ijn1}C_{n1} + B^{ijn2}C_{n2} + \cdots + B^{ijnn}C_{nn}\right).$$

Poslední zápis je součtem n závorek, z nichž každá obsahuje n sčítanců. Celkem máme n^2 sčítanců.

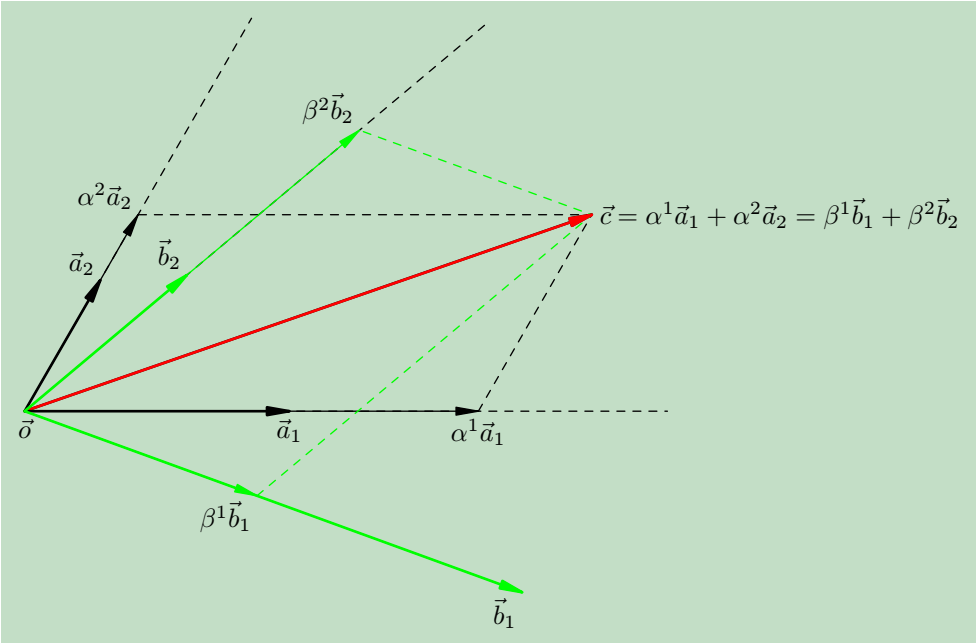
V dalším textu budeme někdy Einsteinovy symboliky používat tam, kde to bude obzvlášť vhodné. Jindy zůstaneme u zápisů pomocí sumačních znaků, nebo i součty rozepíšeme. Nemusíte se však obávat, že byste způsob zápisu nedokázali rozpoznat.

Příklad 4.19: Proč mají všechny báze stejný počet prvků?

Tvrzení o shodném počtu prvků všech bází je velmi dobře pochopitelné třeba v případě, že vektorový prostor je dán všemi orientovanými úsečkami v rovině, které se sčítají pomocí vektorového rovnoběžníka a násobí skalárem α tak, že se α-krát změní jejich délka, včetně případné změny orientace (viz odstavec 1.4). Situaci ukazuje obrázek 4.19. Jsou na něm dvě různé a libovolně zvolené dvojice lineárně nezávislých vektorů $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ a $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, tedy dvě různé *báze*. Jeden a týž vektor $\vec{c}$ dokážeme pomocí rovnoběžníkového pravidla rozložit do kterékoli z obou bází tak, že platí

$$\vec{c} = \alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 = \beta^1\vec{b}_1 + \beta^2\vec{b}_2,$$

kde dvojice (řádkové matice) $(\alpha^1\ \alpha^2)$, resp. $(\beta^1\ \beta^2)$, představují složky vektoru $\vec{c}$ v bázi $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, resp. v bázi $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.



Obr. 4.19 Rozklad vektoru v rovině do různých bází.

Pozn.: Vektor $\vec{o}$ v obrázku 4.19 je nulový vektor (viz odstavec 1.4.2). Ve vektorovém prostoru orientovaných úseček plní úlohu neutrálního prvku 0_{V_2}, resp. 0_{V_3}.

Zamysleme se nyní nad problémem obecně. Předpokládejme, že v daném vektorovém prostoru existuje báze o n prvcích, $\mathcal{B}_a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Zjistíme, zda v tomto prostoru můžeme sestrojit nějakou jinou bázi a kolik

bude mít prvků. Každý vektor prostoru je ovšem lineární kombinací prvků báze $\mathcal{B}_a$. Uvažujme o m takových vektorech

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta_1^1 a_1 + \beta_1^2 a_2 + \cdots + \beta_1^n a_n, \\ b_2 &= \beta_2^1 a_1 + \beta_2^2 a_2 + \cdots + \beta_2^n a_n, \\ \cdots &\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ b_m &= \beta_m^1 a_1 + \beta_m^2 a_2 + \cdots + \beta_m^n a_n. \end{aligned}$$

Určitě teď máte podezření, že bude nutné si zopakovat základy řešení soustav lineárních rovnic z kapitoly 1. Tento odhad je zcela správný. Zopakujeme si potřebné vlastnosti soustav lineárních rovnic souběžně s řešením našeho problému. Mají-li být vektory $b_1, b_2, \ldots, b_m$ prvky nové báze, musí být lineárně nezávislé. Je tedy třeba, aby vektorová rovnice

$$\gamma^1 b_1 + \gamma^2 b_2 + \cdots + \gamma^m b_m = 0_V \tag{4.9}$$

měla pouze triviální řešení $(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^m) = (0, 0, \ldots, 0)$. Víme již z příkladu 4.17, že každý z vektorů b_1 až b_m je lineární kombinací vektorů báze $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ s jednoznačně určenými koeficienty. Dosadíme-li takto vyjádřené vektory b_1 až b_m do předchozí vektorové rovnice, dostaneme lineární kombinaci vektorů báze, která je ovšem nulovým vektorem. Všechny koeficienty této kombinace tedy musí být nulové. Vektorová rovnice (4.9) tak představuje soustavu n homogenních lineárních rovnic o m neznámých γ^1 až γ^m,

$$\begin{aligned} \beta_1^1\gamma^1 + \beta_2^1\gamma^2 + \cdots + \beta_m^1\gamma^m &= 0, \\ \beta_1^2\gamma^1 + \beta_2^2\gamma^2 + \cdots + \beta_m^2\gamma^m &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\ \cdots\ \cdots, \\ \beta_1^n\gamma^1 + \beta_2^n\gamma^2 + \cdots + \beta_m^n\gamma^m &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení vždy, přinejmenším to triviální. Aby však měla pouze triviální řešení a žádné jiné, jak požadujeme, je nutné a stačí, aby matice soustavy

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \ldots & \beta_m^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \ldots & \beta_m^n \end{pmatrix}$$

měla hodnost rovnou počtu neznámých, tedy $h(B) = m$. Nutnou podmínkou pro to, aby tento požadavek mohl být vůbec splněn, je $m \leq n$. Pro případ $m > n$ by totiž hodnost matice B nemohla překročit hodnotu n, takže by počtu neznámých nedosáhla. Může však nastat nerovnost $m < n$? Mohly by pak vektory $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ tvořit bázi? Pokud ano, musíme být schopni vyjádřit vektory $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jako jejich lineární kombinaci, tedy najít čísla (ϑ_i^j), $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, tak, aby platilo

$$\begin{aligned} a_1 &= \vartheta_1^1 b_1 + \vartheta_1^2 b_2 + \cdots + \vartheta_1^m b_m, \\ a_2 &= \vartheta_2^1 b_1 + \vartheta_2^2 b_2 + \cdots + \vartheta_2^m b_m, \\ \cdots &\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_n &= \vartheta_n^1 b_1 + \vartheta_n^2 b_2 + \cdots + \vartheta_n^m b_m. \end{aligned}$$

Stejnou argumentací jako před chvílí, pouze se zaměněnými soubory $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, získáme nerovnost $m \geq n$. Nerovnosti $m \leq n$ a $m \geq n$ však musí být splněny současně. A to lze zařídit jedině pro $m = n$.

V daném vektorovém prostoru mají všechny báze tentýž počet prvků.

Vektorový prostor, ve kterém existuje báze s konečným počtem prvků, jsme nazvali konečněrozměrným. Nyní víme, že všechny báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají shodný počet prvků. Jestliže báze daného vektorového prostoru mají n prvků, nazýváme tento prostor *n-rozměrným*. Říkáme také, že jeho *dimenze* je n a značíme jej V_n, aby dimenze, jeho důležitá charakteristika, byla přímo součástí označení.

Ukážeme si nyní konkrétní příklady konečněrozměrných vektorových prostorů a určíme jejich dimenzi. Zvolíme příklady, s nimiž jsme se již setkali v odstavcích 1.3 a 1.4, tentokrát však budeme sledovat jejich společné rysy odpovídající axiomům abstraktního vektorového prostoru.

Příklad 4.20: Uspořádané n-tice komplexních čísel jako vektory

Na množině uspořádaných n-tic komplexních čísel

$$a = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}$$

zavedeme operace sčítání a násobení skalárem (komplexním číslem) takto:

$$\begin{aligned} a + b &= (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) + (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n) = \\ &= (\alpha^1 + \beta^1, \alpha^2 + \beta^2, \ldots, \alpha^n + \beta^n), \\ \gamma\, a &= \gamma(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) = (\gamma\alpha^1, \gamma\alpha^2, \ldots, \gamma\alpha^n). \end{aligned} \tag{4.10}$$

O tom, že takto konkrétně definované operace splňují všechny axiomy vektorového prostoru nad polem komplexních čísel, se snadno přesvědčíte sami. Jde nyní o to, zda se jedná o prostor konečné dimenze a jaká tato dimenze je. Označme

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ \ldots\ &\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_{n-1} &= (0, 0, \ldots, 0, 1, 0), \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Tyto n-tice jsou lineárně nezávislé. Zkusme z nich udělat nulovou lineární kombinaci!

$$\gamma^1 e_1 + \gamma^2 e_2 + \cdots + \gamma^n e_n = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Je zřejmé, že všechny koeficienty γ^j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jsou nulové, n-tice e_1 až e_n jsou tedy lineárně nezávislé. Zvolíme-li libovolnou n-tici $a = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$, můžeme ji zapsat ve tvaru

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^n e_n.$$

Soubor $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ je tedy bází ve vektorovém prostoru uspořádaných n-tic nad polem komplexních čísel. Tento prostor je n-rozměrný. Báze, kterou jsme nalezli, je obzvláště jednoduchá, a proto je často používaná. Říkáme jí báze *standardní*. Podobně bychom mohli zkonstruovat standardní bázi ve vektorovém prostoru n-tic reálných čísel nad polem $\mathbf{R}$.

Příklad 4.21: Matice typu m/n tvořené z komplexních čísel

V příkladu 4.5 jsme již zjistili, že matice komplexních čísel typu m/n s obvyklou operací sčítání „po prvcích“, definovanou dokonce již v odstavci 1.3, tvoří komutativní grupu. Přidáme definici násobení matice komplexním číslem, zavedenou rovněž v odstavci 1.3 tak, že vynásobíme tímto číslem všechny prvky matice. Prověřte, že opět platí axiomy vektorového prostoru. Na straně 27 prvního dílu jsme viděli, že každou matici A typu m/n můžeme zapsat jako lineární kombinaci mn matic E^i_j téhož typu. Matice E^i_j je utvořena tak, že na i-té řádkové a j-té sloupcové pozici má jedničku a jinak obsahuje samé nuly. (Všimněte si nyní odlišného umístění indexů. Je vhodné pro pozdější využití nové sčítací symboliky.) Platí

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^2_1 & \dots & \alpha^n_1 \\ \alpha^1_2 & \alpha^2_2 & \dots & \alpha^n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^1_m & \alpha^2_m & \dots & \alpha^n_m \end{pmatrix} = \alpha^1_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\alpha^2_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha^n_m \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha^j_i \, E^i_j = \alpha^j_i \, E^i_j.$$

Matice E^i_j jsou navíc lineárně nezávislé (ověřte to obdobně jako u n-tic v příkladu 4.20). Tvoří tedy bázi ve vektorovém prostoru matic typu m/n. Protože jich je m krát n (jednička „cestuje“ po všech pozicích), je zřejmé, že právě taková je dimenze tohoto vektorového prostoru.

V závěru odstavce ještě položme a zodpovězme jednu otázku, která nás již jistě při čtení o vektorových prostorech napadla: Nejsou vektorové prostory stejné dimenze koneckonců svým způsobem stejné? Nepředstavují z hlediska algebraické struktury totéž? Vždyť jsme přece dokázali s nimi i prakticky pracovat, aniž bychom nutně museli vědět, jaké jsou jejich *konkrétní* prvky. Kdo uvažoval takto, měl pravdu. Vektorové prostory stejné dimenze nad $\mathbf{C}$, nebo ve speciálnějším případě nad $\mathbf{R}$, skutečně mají stejnou algebraickou strukturu. Uvažujme o dvou takových vektorových prostorech V_n a W_n a pokusme se jejich „stejnost“ popsat. Obecně jsou nosné množiny těchto prostorů složeny z různých prvků a operace jejich sčítání a násobení skalárem jsou také definovány odlišně — tak, jak to právě vyhovuje konkrétním volbám nosných množin. Vlastnosti operací jsou však shodné, jsou dány vztahy (4.8). Také dimenze prostorů je shodná, každá báze v každém z nich má stejný počet prvků, totiž n. Pokud se nám tedy podaří najít nějaké vzájemně jednoznačné přiřazení prvků prostorů V_n a W_n, které ovšem nepokazí vlastnosti operací, bude pak již jedno, s kterým prostorem budeme pracovat. S něčím takovým jsme se již setkali — vzpomeňte na izomorfismus grup v odstavci 4.1.1. Pro případ vektorových prostorů bude definice obdobná, bude jen navíc obsahovat požadavek na „přenesení“ operace násobení skalárem.

Izomorfismem vektorových prostorů V a W nad $\mathbf{C}$ resp. nad $\mathbf{R}$ (zatím nehovořme o dimenzích) rozumíme každé vzájemně jednoznačné zobrazení $\iota : V \to W$ vektorového prostoru V *na* vektorový prostor W, tj. $\iota(V) = W$, s vlastnostmi

$$\iota(a+b) = \iota(a) + \iota(b) \quad \text{a} \quad \iota(\alpha a) = \alpha\iota(a)$$

pro libovolné vektory a, b z prostoru V a libovolný skalár α.

Pokusme se takové zobrazení sestrojit pro případ prostorů stejné dimenze. Zvolme v prostoru V_n bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a v prostoru W_n bázi $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Zvolme libovolně vektor $a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^n e_n \in V_n$ a definujme jeho obraz takto:

$$\iota(a) = \alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2 + \cdots + \alpha^n f_n \in W_n.$$

Tato volba odpovídá definici izomorfismu, neboť ι je na první pohled prostým (vzájemně jednoznačným) zobrazením prostoru V_n na prostor W_n, které splňuje požadované vlastnosti „přenášení“ operací. Všechno to vyplývá ze skutečnosti, že vyjádření vzoru $a \in V_n$ jako lineární kombinace prvků báze $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ v prostoru vzorů má stejné koeficienty $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ jako vyjádření obrazu $\iota(a) \in W_n$ jako lineární kombinace prvků báze $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ v prostoru obrazů. Mají-li tedy prostory stejnou dimenzi, izomorfismus vždy existuje — právě jsme takový sestrojili. Z toho, že v každém prostoru můžeme zvolit nekonečně mnoho bází, je hned vidět, že také izomorfismů bude nekonečně mnoho. Co když však jsou dimenze prostorů různé? Pak ovšem žádný izomorfismus nenajdeme. Pokusme se to dokázat. Uvažujme tak, jako bychom přece jen požadované zobrazení $\iota : V_n \to W_m$ měli i pro $n \neq m$. Předpokládejme nejprve, že $n > m$. Zvolme ve V_n bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a označme $f_1 = \iota(e_1) \in W_m$ až $f_n = \iota(e_n) \in W_m$ obrazy jejích vektorů. Vzory $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jsou lineárně nezávislé. Co však můžeme říci o jejich obrazech? Položme, jako pokaždé, když prověřujeme otázku lineární nezávislosti,

$$\gamma^1 f_1 + \cdots + \gamma^n f_n = 0_{W_m} \implies \gamma^1 \iota(e_1) + \cdots + \gamma^n \iota(e_n) = 0_{W_m}.$$

Využijeme-li vlastností izomorfismu, dostaneme

$$\iota(\gamma^1 e_1 + \cdots + \gamma^n e_n) = 0_{W_m}.$$

Protože je zobrazení ι podle předpokladu prosté, existuje jediný vzor každého obrazu. Pro vektor 0_{W_m} pojatý jako obraz je tímto vzorem vektor 0_{V_n}. Proto

$$\gamma^1 e_1 + \cdots + \gamma^n e_n = 0_{V_n}.$$

O vektorech e_1 až e_n však víme, že jsou lineárně nezávislé. Platí tedy $\gamma^1 = \cdots = \gamma^n = 0$. Odtud již vyplývá i lineární nezávislost vektorů f_1 až f_n, ležících v prostoru W_m. Avšak v žádném

prostoru nemůže existovat více lineárně nezávislých vektorů, než je jeho dimenze. Dostáváme se do rozporu s předpokladem $n > m$. Rozpor s možností $n < m$ získáme, budeme-li zcela stejným způsobem uvažovat o inverzním zobrazení ι^{-1}. Nastane-li tedy situace $n \neq m$, nemůže být zobrazení ι izomorfismem. Závěrem můžeme konstatovat:

> Konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě tehdy, mají-li stejnou dimenzi.

Slovo izomorfní znamená, že je z hlediska algebraické struktury považujeme za stejné (pomocí zobrazení ι se dají *ztotožnit*).

V tomto odstavci jsme několikrát zdůraznili, že prostory, s nimiž pracujeme, mají konečnou dimenzi. Znamená to snad, že mohou existovat také prostory nekonečněrozměrné? Pokud jste pečlivě četli první díl, vzpomenete si, že jsme se s takovým prostorem již setkali (v poznámce 2 na straně 58). Jednalo se o vektorový prostor funkcí. Vektorový prostor V nazýváme *nekonečněrozměrný* nebo také *nekonečnědimenzionální*, jestliže pro každé přirozené číslo n dokážeme ve V najít n lineárně nezávislých vektorů. Značíme $\dim V = \infty$. Čtenář běžných matematických textů zná pravděpodobně dva typy nekonečna. Prvním z nich je mohutnost množiny přirozených, ale také racionálních čísel. Druhým je mohutnost množiny čísel reálných. Teorie zabývající se nekonečněrozměrnými prostory má významné aplikace v matematické fyzice, v kvantové teorii pracujeme s tzv. *Hilbertovými* prostory, které jsou opatřeny dalšími matematickými strukturami a jejich dimenze je obvykle nekonečná. Ani v tomto dílu nám však nezbude prostor pro podrobnější výklad těchto zajímavých témat. Tvrzení uvedená v kapitole 4 i v kapitole 6 jsou formulována pro prostory konečné dimenze. Většina z nich by platila i pro prostory nekonečněrozměrné, ne však všechna. Následující příklad uvádí bez hlubšího rozboru typické příklady prostorů, jejichž rozměr je nekonečný.

Příklad 4.22: Jak vypadá prostor s nekonečnou dimenzí?

Již na střední škole jste pracovali s polynomy, tj. funkcemi typu $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$. S nimi jste prováděli operace sčítání polynomů a násobení polynomu reálným (popřípadě komplexním) číslem. Snadno ověříme, že pro množinu polynomů libovolného stupně s těmito operacemi jsou splněny požadavky (4.8). Máme tedy co do činění s vektorovým prostorem (označme jej P) a můžeme si položit otázku: Jaká je jeho dimenze? Dokážeme zkonstruovat bázi? Podívejme se na soubor polynomů (vektorů)

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\},$$

který je zřejmě lineárně nezávislý — žádný z těchto polynomů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Soubor n nezávislých vektorů dokážeme utvořit pro libovolné přirozené číslo n, prostor P je tedy nekonečněrozměrný.

Jiným příkladem nekonečněrozměrného prostoru může být množina všech (nekonečných) posloupností reálných, popřípadě komplexních čísel. Víme, že posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel $\mathbf{N}$. Sčítání funkcí a násobení funkce číslem bylo definováno v kapitole 2. Umíte sami dokázat, že množina všech posloupností reálných, resp. komplexních čísel s operacemi sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným, resp. komplexním číslem je vektorovým prostorem nad $\mathbf{R}$, resp. nad $\mathbf{C}$? Prověřte platnost axiomů (4.8). Pokuste se najít nějakou bázi tohoto prostoru. Použijte třeba analogie s konečněrozměrným vektorovým prostorem n-tic (příklad 4.20).

Na závěr poznamenejme, že prostor polynomů libovolného stupně a prostor nekonečných posloupností jsou izomorfní. Najdete alespoň jeden izomorfismus? Naopak, prostor funkcí zmíněný v poznámce na straně 58 prvního dílu s nimi izomorfní není! Je sice také nekonečněrozměrný, ale jeho dimenze odpovídá druhému z výše uvedených typů nekonečna. Uvažme například všechny funkce definované na $\mathbf{R}$. Mezi nimi jsou všechny polynomy, včetně těch, které představují Taylorovu řadu nějaké funkce (viz vztah (2.28) a odstavec 8.3). Ty lze vyjádřit jako lineární kombinaci báze $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$, nebo jakékoli jiné báze v prostoru polynomů P. Funkcí, které takto vyjádřit nelze, je „daleko víc“, stejně jako je „daleko víc“ reálných čísel než přirozených nebo racionálních. Toto srovnání je samozřejmě velmi nepřesné a lze říci, že i nematematické, ale podstatu odlišnosti uvedených dvou nekonečen názorně vystihuje.

4.1.4 Jak počítat v bázích?

Skutečnost, že ve vektorovém prostoru konečné dimenze (například uspořádaných n-tic) lze najít nespočetné množství různých bází, které však mají shodný počet prvků, jsme již zdůraznili několikrát. Daný vektor $a \in V_n$ můžeme v pevně zvolené bázi vyjádřit právě jedním způsobem, v různých bázích se však tento vektor bude „tvářit“ různě. Zvolme například báze

$$\mathcal{B} = (e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n), \quad \bar{\mathcal{B}} = (\bar{e}_1,\, \bar{e}_2,\, \ldots,\, \bar{e}_n) \tag{4.11}$$

a libovolný vektor a. Platí

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^n e_n = \bar{\alpha}^1 \bar{e}_1 + \bar{\alpha}^2 \bar{e}_2 + \cdots + \bar{\alpha}^n \bar{e}_n.$$

Řádkové n-tice $(\alpha) = (\alpha^1\, \alpha^2\, \ldots\, \alpha^n)$ a $(\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha}^1\, \bar{\alpha}^2\, \ldots\, \bar{\alpha}^n)$ představují *složky* vektoru a v bázích $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$. Hovoříme-li o složkách vektoru, musíme vždy specifikovat bázi, ke které se tyto složky vztahují. Vektor sám je na volbě báze nezávislý, je to *invariantní* objekt. Mluvíme-li o jeho vyjádření (též *reprezentaci*) v dané bázi, mějme stále na mysli, co takové vyjádření znamená: Je to zápis vektoru jako lineární kombinace souboru jiných vektorů tvořících bázi. Složky jsou právě koeficienty této lineární kombinace. Budeme-li vektor zapisovat jako lineární kombinaci jiné báze, tedy jiného souboru vektorů, budou koeficienty (složky) obecně odlišné. Zapisujeme

$$a \sim (\alpha^1\, \alpha^2\, \ldots\, \alpha^n) = (\alpha) \quad \text{resp.} \quad a \sim (\bar{\alpha}^1\, \bar{\alpha}^2\, \ldots\, \bar{\alpha}^n) = (\bar{\alpha}).$$

Zápisem vyjadřujeme skutečnost, že vektor a je v bázi $(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n)$ *reprezentován* řádkovou n-ticí složek (α), zatímco v bázi $(\bar{e}_1,\, \bar{e}_2,\, \ldots,\, \bar{e}_n)$ je týž vektor reprezentován n-ticí $(\bar{\alpha})$. Vzniká otázka, jaký je vztah mezi složkami vektoru v různých bázích. Odpověď známe již z odstavce 1.4.1. Proto zde pouze shrneme známé výsledky, použijeme však naší nové sčítací symboliky. Přechod mezi bázemi (4.11) je určen regulárními maticemi přechodu T a $S = T^{-1}$ (viz vztahy (1.28) a (1.29)):

$$\bar{e}_i = \tau_i^j e_j, \quad e_i = \sigma_i^j \bar{e}_j, \quad T = (\tau_i^j), \quad S = (\sigma_i^j), \quad 1 \le i, j \le n. \tag{4.12}$$

Pro složky pak dostáváme

$$\begin{aligned} a &= \alpha^i e_i = (\alpha^i \sigma_i^k)\bar{e}_k \implies \bar{\alpha}^k = \alpha^i \sigma_i^k\,, \\ a &= \bar{\alpha}^i \bar{e}_i = (\bar{\alpha}^i \tau_i^k) e_k \implies \alpha^k = \bar{\alpha}^i \tau_i^k. \end{aligned}$$

V těchto zápisech jistě rozpoznáte maticové násobení

$$(\bar{\alpha}) = (\alpha)\, S, \quad (\alpha) = (\bar{\alpha})\, T. \tag{4.13}$$

Příklad 4.23: Jak se vektor tváří v bázích

V odstavci 1.4.1 jsme se již přechody mezi bázemi zabývali a počítali jednoduché příklady týkající se přechodů v trojrozměrných prostorech (prostory uspořádaných trojic čísel, prostory orientovaných úseček). Nyní zvolíme šestirozměrný vektorový prostor matic typu 2/3 nad polem komplexních, nebo jen reálných čísel. Zvolme dvě různé báze tohoto prostoru, z nichž jedna bude například dána maticemi E^i_j z příkladu 4.21, druhou zvolíme také konkrétně:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = (E^1_1, E^1_2, E^1_3, E^2_1, E^2_2, E^2_3) \\ \bar{\mathcal{B}} &= (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6) = (F^1_1, F^1_2, F^1_3, F^2_1, F^2_2, F^2_3) \end{aligned}$$

$$E^1_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E^1_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E^1_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^2_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E^2_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E^2_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^1_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad F^1_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F^1_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^2_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F^2_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F^2_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice přechodu od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\bar{\mathcal{B}}$ je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Například prvek A zadaný jako matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

je v bázi $\bar{\mathcal{B}}$ vyjádřen jako lineární kombinace $A = \bar{\alpha}^i \bar{e}_i$, kde $(\bar{\alpha}) = (2 \ \ -3 \ \ 3 \ \ -\frac{7}{2} \ \ \frac{13}{2} \ \ -\frac{7}{2})$ jsou jeho složky v této bázi. Potom

$$(\alpha) = (\bar{\alpha})\, T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

V bázi $\mathcal{B}$ je tedy prvek A vyjádřen složkami $(\alpha) = (2 \ \ -1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 3 \ \ 1)$ a hned vidíme, že opravdu $A = \alpha^i e_i$.

4.1.5 Menší vektorové prostory skryté ve větších

Význam nadpisu tohoto odstavce vyjasníme hned na začátku příkladem.

Příklad 4.24: Dvojrozměrný vektorový prostor v trojrozměrném

Abychom si problém dokázali lépe představit, zvolme vektorový prostor pouze trojrozměrný, V_3, nad polem reálných čísel a v něm dva lineárně nezávislé vektory e_1 a e_2. Abychom získali ve V_3 bázi, stačí doplnit třetí vektor e_3. Všímejme si pouze vektorů, které lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů e_1 a e_2, tj. $a = \alpha^1 e_1 + + \alpha^2 e_2$. Tyto vektory mají v bázi (e_1, e_2, e_3) složky $(\alpha) = (\alpha^1 \, \alpha^2 \, 0)$. Označme množinu všech těchto vektorů jako L. Pro jejich součty a skalární násobky platí

$$a + b = (\alpha^1 + \beta^1)e_1 + (\alpha^2 + \beta^2)e_2, \quad \gamma a = (\gamma\alpha^1)e_1 + (\gamma\alpha^2)e_2,$$

jsou tedy opět pouze lineárními kombinacemi vektorů e_1 a e_2. Žádný vektor jiného typu nemůžeme jejich sčítáním ani násobením číslem získat. Množina vektorů

$$\{a \in V_3 | a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2, \ \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbf{R}\}$$

je *uzavřená vzhledem k operacím součtu a skalárního násobku vektorů*. Obsahuje také prvek 0_{V_3} a s každým prvkem a i prvek k němu opačný $(-1)a = -a$. Vlastnosti početních operací, sčítání a násobení skalárem, platné pro celý vektorový prostor, zůstávají pochopitelně v platnosti i tehdy, budeme-li je používat jen pro vektory množiny L. Vidíme, že podmnožina $L \subset V_3$ vektorového prostoru V_3 je sama také vektorovým prostorem, pouze však dvojrozměrným. Je to *vektorový podprostor* prostoru V_3. Vytvořili jsme jej z pouhých dvou vektorů e_1 a e_2 pomocí lineárních kombinací. Podprostor L je *generován* systémem (e_1, e_2). Říká se mu také *lineární obal* systému (e_1, e_2), protože vznikl tak, že jsme na systém vektorů (e_1, e_2) „nabalili“ všechny jejich lineární kombinace. Značíme

$$L = [|(e_1, e_2)|] = \{a \in V_3 | a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbf{R}\}.$$

Z příkladu 4.24 jste již jistě usoudili, že:

Vektorovým podprostorem vektorového prostoru V_n budeme rozumět takovou jeho podmnožinu L, jež má sama také strukturu vektorového prostoru. Tuto strukturu však na ní nevytváříme nově, nýbrž prostřednictvím původních operací sčítání vektorů a jejich násobení skalárem (tj. *zúžením* definičního oboru těchto operací na podmnožinu L).

A jak poznáme, že určitá podmnožina $L \subset V_n$ je opravdu vektorovým prostorem? Stačí se přesvědčit, zda je uzavřená vzhledem k algebraickým operacím, tj. zda s každými dvěma vektory a, $b \in L$ patří do L také jejich součet a s každým vektorem $a \in L$ také jeho libovolný skalární násobek. Ekvivalentní je dokázat, že s každými dvěma vektory a, $b \in L$ patří do L i jejich libovolná lineární kombinace $\alpha a + \beta b$. Pokud tomu tak bude, není třeba prověřovat nic dalšího. Algebraické operace zúžením definičního oboru své vlastnosti neztratí. Množina L již bude automaticky obsahovat nulu 0_{V_n}, která bude plnit funkci neutrálního prvku také v podprostoru L, a také s každým svým prvkem a i prvek opačný, $-a$. Nevěříte? Vezmeme-li prvek $a \in L$, pak $0_{V_n} = 0 \cdot a$ a $-a = (-1)a$. A to jsou skalární násobky vektoru a.

V příkladu 4.24 jsme generovali *dvojrozměrný* vektorový podprostor *dvěma* lineárně nezávislými vektory. Jak tomu však bude v případě, že předem nevíme, zda je generující soubor vektorů lineárně nezávislý? Bude množina všech jejich lineárních kombinací opět vektorovým podprostorem původního prostoru? A pokud ano, jaký bude jeho rozměr? Na tyto otázky odpovíme obecně v následujících příkladech.

Nechť $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je systém vektorů ve V_n. Množinu

$$L = [|(a_1, a_2, \ldots, a_k)|] = \{\gamma^1 a_1 + \gamma^2 a_2 + \cdots + \gamma^k a_k, \gamma^1, \ldots, \gamma^k \in \mathbf{C}\}$$

nazýváme *lineárním obalem* systému $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Příklad 4.25: Je lineární obal vektorovým podprostorem?

Přesvědčíme se, že s každými dvěma vektory $b, d \in L$, $L = [|(a_1, a_2, \ldots, a_k)|]$, $b = \beta^1 a_1 + \cdots + \beta^k a_k$ a $d = \delta^1 a_1 + \cdots + \delta^k a_k$, patří do L i jejich součet a s každým vektorem $b \in L$ jeho libovolný násobek:

$$b + d = (\beta^1 a_1 + \cdots + \beta^k a_k) + (\delta^1 a_1 + \cdots + \delta^k a_k) =$$

$$= (\beta^1 + \delta^1) a_1 + \cdots + (\beta^k + \delta^k) a_k,$$

$$\alpha b = \alpha(\beta^1 a_1 + \cdots + \beta^k a_k) = (\alpha\beta^1) a_1 + \cdots + (\alpha\beta^k) a_k.$$

Zjistili jsme, že vektory $b+d$ a αb jsou opět lineárními kombinacemi vektorů generujícího systému $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Lineární obal libovolného systému vektorů prostoru V_n je tedy vektorovým podprostorem V_n.

Příklad 4.26: A jaký má rozměr?

Systém vektorů, kterým generujeme lineární obal, musíme nějak zadat. Nejčastěji to děláme pomocí jejich složek v jisté předem zvolené bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ prostoru V_n, tj.

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1^j e_j = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \cdots + \alpha_1^n e_n\,, \\ a_2 &= \alpha_2^j e_j = \alpha_2^1 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \cdots + \alpha_2^n e_n\,, \\ \ldots\ &..\ \ldots\ldots\ldots\

jsou tedy právě vektory a_1, a_2, …, a_h. Jejich počet h určuje dimenzi lineárního obalu původního systému $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

> Dimenze lineárního obalu vektorů $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je rovna hodnosti matice tvořené složkami těchto vektorů.

Hodnost zjistíme úpravou na schodovitý tvar. Jeho nenulové řádky pak obsahují složky nových vektorů, které jsou již lineárně nezávislé, avšak generují týž podprostor a tvoří jeho bázi.

A mohlo by něco bránit volbě volných neznámých podle návodu v příkladu 4.26? Třeba není možné vždy volit posledních $d = k - h$ neznámých jako volné? I to se může stát. Ukážeme to v dalším příkladu.

Příklad 4.27: Jak tedy volit volné neznámé?

Uvažujme o podprostoru, který je generován souborem vektorů v $\mathbf{R}^4$:

$$L = [|(1,\,1,\,0,\,1),\,(1,\,-1,\,0,\,1),\,(1,\,0,\,0,\,1),\,(0,\,2,\,0,\,0),(1,\,1,\,1,\,1)|]\,.$$

Abychom zjistili jeho dimenzi, upravujme nyní na schodovitý tvar matici homogenní soustavy (4.14), která je tvořena složkami zadaných vektorů naskládanými do sloupců:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V matici zůstaly tři nenulové řádky, zadané vektory generují trojrozměrný podprostor v $\mathbf{R}^4$. Řešení soustavy 4.14 bude obsahovat dvě volné neznámé. Obvykle jsme za tyto volné neznámé volili poslední dvě, tj. γ^4 a γ^5. Z předposledního řádku matice vidíme, že tato volba není nyní možná, platí totiž $\gamma^5 = 0$. Pátá neznámá je pevně určena a nemůže proto hrát roli volné neznámé. Z ostatních neznámých γ^1, γ^2, γ^3 a γ^4 můžeme již dvojici volných neznámých vybrat libovolně.

Čím to je? Tentokrát totiž nejsou lineárně nezávislé první tři vektory. Všimněte si, že třetí vektor je součtem prvního a druhého. Čtvrtý vektor je zase rozdílem prvního a druhého. Ať děláme, co děláme, z první čtveřice vektorů jsme schopni vybrat nejvýše dva nezávislé. Do báze podprostoru tedy v každém případě musíme vzít poslední, pátý vektor. Návod v příkladu 4.26 by nám i tentokrát dobře „fungoval“, ale museli bychom vhodně přeskládat pořadí vektorů (v tomto příkladu zařazením posledního vektoru do první trojice).

Příklad 4.28: Teď už zodpovíme všechny otázky soustav lineárních rovnic

Pomocí právě vyřešeného příkladu si můžeme uvědomit další důležitou vlastnost řešení soustav lineárních rovnic. V odstavci 1.1.2, konkrétně ve větě 1.2, jsme viděli, že řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých,

$$(\gamma^1\ \gamma^2\ \ldots\ \gamma^n)\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 & \ldots & b^m \end{pmatrix},$$

pro kterou je společná hodnota hodnosti matice soustavy a matice rozšířené rovna h, závisí na $d = n - h$ volných neznámých, například $\gamma^{h+1}, \gamma^{h+2}, \ldots, \gamma^n$. Zbývající neznámé $\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^h$ jsou v případě homogenní soustavy, kdy $(b) = (b^1\, b^2\, \ldots\, b^m) = (0\,0\,\ldots\,0)$, lineárními funkcemi volných neznámých. Řešení homogenní soustavy má tedy obecně tvar n-tic

$$(\gamma^1, \ldots, \gamma^h, \gamma^{h+1}, \ldots, \gamma^n),$$

kde pro $1 \le i \le h$ platí

$$\gamma^i = c^i_{h+1}\gamma^{h+1} + c^i_{h+2}\gamma^{h+2} + \cdots + c^i_n\gamma^n.$$

Tyto n-tice tvoří v n-rozměrném vektorovém prostoru všech uspořádaných n-tic (operace sčítání n-tic a jejich násobení číslem jsou definovány v příkladu 4.20) $d = (n-h)$-rozměrný vektorový podprostor. Prověřte axiomy vektorového prostoru pro takové n-tice. Rozměr tohoto vektorového prostoru získáme jako počet prvků kterékoli jeho báze. Bázi můžeme vybrat například ve tvaru odpovídajícím nejjednodušší volbě volných neznámých

$$\begin{aligned} u_1 &= (c^1_{h+1}, c^2_{h+1}, \ldots, c^h_{h+1}, 1, 0, \ldots, 0)\,, \\ u_2 &= (c^1_{h+2}, c^2_{h+2}, \ldots, c^h_{h+2}, 0, 1, \ldots, 0)\,, \\ \ldots\ &\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_d &= (c^1_n, c^2_n, \ldots, c^h_n, 0, 0, \ldots, 1)\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Získáváme nový důležitý výsledek:

> Řešení homogenní soustavy m rovnic o n neznámých tvoří $d = (n-h)$-rozměrný vektorový podprostor ve vektorovém prostoru n-tic.

Lze i zapochybovat: V porovnání s tím, co jsme věděli již v odstavci 1.1.2, o nový výsledek bezesporu jde. Přinejmenším se jedná o včlenění známých vlastností řešení lineárních rovnic do obecnější algebraické struktury — vektorového prostoru. Jakou to však může mít důležitost, zejména z praktického hlediska, když přece všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic jsme uměli najít již v odstavci 1.1.2 pomocí různých možných způsobů volby volných neznámých? Tato pochybnost není oprávněná tak docela. Označíme-li některých $(n-h)$ neznámých za volné, víme, že dosazováním všech jejich možných hodnot získáme nekonečně mnoho řešení soustavy rovnic. I kdybychom nehleděli na to, že v takovém dosazování není žádný „rozumný systém“, nedokázali jsme zatím, že takto dostaneme opravdu *všechna* řešení. Opravdu, to, že jich máme nekonečně mnoho, ještě neznamená, že by nemohla existovat ještě nějaká další. Co kdybychom třeba volili volné neznámé jinak? Dostaneme stejný soubor řešení? Skutečnost, že řešení soustavy tvoří vektorový prostor, umožňuje na tyto otázky snadno odpovědět, a ještě navíc vnáší do popisu všech řešení onen žádaný „rozumný systém“. Co to znamená, že n-tice řešení dané soustavy tvoří vektorový podprostor v prostoru všech n-tic? Jednoduše to, že každá n-tice, která vyhovuje soustavě, je prvkem tohoto vektorového podprostoru a naopak, každý prvek podprostoru je n-ticí, které nezbývá nic jiného než splňovat soustavu rovnic. Také víme, že k tomu, abychom popsali všechny prvky vektorového podprostoru, v našem případě $d = (n-h)$-rozměrného, jichž je nekonečně mnoho, stačí najít libovolných d jeho prvků tvořících jeho bázi. Z nich pak zkonstruujeme všechny prvky pomocí lineárních kombinací. Bez ohledu na volbu báze, tj. i bez ohledu na výběr toho, které neznámé budeme považovat za volné, dostaneme popis všech řešení soustavy. Je-li $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$ báze vektorového podprostoru řešení soustavy, zvolená například podle (4.15), pak takzvané *obecné řešení* homogenní soustavy rovnic má tvar

$$u = \beta^1 u_1 + \beta^2 u_2 + \cdots + \beta^d u_d, \quad \beta^j \in \mathbf{C} \text{ nebo } \mathbf{R}, \quad 1 \le j \le d. \tag{4.16}$$

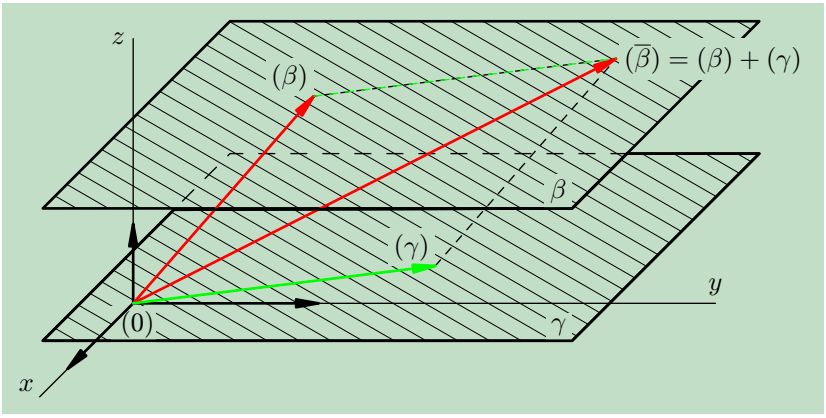
Zůstává ještě otázka obecného řešení nehomogenní soustavy m rovnic o n neznámých. I tu snadno zodpovíme pomocí úvah o vektorových prostorech. Uvažujme o takové soustavě v maticovém zápisu

$$(\beta)\, A = (b).$$

Neznámou n-tici $(\beta) = (\beta^1\, \beta^2\, \ldots\, \beta^n)$ jsme nyní zapsali jako řádkovou matici (tj. jako vektor), stejně jako m-tici představující vektor pravých stran jednotlivých rovnic. Matice A je typu n/m, jedná se tedy o transponovanou matici soustavy podle terminologie z kapitoly 1. Předpokládejme, že n-tice (γ) je řešením homogenní soustavy $(\gamma)A = (0)$, kde (0) je nulová matice typu $1/m$. Sečtením obou soustav dostáváme

$$((\gamma) + (\beta))A = (b).$$

Zjišťujeme, že spolu s každou n-ticí (β), která je řešením nehomogenní soustavy, je řešením soustavy také n-tice $(\bar{\beta}) = (\gamma) + (\beta)$. Naopak, každé dvě n-tice $(\bar{\beta})$ a (β), které jsou řešením nehomogenní soustavy, se nutně liší o n-tici (γ), která je řešením odpovídající homogenní soustavy o stejné matici A. Abychom našli všechna řešení nehomogenní soustavy, stačí najít obecné řešení soustavy homogenní a jedno (kterékoli) řešení soustavy nehomogenní, takzvané *partikulární řešení*. Jejich součet pak popisuje všechna možná řešení nehomogenní soustavy. Tento algebraický výsledek má velmi jednoduchou geometrickou interpretaci (viz obr. 4.20). Správné pochopení



Obr. 4.20 Obecné řešení nehomogenní soustavy rovnic.

obrázku 4.20 vyžaduje, abychom si každou n-tici představili jako soubor souřadnic bodu v n-rozměrném euklidovském prostoru. Obrázek je konstruován pro $n = 3$. „Základním“ bodem je počátek $(0, 0, \ldots, 0)$, tj. n-tice, která je řešením každé homogenní soustavy. Ostatní řešení homogenní soustavy si představíme jako koncové body vázaných vektorů umístěných v počátku, jimž odpovídají volné vektory náležející vektorovému podprostoru tvořenému řešeními homogenní soustavy. (V obrázku vytvoří koncové body takových vázaných vektorů rovinu γ.) Partikulární řešení nehomogenní soustavy posouvá tento „vázaný“ vektorový podprostor do jiného bodu o souřadnicích $(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$ euklidovského prostoru (v obrázku rovina β).

Výsledky, ke kterým jsme dospěli v předcházejících odstavcích, si formulujeme v následující větě:

Věta 4.1 (Princip superpozice): *Množina všech řešení homogenní soustavy m lineárních rovnic o n neznámých tvoří $(n - h)$ rozměrný podprostor ve vektorovém prostoru všech uspořádaných n-tic (tj. v $\mathbf{R}^n$), kde h je hodnost matice soustavy.*

Bezprostředním důsledkem předchozí věty je následující tvrzení.

Obecné řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic je součtem obecného řešení odpovídající homogenní soustavy a libovolného partikulárního řešení soustavy nehomogenní.

Příklad 4.29: Dimenze vektorového podprostoru prakticky

Uvažujme, že v pětirozměrném vektorovém prostoru jsou v dané bázi zadány čtyři vektory

$$a_1 = (1, -1, 2, 0, -1),\ a_2 = (0, 2, -1, 0, 1),\ a_3 = (1, 1, 1, 0, 0),\ a_4 = (1, -3, 3, 0, -2).$$

Určitě generují nějaký vektorový podprostor $L \subset V_5$. Ale jakou má dimenzi? A jaké vektory budou tvořit jeho bázi? Podle toho, co jsme si řekli v předchozím textu, stačí k zodpovězení těchto otázek upravit na schodovitý tvar matici, jejíž řádky jsou tvořeny zadanými vektory.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

První úprava spočívala v odečtení prvého řádku od třetího a od čtvrtého, druhá úprava již byla zřejmá a vedla přímo ke schodovitému tvaru. Schodovitý tvar matice má dva nenulové řádky, její hodnost a tedy i dimenze vektorového podprostoru L je $\dim L = 2$. Bázi tohoto podprostoru tvoří například vektory a_1 a a_2.

Z předchozích příkladů vidíme, že v daném vektorovém prostoru V_n můžeme nalézt nekonečné množství vektorových podprostorů všech možných dimenzí k mezi nulou a n, tj. $0 \leq k \leq \leq n$. Nulovou dimenzi má jedině triviální podprostor $\{0_{V_n}\}$, tvořený pouze nulovým vektorem, dimenzi n má jedině prostor V_n samotný, který rovněž považujeme za triviální podprostor.

Zbytek odstavce o podprostorech je sice neméně důležitý jako dosavadní text, ale prozatím je možné se bez něj obejít. Kdo chce rychleji pokročit, může přejít rovnou k tématu o lineárních zobrazeních a ke studiu dalších vlastností vektorových podprostorů se podle potřeby vrátit později.

Příklad 4.30: Vektorové podprostory lze sčítat

Uvažujme o dvou vektorových podprostorech L a L' o dimenzích k a k' téhož vektorového prostoru V_n. Označme

$$L + L' = \{c \in V_n | c = a + a',\ a \in L,\ a' \in L'\}. \tag{4.17}$$

Vyznačili jsme tedy množinu všech takových vektorů, které lze vyjádřit jako součet dvou vektorů, z nichž jeden náleží podprostoru L a druhý podprostoru L'. Obecně takové vyjádření nemusí být jednoznačné, mohou existovat jiné vektory $b \in L$ a $b' \in L'$ takové, že platí $c = a + a' = b + b'$. Zkoumejme algebraickou strukturu množiny $L + L'$. Zvolme v L a L' báze $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ a $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{k'})$. Nechť $c \in L + L'$. Pak podle definice je $c = a + a'$, $a \in L$, $a' \in L'$. Vektory a a a' jsou však lineárními kombinacemi bází jednotlivých vektorových podprostorů L a L', tj.

$$a = \alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \ldots + \alpha^k a_k \qquad a' = (\alpha^1)' a'_1 + (\alpha^2)' a'_2 + \ldots + (\alpha^k)' a'_{k'}.$$

Vektor c je tedy lineární kombinací vektorů, které generují L, a vektorů, které generují L'. Naopak, je-li nějaký vektor d lineární kombinací systému $(a_1, \ldots, a_k, a'_1, \ldots, a'_{k'})$, lze jej vyjádřit jako prvek množiny $L + L'$:

$$d = (\gamma^1 a_1 + \ldots + \gamma^k a_k) + ((\gamma^1)' a'_1 + \ldots + (\gamma^k)' a'_{k'}) \in L + L'.$$

Vidíme, že $L + L'$ je vektorovým podprostorem ve V_n, a platí

$$L + L' = [|a_1, \ldots, a_k, a'_1, \ldots, a'_{k'}|], \quad \text{označujeme} \quad [|L \cup L'|].$$

Vektorový podprostor $L + L'$ nazýváme *součtem* vektorových podprostorů L a L'. Je roven lineárnímu obalu sjednocení obou podprostorů, tj. je generován například systémem vektorů vytvořeným z bází obou podprostorů.

Obecně můžeme obdobným způsobem jako v příkladu 4.30 definovat i součet více podprostorů L_1, L_2, …, L_s vektorového prostoru V_n.

Součtem vektorových podprostorů L_1, L_2, …, L_s vektorového prostoru V_n rozumíme vektorový podprostor

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_s = \{b \in V_n \,|\, b = a_1 + a_2 + \cdots + a_s,\ a_1 \in L_1, \ldots, a_s \in L_s\}.$$

Příklad 4.31: Vektorový podprostor lze doplnit

Vraťme se k jednoduchému příkladu 4.24. Vektorový podprostor $L \in V_3$ jsme generovali dvěma vektory báze, $L = [|e_1, e_2|]$. Třetí vektor báze dokáže také vygenerovat vektorový podprostor, označme jej $L' = [|e_3|] = \{b \in V_3 | b = \beta e_3, \beta \in \mathbf{R} \text{ nebo } \mathbf{C}\}$. Prvky vektorového podprostoru L' mají v bázi (e_1, e_2, e_3) složky $(0, 0, \alpha^3)$. Z předchozího příkladu víme, že platí

$$L + L' = [|e_1, e_2, e_3|].$$

Ale to je celý prostor V_3! Zároveň je však jasné, že $L \cap L' = \{0_{V_3}\}$. Skutečně, pokud je nějaký vektor c prvkem průniku podprostorů L a L', musí mít tvar jak lineární kombinace $c = \gamma^1 e_1 + \gamma^2 e_2$, tak lineární kombinace $c = \gamma^3 e_3$. Pak

$$\gamma^1 e_1 + \gamma^2 e_2 = \gamma^3 e_3 \quad \Longrightarrow \quad \gamma^1 e_1 + \gamma^2 e_2 - \gamma^3 e_3 = 0_{V_3}.$$

Protože jsou vektory e_1, e_2 a e_3 lineárně nezávislé, je $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = 0$. Vektor c je tedy nulový. Vektorové podprostory L a L' se doplňují, dohromady dávají celý prostor V_3. Vektorový podprostor L' je *doplňkem* vektorového podprostoru L ve V_3 a naopak, vektorový podprostor L je doplňkem vektorového podprostoru L' ve V_3. Všimněme si, že součet dimenzí doplňkových podprostorů je roven dimenzi celého prostoru $(2 + 1 = 3)$.

Pomocí příkladů 4.30 a 4.31 můžeme zobecnit definici doplňku vektorového podprostoru.

Řekneme, že vektorový podprostor L' je *doplňkem* vektorového podprostoru L v prostoru V_n, jestliže platí

$$L + L' = V_n, \quad L \cap L' = \{0_{V_n}\}. \tag{4.18}$$

V tomto případě nazýváme součet vektorových podprostorů L a L' *přímý*.

Označme $k = \dim L$, $k' = \dim L'$. Uvědomíme-li si, že vektorové podprostory L, L' můžeme generovat jejich bázemi, tj.

$$L = [|e_1, e_2, \ldots, e_k|], \quad L' = [|e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{k+k'}|],$$

a že jejich průnik obsahuje pouze nulový vektor, ihned vidíme, že $k + k' = n$, tj. $k' = n - k$. Vektory $(e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+k'})$ totiž musí tvořit bázi celého prostoru V_n, jejich celkový počet je proto n. Doplňkové prostory tedy mají i doplňkové dimenze. Tento výsledek můžeme ještě dále zobecnit, a to na případ většího počtu vektorových podprostorů.

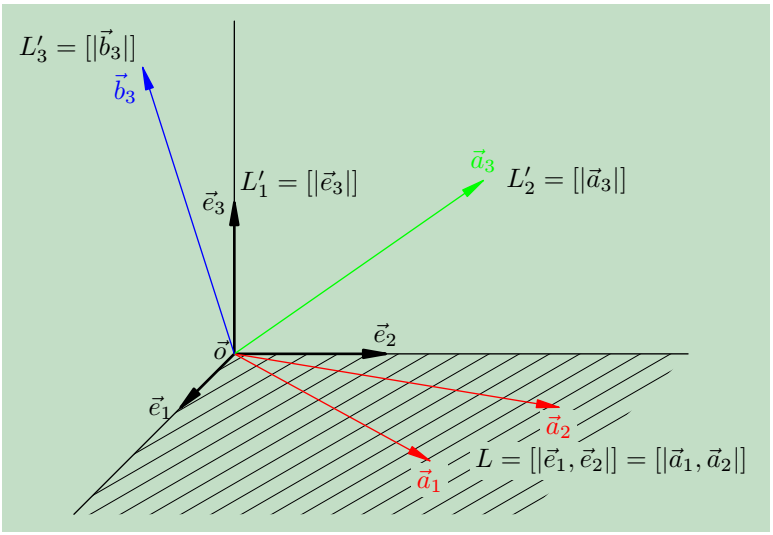
Jsou-li $L_1, L_2, \ldots L_s$ vektorové prostory s dimenzemi $k_1, k_2, \ldots k_s$ a platí-li $L_i \cap L_j = \{0_{V_n}\}$ pro všechny indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $i \neq j$, pak

$$\dim (L_1 + L_2 + \cdots + L_s) = \dim L_1 + \dim L_2 + \cdots + \dim L_s = \sum_{i=1}^{s} k_s.$$

Je-li navíc $L_1 + L_2 + \cdots + L_s = V_n$, platí $\sum_{i=1}^{s} k_s = n$.

Příklad 4.32: Kolika způsoby lze vektorový podprostor doplnit?

Pro odpověď na tuto otázku se obraťme opět k příkladu 4.24 a k obrázku 4.21, který představuje „realizaci“ abstraktního příkladu 4.24 v podobě vektorového prostoru tvořeného orientovanými úsečkami. Podprostor $L = [|\vec{e}_1, \vec{e}_2|]$ je generován vektory báze $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$. (Uvědomte si, že místo nich bychom mohli vzít lineární kombinace těchto vektorů, například $\vec{a}_1 = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2$, $\vec{a}_2 = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^2\vec{e}_2$, od kterých bychom požadovali pouze to, aby byly lineárně nezávislé. Vektory $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$ by pak generovaly týž podprostor L. Zkuste si promyslet, jakou hodnost musí mít matice typu 2/2 utvořená z koeficientů α^1, α^2, β^1, β^2, aby vektory $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$ byly opravdu nezávislé.



Obr. 4.21 Různé doplňky vektorového podprostoru.

Ověřte, že generující vektory $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$ lze zapsat jako lineární kombinace nových generujících vektorů $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$.) Doplněk vektorového prostoru L ve V_3 musí být jednorozměrný. Bude tedy generován jedním vektorem, řekněme $\vec{c}$, $L' = [|\vec{c}|]$. V bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ bude mít tento vektor složky $\vec{c} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. Jaké vlastnosti musí mít matice utvořená ze složek vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ a $\vec{c}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma^1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{pmatrix},$$

aby se podprostory L a L' opravdu doplňovaly? Z požadavku $L + L' = V_3$ plyne, že je třeba, aby tato matice měla hodnost 3. K tomu je nutné a stačí, aby $\gamma^3 \neq 0$. Pokud bude tato podmínka splněna, bude splněna i podmínka druhá, tj. $L \cap L' = \{\vec{o}\}$. Žádná lineární kombinace vektorů $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ a $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ nemůže mít totiž třetí složku nenulovou. Popsali jsme tak všechny doplňky vektorového podprostoru L. Je jich nekonečně mnoho. Každý z nich je generován vektorem tvaru $\gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^3\vec{e}_3$. Na čísla γ^1, γ^2 a γ^3 nejsou kladeny žádné požadavky s výjimkou jediného, $\gamma^3 \neq 0$. Situaci si snadno představíme i geometricky. Každý vektor, který neleží v rovině vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, generuje právě jeden doplněk podprostoru L ve V_3. V obrázku 4.21 jsou vyznačeny tři různé doplňky.

Příklad 4.33: Rozklady vektorů

S rozkladem vektorů jsme se již setkali. Zápis vektoru jako lineární kombinace vektorů báze můžeme totiž jako rozklad chápat. Vektory báze e_1, e_2, …, e_n vektorového prostoru V_n generují jednorozměrné vektorové podprostory

$$L_1 = [|e_1|],\ L_2 = [|e_2|],\ \ldots,\ L_n = [|e_n|],$$

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n = V_n, \quad L_i \cap L_j = \{0_{V_n}\}, \quad i \neq j.$$

Víme již, že libovolný vektor $a \in V_n$ můžeme zapsat ve tvaru

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^n e_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \ a_1 = \alpha^1 e_1, \ldots,\ a_n = \alpha^n e_n,\ \ a_1 \in L_1,\ \ldots,\ a_n \in L_n.$$

Zápis vektoru jako lineární kombinace vektorů báze můžeme nazvat jeho *rozkladem* do podprostorů L_1, L_2, …, L_n. Dokázali jsme si také, že tento rozklad je jednoznačný. Obdobně při rozkladu postupujeme i tehdy, nejsou-li vektorové podprostory, do nichž vektor rozkládáme, jednorozměrné. Nechť pro jednoduchost jsou L a L' dva navzájem doplňkové vektorové podprostory ve V_n s dimenzemi k a $n - k$ a bázemi $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ a $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)$. Nechť $b \in V_n$ je libovolný vektor. Protože systém všech vektorů $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tvoří v prostoru V_n bázi, máme jednoznačný rozklad

$$b = (\alpha^1 a_1 + \cdots + \alpha^k a_k) + (\alpha^{k+1} a_{k+1} + \cdots + \alpha^n a_n),$$

který jsme opatřili závorkováním tak, aby bylo ihned vidět, že je vektor b součtem dvou jednoznačně určených vektorů

$$a = \alpha^1 a_1 + \cdots + \alpha^k a_k \in L, \quad a' = \alpha^{k+1} a_{k+1} + \cdots + \alpha^n a_n \in L'.$$

Jakmile tedy zvolíme k podprostoru L ze všech možností nějaký konkrétní doplněk, je již rozklad libovolného vektoru na součet vektorů $a \in L$ a $a' \in L'$ jednoznačný.

Příklad 4.34: Společné prvky vektorových podprostorů

A opět se vraťme k příkladu 4.24. Tentokrát nebudeme spolu s vektorovým podprostorem $L = [|e_1, e_2|]$ ve V_3 uvažovat o jeho doplňcích, ale o některém dalším vektorovém podprostoru M, například $M = [|e_2, e_3|]$. Tento podprostor je rovněž dvojrozměrný, stejně jako L. Součet jejich dimenzí je $2 + 2 = 4 > 3$, budou tedy mít jistě společné i jiné vektory než jen vektor nulový. Na první pohled vidíme, že množina společných vektorů, $L \cap M$, bude určitě obsahovat vektor e_2 a všechny jeho násobky. Bude však obsahovat jen tyto vektory, nebo i některé jiné? Na tuto otázku odpovíme velmi snadno. Všechny vektory z L mají tvar lineární kombinace $a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2$, všechny vektory z M jsou tvaru $b = \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3$. Pro libovolný vektor $c \in L \cap M$, společný oběma podprostorům, musí vyhovovat oba zápisy, tj.

$$c = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 = \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 \Longrightarrow \alpha^1 e_1 + (\alpha^2 - \beta^2) e_2 + (-\beta^3) e_3 = 0_{V_3}.$$

Vektory e_1, e_2, e_3 jsou ovšem nezávislé. Vytvořit z nich nulovou lineární kombinaci je možné právě jen s nulovými koeficienty. Proto

$$\alpha^1 = 0,\ \alpha^2 - \beta^2 = 0,\ \beta^3 = 0 \implies c = \alpha^2 e_2 = \beta^2 e_2 \implies L \cap M = [|e_2|].$$

Průnik vektorových podprostorů je tvořen právě násobky vektoru e_2, jak jsme očekávali. Vidíme současně, že je jednorozměrným vektorovým podprostorem ve V_3.

Klademe si otázky, zda průnik dvou vektorových podprostorů ve V_n bude obecně rovněž vektorovým podprostorem a jaká bude v takovém případě jeho dimenze. Odpověď na první otázku je snadná. Vzpomeňme si, že při ověřování, zda podmnožina prostoru V_n je sama vektorovým prostorem, musíme posuzovat její uzavřenost vzhledem k operacím součtu a násobení skalárem. Předpokládejme, že $L_1, L_2 \subset V_n$ jsou vektorové podprostory dimenzí k_1 a k_2 ve V_n a zvolme libovolně vektory $a, b \in L_1 \cap L_2$. Dále zvolme libovolný skalár α. Pak $a, b \in L_1 \Rightarrow a + b \in L_1$, $\alpha a \in L_1$ a současně $a, b \in L_2 \Rightarrow a + b \in L_2$, $\alpha a \in L_2$. Odtud $a + b \in L_1 \cap L_2$ a $\alpha a \in L_1 \cap L_2$ pro libovolné číslo α. Průnik vektorových podprostorů je sám rovněž vektorovým podprostorem. Nyní si poradíme s jeho dimenzí. Označme $L = L_1 + L_2$, $M = L_1 \cap L_2$, $\dim M = m$, $\dim L = \ell$. Pracujeme se čtyřmi vektorovými prostory L_1, L_2, L a M, pro něž platí $M \subset L_1 \subset L$, $M \subset L_2 \subset L$. M je tedy vektorovým podprostorem ve všech ostatních prostorech L_1, L_2, L. Označme $M_1 \subset L_1$, $M_2 \subset L_2$ libovolné doplňky podprostoru M v podprostorech L_1 a L_2. Platí $\dim M_1 = k_1 - m$, $\dim M_2 = k_2 - m$. Současně

$$L_1 + L_2 = M + M_1 + M_2, \quad M \cap M_1 = M \cap M_2 = M_1 \cap M_2 = \{0_{L_1+L_2}\} = \{0_{V_n}\}.$$

Pro dimenze vektorových podprostorů z předchozího vztahu vyplývá

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim M + \dim M_1 + \dim M_2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \ell = m + (k_1 - m) + (k_2 - m) = k_1 + k_2 - m,$$

tedy

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2). \tag{4.19}$$

Příklad 4.35: Součet a průnik podprostorů pro praktiky

Vektorové podprostory ve V_4 jsou zadány složkami svých generujících vektorů v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) takto:

$$L_1 = [|(1, -1, 0, 2), (0, 2, -1, 1), (2, 0, -1, 5)|],$$

$$L_2 = [|(1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1), (-1, 3, -1, -1)|].$$

Naším úkolem je zjistit dimenze a najít báze těchto podprostorů, jejich součtu a průniku. Víme, že k tomu stačí upravovat příslušné matice, tvořené složkami generujících vektorů umístěných do řádků, na schodovitý tvar.

$$\dim L_1 = h\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

První úprava matice spočívala v odečtení dvojnásobku prvého řádku od třetího. Prostor L_1 je dvojrozměrný a je generován například bází

$$L_1 = [|(1, -1, 0, 2), (0, 2, -1, 1)|].$$

Pro dimenzi vektorového podprostoru L_2 dostaneme

$$\dim L_2 = h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3\,.$$

Při úpravě jsme nejprve přičetli prvý řádek ke třetímu a pak vyměnili druhý a třetí řádek. Prostor L_2 je trojrozměrný,

$$L_2 = [|(1, 1, 0, 0), (0, 4, -1, -1), (0, 0, -1, 1)|].$$

V dalším už stačí pracovat jen s bázemi vektorových podprostorů.

$$\dim(L_1 + L_2) = h\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4\,.$$

Prostor $(L_1 + L_2)$ je čtyřrozměrný a je generován bází, která současně generuje celý prostor V_4:

$$L_1 + L_2 = [|(1,\,1,\,0,\,0),\,(0,\,1,\,0,\,-1),\,(0,\,0,\,-1,\,1),\,(0,\,0,\,0,\,1)|] = V_4.$$

Podle obecné věty o vztahu dimenzí součtu a průniku podprostorů, kterou jsme před chvílí dokázali, musí být

$$\dim\,(L_1 \cap L_2) = \dim\,L_1 + \dim\,L_2 - \dim\,(L_1 + L_2) = 2 + 3 - 4 = 1\,.$$

Zbývá ještě najít bázi jednorozměrného podprostoru $L_1 \cap L_2$. Společné vektory podprostorů L_1 a L_2 musí být lineárními kombinacemi jak jedné, tak i druhé báze. Je-li tedy $c \in L_1 \cap L_2$, pak

$$c = \alpha(1,\,-1,\,0,\,2) + \beta(0,\,2,\,-1,\,1) =$$

$$= \gamma(1,\,1,\,0,\,0) + \delta(0,\,4,\,-1,\,-1) + \epsilon(0,\,0,\,-1,\,1),$$

a tedy

$$\alpha(1,\,-1,\,0,\,2) + \beta(0,\,2,\,-1,\,1) -$$

$$-\gamma(1,\,1,\,0,\,0) - \delta(0,\,4,\,-1,\,-1) - \epsilon(0,\,0,\,-1,\,1) = (0,\,0,\,0,\,0).$$

„Přečteme-li“ tuto vektorovou rovnici po složkách, dostaneme homogenní soustavu čtyř rovnic pro pět neznámých α, β, γ, δ, ϵ. Její řešení získáme, jak jinak, úpravou matice na schodovitý tvar. Než začnete počítat, předem řekněte, jaká hodnost musí vyjít, víme-li, že podprostor $L_1 \cap L_2$ je jednorozměrný.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice A je podle očekávání $h(A) = 4$, obecné řešení soustavy bude obsahovat jednu volnou neznámou. Zvolme za volnou neznámou δ. Obecné řešení soustavy má pak tvar $(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta,\,\epsilon) = (-\delta,\,\delta,\,-\delta,\,\delta,\,0)$. Pro všechny vektory $c \in L_1 \cap L_2$ dostaneme

$$c = -\delta(1,\,-1,\,0,\,2) + \delta(0,\,2,\,-1,\,1) = \delta(-1,\,3,\,-1,\,-1),$$

a pro kontrolu

$$c = -\delta(1,\,1,\,0,\,0) + \delta(0,\,4,\,-1,\,-1) = \delta(-1,\,3,\,-1,\,-1).$$

Vektor $(-1,\,3,\,-1,\,-1)$ lze zvolit za bázi vektorového podprostoru $L_1 \cap L_2$, tj.

$$L_1 \cap L_2 = [|(-1,\,3,\,-1,\,-1)|].$$

4.1.6 Cvičení

1. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda následující množiny opatřené operací jsou grupami:

a) množina všech reálných polynomů s operací sčítání polynomů,

b) množina všech reálných polynomů s operací násobení polynomů,

c) množina všech bezestopých matic řádu n (tj. matic, které mají nulovou stopu $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_i^i = 0$) s operací sčítání matic,

d) množina diagonálních regulárních matic s operací násobení matic,

e) množina racionálních čísel s operací násobení,

f) množina nenulových racionálních čísel s operací násobení,

g) množina $M = \{a, b, c\}$ s operací $\star : M \times M \to M$, kde $a \star b = b \star a = b$, $a \star c = c \star a = c$, $a \star a = a$, $b \star c = c \star b = a$, $b \star b = c$, $c \star c = b$.

2. Nalezněte příklady podgrup v grupě:

a) permutací na čtyřprvkové množině,

b) celých čísel s operací sčítání,

c) čtvercových regulárních matic řádu n s operací násobení matic,

d) zbytkových tříd modulo 8 s operací sčítání.

Jsou vámi nalezené podgrupy normální? Pokud ano, určete také, jak vypadá faktorová grupa.

∗**3.** Dokažte následující tvrzení: Podgrupa H v grupě G je normální právě tehdy, když pro každý prvek $h \in H$ platí $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$ pro všechna $g \in G$.

4. Uveďte příklady grup a zobrazení mezi nimi, které:

a) není homomorfismem,

b) je epimorfismem, ale není izomorfismem,

c) je monomorfismem, ale není izomorfismem,

d) je izomorfismem.

5. Jsou dány permutace

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Určete $\sigma \circ \nu$, $\nu \circ \sigma$, σ^{-1} a σ^5.

6. Zapište tabulku operace skládání permutací pro množinu permutací na tříprvkové množině.

7. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda následující množiny opatřené dvěma operacemi jsou okruhem, nebo dokonce tělesem:

a) množina matic typu m/n s operacemi sčítání a násobení matic,

b) množina regulárních matic řádu n s operacemi sčítání a násobení matic,

c) množina reálných funkcí reálné proměnné s operacemi sčítání a násobení funkcí,

d) číselné obory $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ s operacemi sčítání a násobení.

8. Uveďte příklad okruhu, který nemá jedničku.

9. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda následující množiny opatřené operacemi sčítání a násobení skalárem jsou vektorovými prostory nad $\mathbf{R}$, v kladném případě určete jejich dimenzi a nalezněte nějakou bázi:

a) množina V všech matic typu $1/2$ nad $\mathbf{R}$ se sčítáním matic, ale násobením skalárem definovaným triviálně $a \odot (x \;\; y) = (x \;\; y)$ pro všechna $a \in \mathbf{R}$ a všechna $(x \;\; y) \in V$,

b) množina všech polynomů s reálnými koeficienty stupně nejméně 2 a nejvýše 4, doplněná nulovým polynomem, s běžnými operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem,

c) množina $\mathbf{P}[n]$ všech polynomů s reálnými koeficienty stupně nejvýše n s běžnými operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem,

d) množina $V = \mathbf{R}^3$ s operacemi $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ a $k(x, y, z) = (x, ky, kz)$,

e) množina $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \geq 0\}$ s operacemi $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $k(x, y) = (kx, ky)$,

f) množina $V = \{(2, x) | x \in \mathbf{R}\}$ s operacemi $(2, x) + (2, x') = (2, x + x')$, $k(2, x) = (2, kx)$,

g) množina diagonálních matic řádu 2 s operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.

10. Najděte souřadnice vektoru v v bázi $\mathcal{B}$ prostoru V nad $\mathbf{R}$:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $v = (1, 2, 1)$, $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0))$,

b) $V = \mathbf{P}[2]$, $v = x^2 - 4x$, $\mathcal{B} = \big(x + 1, x^2 + 1, x^2 + x + 1\big)$,

c) V je prostor čtvercových matic řádu 2,

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

11. Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorových prostorů nad $\mathbf{R}$ mají strukturu vektorového podprostoru. V kladném případě určete jeho dimenzi, nalezněte nějakou bázi a tuto bázi pak doplňte dalšími vektory na bázi celého prostoru:

a) podmnožina P v prostoru čtvercových matic řádu 2, pro které $a_{11} + a_{22} = 0$, (matice s nulovou stopou),

b) podmnožina $P \subset \mathbf{R}^2$, $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x + y = 0\}$,

c) podmnožina $P \subset \mathbf{R}^2$, $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x + y = 1\}$,

d) podmnožina $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ všech celých čísel,

e) podmnožina $P \subset \mathbf{P}[4]$, $P = \{P(x) \in \mathbf{P}[4] | P(x) = P(-x)\}$,

f) podmnožina $P \subset \mathbf{P}[4]$, $P = \{P(x) \in \mathbf{P}[4] | P(-1) = P(1) = 0\}$.

12. Jsou zadány podprostory L_1, L_2. Určete jejich bázi a dimenzi. Určete dimenzi a bázi součtu a průniku těchto podprostorů. Ke každému z prostorů určete také jeho doplněk. Bude tento doplňek určen jednoznačně?

a) V $\mathbf{R}^3$:
$L_1 = [|(1, 2, -1), (-1, 0, 2), (2, -1, 0), (1, 1, 1)|]$,
$L_2 = [|(0, 2, 1), (1, 4, 0)|]$,

b) V $\mathbf{R}^4$:
$L_1 = [|(1, -1, 0, 1), (1, 2, 0, 3), (3, 0, 0, 5)|]$,
$L_2 = [|(0, -1, 1, 4), (0, 2, 3, 2), (0, 0, 1, 2)|]$,

c) V $\mathbf{P}[6]$:
$L_1 = [|x+1, x^2+1, 2x^2-2x|]$,
$L_2 = [|1, x^2+x, x^3|]$,

d) V prostoru čtvercových matic řádu 2:
L_1 je podmnožina všech matic s nulovou stopou (nulovým součtem diagonálních prvků),
L_2 je podmnožina všech diagonálních matic.

13. Ukažte, že množina $V = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}$ s operacemi $x \oplus y = x \cdot y$, $t \odot x = x^t$ má strukturu vektorového prostoru nad $\mathbf{R}$. Určete jeho dimenzi d a nalezněte nějaký jeho izomorfismus s d-rozměrným prostorem $\mathbf{R}^d$.

14. Ukažte, že z vlastností okruhu uvedených v příkladu 4.13 vyplývá

- $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ pro všechna a,
- $(-1) \cdot a = -a$ pro všechna a.

15. Ukažte, že v libovolném okruhu platí: Existuje-li ke každému nenulovému prvku prvek inverzní, pak okruh nemá dělitele nuly. Tj. vlastnost „neexistence dělitelů nuly“ (v příkladu 4.13 označená číslem (5)) je důsledkem vlastnosti „existence inverzního prvku ke každému nenulovému prvku“ (v příkladu 4.13 označená číslem (6)).

16. Ukažte, že v definici vektorového prostoru můžeme poslední z axiomů $(-1)a = -a$ nahradit axiomem $1a = a$ (tj. definice s takto zaměněným axiomem bude ekvivalentní s původní definicí).

4.2 Lineární zobrazení vektorových prostorů

S pojmem zobrazení jsme se setkali již vícekrát. Proto si umíme představit, o co při zobrazování vektorových prostorů půjde. Vzorům — vektorům jednoho vektorového prostoru, řekněme V_n, budeme zobrazením φ přiřazovat obrazy — vektory obecně jiného vektorového prostoru, třeba W_m. Ve speciálních, ale prakticky velmi důležitých případech může být $W_m = V_n$. Jak si však máme představit, že zobrazení

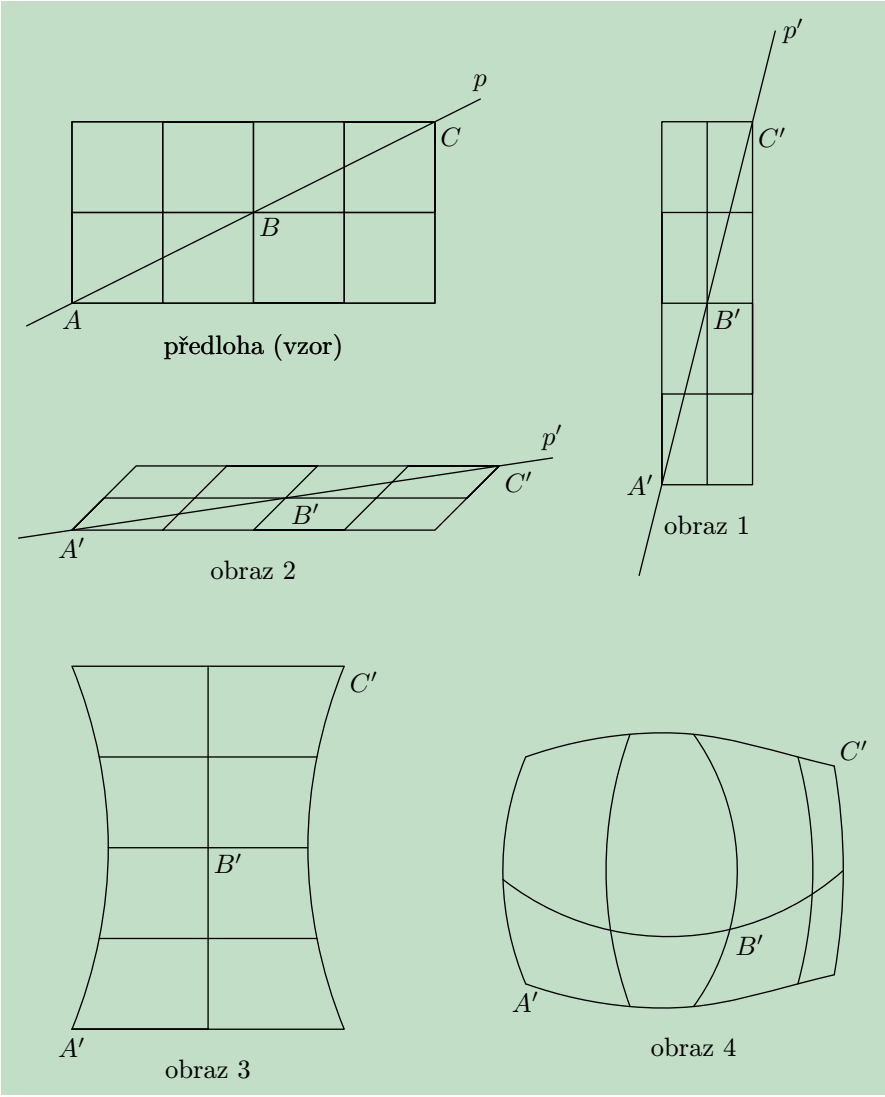
$$\varphi : V_n \ni a \longrightarrow \varphi(a) \in W_m \tag{4.20}$$

je lineární? I zde již jakousi představu máme. Vzpomeňme třeba na lineární funkci, zobrazení $f : \mathbf{R} \ni x \to f(x) = kx \in \mathbf{R}$. Jedná se o přímou úměru, pro kterou snadno ověříme, že platí

$$f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = f(x_1) + f(x_2),$$

$$f(\alpha x) = k(\alpha x) = \alpha(kx) = \alpha f(x).$$

Ještě lepší představa o linearitě je geometrická. Podívejte se na obrázek 4.22. Je na něm čtvercová mřížka (vzor) a různé její obrazy, které podle ní jako předlohy namalovali různí malíři. Zkuste říci, který z nich zobrazuje mřížku lineárně, tj. jaksi „úměrně“? Snadno usoudíme, že první dva určitě ano, třetí a čtvrtý určitě ne. Jak jsme to poznali? Jistě nám při tom pomohla určitá geometrická intuice, kterou každý získává ze zkušenosti. Linearitu obrazu mřížky však dokážeme vystihnout i přesněji. Všimněte si, že obrazy prvých dvou malířů ponechávají *všechny*



Obr. 4.22 Která mřížka je lineárním obrazem předlohy?

přímky přímkami (libovolné body A, B, C, které ležely v přímce na předloze, leží v přímce i na obraze), zatímco u druhých dvou tomu tak není. (U obrazu 3 se jen *některé* přímky zobrazily opět v přímky.) Obdobným a možná ještě názornějším příkladem, který je sice z hlediska obecné definice příliš speciální, zato se s ním již každý jistě setkal, je fotografování. Máme-li si být na fotografii podobní, musí být fotografie věrnou zmenšeninou skutečnosti. Při takovém zobrazení tedy musí být zachovány proporce předlohy, tj. poměry vzdáleností a úhly. Tato charakteristika linearity je již docela výstižná z geometrického hlediska, my však potřebujeme definici algebraickou. V následujícím odstavci ji formulujeme korektně poté, co k ní téměř dospějeme na základě realistických — fyzikálních — situací.

4.2.1 Lineární zobrazení algebraicky

Znovu si uvědomme, že linearita znamená úměru. Případy úměry však mohou být jak ty nejjednodušší, tak i obecnější, u nichž si třeba ani hned neuvědomíme, že se o úměru jedná. Vydejme se tedy za úměrami do oblasti fyziky.

Příklad úměry skalárních veličin: Pro takový příklad nemusíme chodit daleko. Dokonce stačí se vrátit k odstavci 1.1, kde jsme mluvili o Ohmově zákonu (viz též obr. 1.3). Budeme-li měnit napětí mezi konci kovového drátu, zjistíme (nebude-li napětí příliš velké, aby se drát moc nezahříval), že čím větší je napětí, tím větší teče drátem proud. Jedná se o lineární závislost (úměru) tvaru $I = I(U) = R^{-1}U$, konstantou úměrnosti je převrácená hodnota elektrického odporu drátu. Změníme-li napětí z hodnoty U, při níž teče drátem proud $I = R^{-1}U$, *o hodnotu* ΔU, poteče drátem proud

$$I(U + \Delta U) = R^{-1}(U + \Delta U) = R^{-1}U + R^{-1}\Delta U = I(U) + I(\Delta U),$$

tedy proud změněný *o hodnotu* $\Delta I = R^{-1}\Delta U$. Změníme-li napětí α*-krát*, změní se proud také α-krát,

$$I(\alpha U) = R^{-1}(\alpha U) = \alpha R^{-1}U = \alpha I(U).$$

Nebo obecněji

$$I(U_1 + U_2) = I(U_1) + I(U_2), \quad I(\alpha U) = \alpha I(U).$$

Speciální příklad úměry vektorových veličin: Při zkoumání rotačního pohybu soustavy částic či tělesa se spojitě rozloženou hmotností pracujeme s momentem hybnosti $\vec{L}$ této soustavy či tělesa, jehož derivace podle času je určena výsledným momentem vnějších sil (druhá impulzová věta). Pokud se jedná o speciální případ tělesa, těleso tuhé, a speciální případ rotačního pohybu, rotaci kolem pevné osy, souvisí moment hybnosti jednoduchým vztahem s kinematickou veličinou popisující tuto rotaci, totiž úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Jestliže je hmotnost tělesa rozložena vůči rotační ose symetricky, je tento vztah zvlášť jednoduchý, má tvar úměry $\vec{L} = J_o\vec{\omega}$, kde J_o je moment setrvačnosti tělesa *vzhledem k ose rotace o*. Obdobný vztah platí i

mezi vektorovými veličinami v jiných oblastech fyziky. Například vztah $\vec{P} = \chi\vec{E}$ určuje, jak se bude polarizovat dielektrické prostředí, vložíme-li je do elektrického pole o intenzitě $\vec{E}$. Vektor $\vec{P}$ se nazývá *polarizace*, veličina $\chi = \varepsilon_0\chi_r$ je charakteristikou prostředí, zvanou *polarizovatelnost* nebo též *dielektrická susceptibilita*. (Známější veličinou je takzvaná *permitivita*, určená vztahem $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_r)$, která popisuje úměru mezi vektorem elektrické indukce a vektorem elektrické intenzity, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, ε_0 je permitivita vakua.) Pro magnetické veličiny je to analogické, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, μ je *magnetická permeabilita*. Opět si všimněme, že pro závislost momentu hybnosti na úhlové rychlosti $\vec{L}(\vec{\omega})$ (a podobně pro závislosti $\vec{P}(\vec{E})$, $\vec{D}(\vec{E})$, $\vec{B}(\vec{H})$) platí

$$\vec{L}(\vec{\omega_1} + \vec{\omega_2}) = J_o(\vec{\omega_1} + \vec{\omega_2}) = J_o\vec{\omega_1} + J_o\vec{\omega_2} = \vec{L}(\vec{\omega_1}) + \vec{L}(\vec{\omega_2}),$$

$$\vec{L}(\alpha\vec{\omega}) = J_o(\alpha\vec{\omega}) = \alpha(J_o\vec{\omega}) = \alpha\vec{L}(\vec{\omega}).$$

Všimněme si také, že vektor na levé straně lineárního vztahu je rovnoběžný s vektorem na straně pravé. Musí tomu tak být vždy?

Obecný příklad úměry vektorových veličin: Z elektrostatiky víme, že existují i takzvaná anizotropní dielektrická prostředí, která se v některých směrech polarizují snadněji než v jiných, vektor polarizace tedy není rovnoběžný s vektorem intenzity elektrického pole, do něhož látku vkládáme. (V praktických důsledcích to vede například k dvojlomu světla v takové látce.) Obdobná situace nastává i u látek magnetických. Jak takovou skutečnost zapsat, aby vztah mezi $\vec{P}$ a $\vec{E}$ byl stále lineární? Co třeba po složkách,

$$P_1 = \chi_1 E_1, \quad P_2 = \chi_2 E_2, \quad P_3 = \chi_3 E_3\,?$$

(Podle fyzikálních zvyklostí zde píšeme, na rozdíl od obecných algebraických vztahů, všechny indexy složek vektorových veličin dolů.) Jakou veličinou by pak byla charakteristika prostředí zadaná hodnotami χ_1, χ_2, χ_3? Skalární určitě ne. A vektorovou? Jakou operaci s vektory by pak předchozí vztah vyjadřoval? Není to ani skalární, ani vektorový součin. Odpověď je v tom, že předchozí vztah mezi $\vec{P}$ a $\vec{E}$ ještě není zcela obecný. Jedno z možných zobecnění vztahů uvedeného typu již známe z mechaniky tuhého tělesa rotujícího kolem pevné osy, jehož hmotnost není vůči této ose rozložena symetricky. V takovém případě rozkládáme moment hybnosti $\vec{L}$ na součet jeho průmětů $\vec{L}_\parallel$ a $\vec{L}_\perp$ do směru osy rotace a do roviny k této ose kolmé. Úhlová rychlost $\vec{\omega}$ má směr osy rotace. Platí (vzpomeňme na mechaniku)

$$\vec{L}_\parallel = \vec{\omega} \int_V \varrho(\vec{q}\cdot\vec{q})\,\mathrm{d}V = J_o\vec{\omega},$$

$$\vec{L}_\perp = -\int_V \varrho(\vec{\omega}\cdot\vec{s})\vec{q}\,\mathrm{d}V,$$

kde $\vec{s}$, resp. $\vec{q}$ je průmět polohového vektoru objemového elementu $\mathrm{d}V$ tělesa do osy rotace, resp. do roviny k této ose kolmé, ϱ je hustota tělesa. Vidíme, že zatímco pro vektor $\vec{L}_\parallel$ platí jednoduchá úměra, vztah pro vektor $\vec{L}_\perp$ je dokonce ještě složitější než předchozí zobecnění vztahu pro polarizaci dielektrika. Každá složka vektoru $\vec{L}_\perp$ je totiž lineárně závislá na *všech* složkách vektoru úhlové rychlosti. Dospíváme tak k poslednímu zobecnění lineárního vztahu mezi vektorovými veličinami:

$$\begin{aligned} L_1 &= J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\,,\\ L_2 &= J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3\,,\\ L_3 &= J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3\,, \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} P_1 &= \chi_{11}E_1 + \chi_{12}E_2 + \chi_{13}E_3\,,\\ P_2 &= \chi_{21}E_1 + \chi_{22}E_2 + \chi_{23}E_3\,,\\ P_3 &= \chi_{31}E_1 + \chi_{32}E_2 + \chi_{33}E_3\,. \end{aligned}$$

Veličiny J a χ nejsou ani skalární, ani vektorové. Můžeme je chápat jako určitá zobrazení, která vektorům úhlové rychlosti (vzorům) přiřazují vektory momentu hybnosti (obrazy), resp. vektorům elektrické intenzity vektory polarizace, apod. Každá ze složek obrazu je lineární kombinací složek vzoru. Z obecných vztahů je vidět, že platí (například pro $\vec{P}$ a $\vec{E}$, kdy označíme vektor $\vec{P}$ jako obraz vektoru $\vec{E}$ získaný zobrazením χ, $\vec{P} = \chi(\vec{E})$),

$$\chi(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \chi(\vec{E}_1) + \chi(\vec{E}_2), \quad \chi(\alpha\vec{E}) = \alpha\chi(\vec{E}).$$

A právě tyto vztahy představují definici linearity zobrazení přiřazujícího vektorovým veličinám jednoho typu (vzorům) vektorové veličiny obecně jiného typu (obrazy). Můžeme tedy konečně formulovat algebraickou definici lineárního zobrazení vektorových prostorů.

Nechť V_n, W_m jsou vektorové prostory nad $\mathbf{C}$, resp. nad $\mathbf{R}$. Zobrazení

$$\varphi : V_n \ni a \longrightarrow \varphi(a) \in W_m$$

se nazývá *lineární*, jestliže pro libovolné vektory $a, b \in V_n$ a libovolné číslo $\alpha \in \mathbf{C}$, resp. $\alpha \in \mathbf{R}$, platí

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a). \tag{4.21}$$

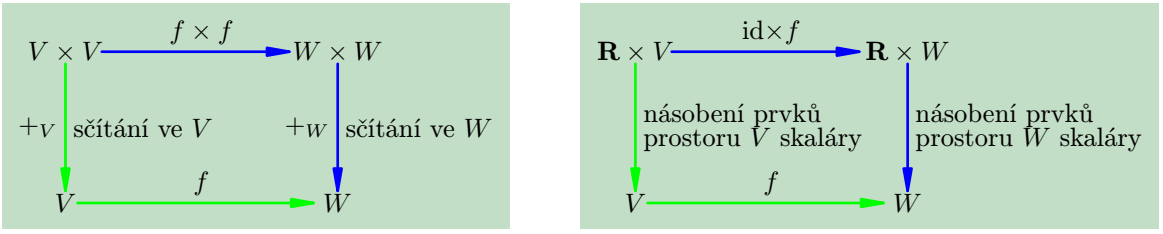
Lineární zobrazení tedy „přenáší“ sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem ze vzorů na obrazy, říkáme také, že *zachovává operace*. Všimněte si, a dokažte si to, že dvě podmínky linearity (4.21) jsou ekvivalentní jediné podmínce

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) \tag{4.22}$$

pro libovolné vektory $a, b \in V_n$ a libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, nebo $\mathbf{R}$.

Příklad 4.36: Diagramy — názorné pomůcky

Linearitu zobrazení můžeme chápat také následujícím způsobem: Zobrazení $f : V \to W$ je *lineární*, pokud diagramy na obrázku 4.23 komutují. To znamená, že je jedno, zda se z levého horního rohu diagramu do



Obr. 4.23 Linearita zobrazení.

pravého dolního rohu dostaneme ve směru modrých šipek, nebo zda použijeme cestu podél zelených šipek. V prvním diagramu odpovídá „modrá“ trasa situaci, kdy dva vektory z prostoru V nejdříve zobrazíme a jejich obrazy potom sečteme v prostoru W, zatímco „zelená“ cesta vektory nejdříve sečte v prostoru V a teprve potom získaný součet zobrazí do prostoru W. Druhý diagram znázorňuje analogicky situaci pro skalární násobení ve vektorových prostorech nad $\mathbf{R}$. Připomeňme, že pro libovolná zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to D$ označuje symbol $f \times g$ *kartézský součin* těchto zobrazení fungující „po složkách“: $f \times g : A \times C \ni [a, c] \to [f(a), g(c)] \in B \times D$. Symbolem id značíme identitu. První z diagramů jsme samozřejmě mohli použít už k názornému výkladu definice homomorfismu grup (vztah (4.7)).

Nyní uvedeme několik velmi jednoduchých příkladů lineárních zobrazení.

Příklad 4.37: Nula jako „univerzální“ obraz

Definujme zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ předpisem $\varphi(a) = 0_{W_m}$ pro libovolný vektor $a \in V_n$. Jedná se o takzvané

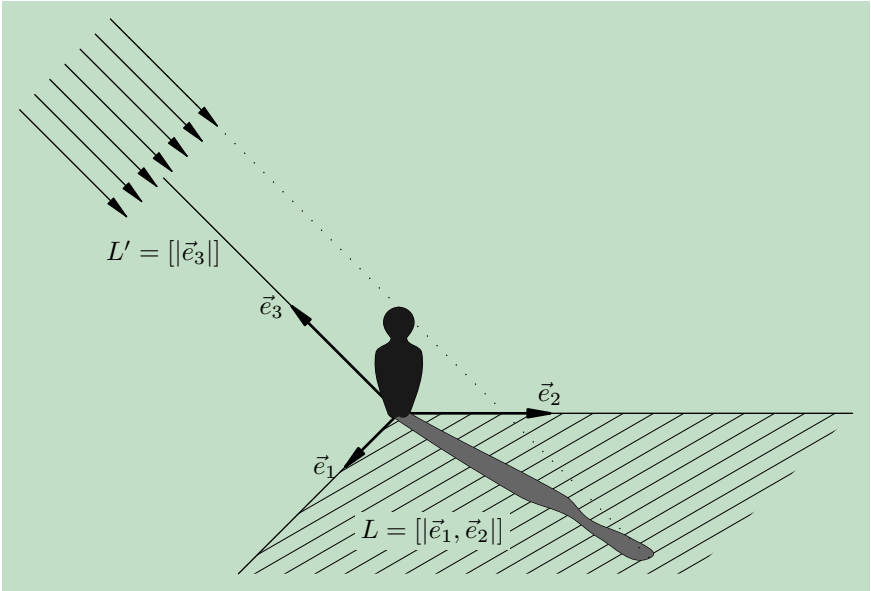
nulové zobrazení. Snadno se přesvědčíme, že je opravdu lineární: $\varphi(a+b) = 0_{W_m}$, $\varphi(a)+\varphi(b) = 0_{W_m} + 0_{W_m} = 0_{W_m}$, $\varphi(\alpha a) = 0_{W_m}$, $\alpha\varphi(a) = 0_{W_m}$. Podmínky linearity jsou splněny.

Příklad 4.38: Když vzor a obraz jedno jsou

Také identita $\mathrm{id}_{V_n} : V_n \ni a \to \mathrm{id}_{V_n}(a) = a \in V_n$ je lineárním zobrazením. V tomto případě je $W_m = V_n$. Linearitu opět ověříme snadno. Použijme tentokrát podmínku (4.22). $\mathrm{id}_{V_n}(\alpha a + \beta b) = \alpha a + \beta b$, $\alpha\,\mathrm{id}_{V_n}(a) + \beta\,\mathrm{id}_{V_n}(b) = \alpha a + \beta b$.

Příklad 4.39: Promítání

Promítání si představíme snadno.



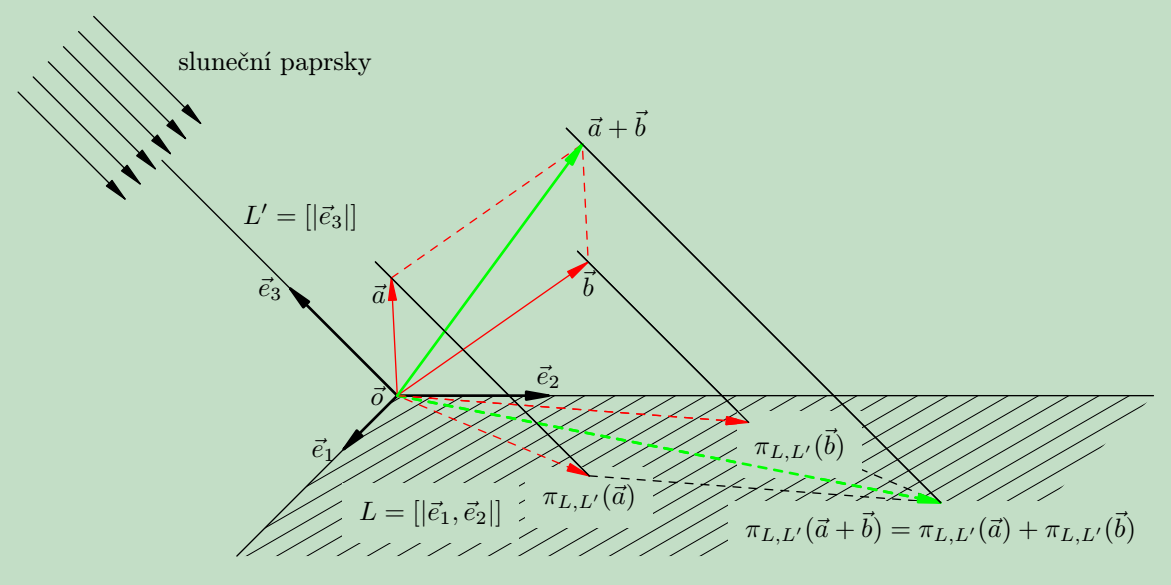
Obr. 4.24 Slunce zobrazuje předměty lineárně.

Za slunečného dne se skutečné objekty „promítají“ do roviny podložky tak, že vrhají stín. Vzpomenete-li si na obrázek 4.22 s mřížkami, ihned si uvědomíte, že promítání je lineárním zobrazením. Popišme je přesněji. Pro zjednodušení úvah použijme příklad 4.24. Definičním oborem promítání, tj. prostorem vzorů, bude trojrozměrný prostor V_3, prostorem obrazů vektorový podprostor $L = [|\vec{e}_1, \vec{e}_2|]$. Předpokládejme, že sluneční paprsky svítí podél třetího vektoru báze $\vec{e}_3$ (viz obr. 4.24 a 4.25). Podprostor $L' = [|\vec{e}_3|]$ jsme tedy zvolili za doplněk podprostoru L ve V_3. Zapíšeme-li libovolný vektor $\vec{a} \in V_3$ jako lineární kombinaci vektorů báze, $\vec{a} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3$, můžeme promítání znázorněné na obrázku 4.25 popsat vztahem

$$\pi_{L,L'} : V_3 \ni \vec{a} \longrightarrow \pi_{L,L'}(\vec{a}) = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 \in L \subset V_3.$$

Ověření linearity je opět snadné. Zvolme vektory $\vec{a} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3$ a $\vec{b} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^2\vec{e}_2 + \beta^3\vec{e}_3$. Platí $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = (\alpha\alpha^1 + \beta\beta^1)\vec{e}_1 + (\alpha\alpha^2 + \beta\beta^2)\vec{e}_2 + (\alpha\alpha^3 + \beta\beta^3)\vec{e}_3$. Pro průmět dostaneme

$$\pi_{L,L'}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = (\alpha\alpha^1 + \beta\beta^1)\vec{e}_1 + (\alpha\alpha^2 + \beta\beta^2)\vec{e}_2 = \alpha(\alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2) + \beta(\beta^1\vec{e}_1 + \beta^2\vec{e}_2) = \alpha\pi_{L,L'}(\vec{a}) + \beta\pi_{L,L'}(\vec{b}).$$



Obr. 4.25 Slunce zobrazuje předměty lineárně.

Všimli jste si jistě, že při promítání je důležitá nejen volba podprostoru, do kterého promítáme, ale také volba doplňku, tj. „směru“ promítání. Proto jsme znak π, používaný pro projekce, opatřili indexem $_{L,L'}$. Zkuste si vlastnosti promítání $\pi_{L,L'}$ ještě trochu promyslet. Co se stane, promítneme-li průmět vektoru? Správně, nic nového nedostaneme. A jaký je vztah projekce $\pi_{L,L'}$ k projekci $\pi_{L',L}$ definované jako $\pi_{L',L}(\vec{a}) = \alpha^3\vec{e}_3$? Určitě se vám podaří přesvědčit se, že platí

$$\pi_{L,L'} \circ \pi_{L,L'}(\vec{a}) = \pi_{L,L'}(\vec{a}), \quad \pi_{L,L'}(\vec{a}) + \pi_{L',L}(\vec{a}) = \vec{a}, \quad \pi_{L,L'} \circ \pi_{L',L}(\vec{a}) = \vec{o}.$$

Výsledky předchozího příkladu lze zobecnit na případ n-rozměrného vektorového prostoru V_n a jeho k-rozměrného podprostoru L. Zvolme libovolný doplněk L' podprostoru L ve V_n. V příkladu 4.33 jsme se přesvědčili, že pro každý vektor $a \in V_n$ existuje jednoznačný rozklad $a = a_L + a_{L'}$, kde $a_L \in L$ a $a_{L'} \in L'$. Definujme zobrazení

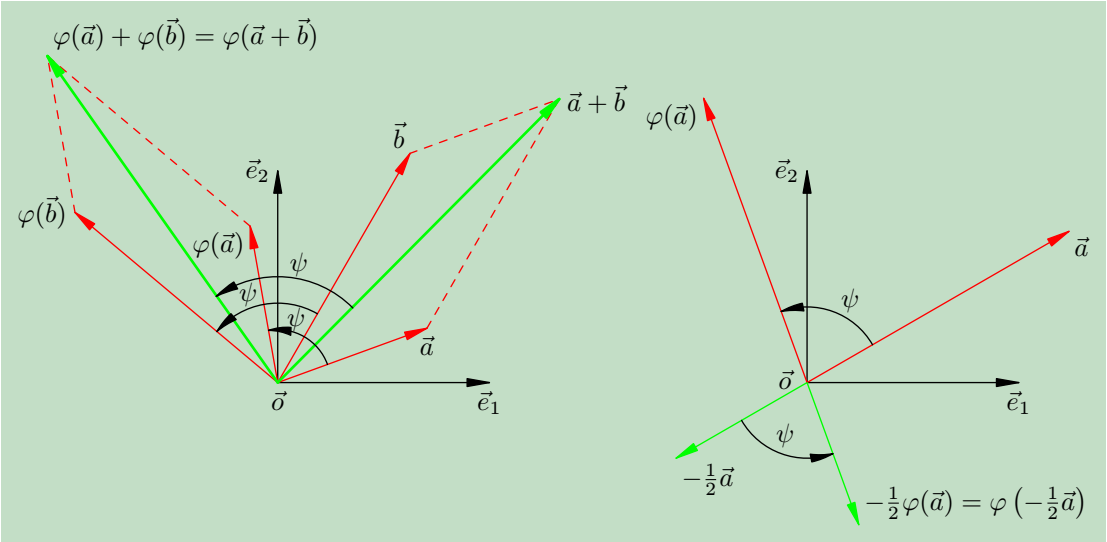
$$\pi_{L,L'} : V_n \ni a \longrightarrow \pi_{L,L'}(a) = a_L \in V_n, \quad \pi_{L',L} : V_n \ni a \longrightarrow \pi_{L',L}(a) = a_{L'} \in V_n.$$

Podobně jako v příkladu 4.39 pro ně platí

$$\pi_{L,L'} \circ \pi_{L,L'}(a) = \pi_{L,L'}(a), \quad \pi_{L,L'}(a) + \pi_{L',L}(a) = a, \quad \pi_{L,L'} \circ \pi_{L',L}(a) = 0_{V_n}.$$

Příklad 4.40: Otáčení

K uvedení dalšího příkladu lineárního zobrazení, tentokrát otáčení v (reálné) euklidovské rovině, použijeme obrázek. Obrazem vektoru $\vec{a}$ je vektor $\varphi(\vec{a})$, který je stejně dlouhý, ale otočený oproti $\vec{a}$ o úhel ψ. Všechny vektory



Obr. 4.26 Otáčení v rovině.

se otáčejí o stejný úhel. Že jsou podmínky linearity splněny, se můžete snadno přesvědčit „zkusmo“, pomocí pravítka a kružítka. Uvidíte, že je jedno, zda napřed sečteme vzory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ pomocí vektorového rovnoběžníka a teprve potom otočíme součet $(\vec{a}+\vec{b})$ o úhel ψ, nebo naopak, nejprve vzory otočíme a získáme tak obrazy $\varphi(\vec{a})$ a $\varphi(\vec{b})$, které pak pomocí vektorového rovnoběžníka sečteme. Výsledek bude stejný. Obdobně nezáleží na tom, zda vektor $\vec{a}$ (vzor) nejprve vynásobíme skalárem α a výsledek otočíme, nebo naopak, otočíme vzor a poté vynásobíme obraz $\varphi(\vec{a})$ číslem α.

4.2.2 Lineární zobrazení v bázích

Zobrazení je v obecném případě třeba definovat tak, že zadáme obecný předpis, jak libovolnému vzoru přiřadit obraz. Požadavek linearity však bezpochyby musí klást výrazné omezení, jak takový předpis může vypadat. Ukážeme, že dokonce bude stačit, abychom předepsali, jak se zobrazují vektory alespoň jedné (libovolně zvolené) báze. A pak už dokážeme najít obraz jakéhokoli vektoru. Vyřešíme současně i praktickou otázku: Jak vypočítat složky obrazu ve zvolené bázi vektorového prostoru W_m, známe-li složky vzoru v jisté bázi vektorového prostoru V_n.

Zvolme ve vektorovém prostoru vzorů V_n bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a v prostoru obrazů W_m bázi $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Předpokládejme, že $\varphi : V_n \to W_m$ je lineární zobrazení. Zobrazme vektor

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i, \quad a \sim (\alpha^1 \ldots \alpha^n) = (\alpha).$$

$$\varphi(a) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \varphi(e_i).$$

Při poslední úpravě jsme využili předpokládané linearity zobrazení φ. Označme $c_i = \varphi(e_i)$ obrazy vektorů báze. Okamžitě vidíme, že pokud předem řekneme, jak se zobrazením φ zobrazí vektory báze, můžeme zapsat obraz kteréhokoli vektoru $a \in V_n$,

$$\varphi(a) = \alpha^1 c_1 + \alpha^2 c_2 + \cdots + \alpha^n c_n. \tag{4.23}$$

Pozor! Vektory c_1, c_2, …, c_n jsou sice prvky prostoru obrazů W_m, ale nemusí v něm tvořit bázi. Každý z nich je však zcela určitě lineární kombinací vektorů báze $(f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_m)$, tj.

$$\begin{aligned}
c_1 &= \gamma_1^1 f_1 + \gamma_1^2 f_2 + \cdots + \gamma_1^m f_m = \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_1^\beta f_\beta, \quad c_1 \sim (\gamma_1^1 \ldots \gamma_1^m) = (\gamma_1), \\
c_2 &= \gamma_2^1 f_1 + \gamma_2^2 f_2 + \cdots + \gamma_2^m f_m = \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_2^\beta f_\beta, \quad c_2 \sim (\gamma_2^1 \ldots \gamma_2^m) = (\gamma_2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
c_n &= \gamma_n^1 f_1 + \gamma_n^2 f_2 + \cdots + \gamma_n^m f_m = \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_n^\beta f_\beta, \quad c_n \sim (\gamma_n^1 \ldots \gamma_n^m) = (\gamma_n).
\end{aligned}$$

Symbolem $c \sim (\gamma^1 \ldots \gamma^m) = (\gamma)$ opět vyznačujeme skutečnost, že vektor c je ve zvolené bázi reprezentován m-ticí (γ). Abychom mohli počítat s vektory, které představují obrazy vektorů báze prostoru V_n, musíme zadat jejich složky v bázi prostoru W_m. Ty vytvoří matici

$$\varphi \sim A = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \ldots & \gamma_1^m \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \ldots & \gamma_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \ldots & \gamma_n^m \end{pmatrix}.$$

Matice A *reprezentuje lineární zobrazení* φ v *bázích* $(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n)$ prostoru V_n a $(f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_m)$ prostoru W_m. Podobně, jako jsme při počítání se složkami vektorů museli uvádět informaci, ke které bázi se tyto složky vztahují (v jiné bázi měl týž vektor jiné složky), musíme také v případě číselné reprezentace lineárního zobrazení specifikovat báze. V případě zobrazení $V_n \to W_m$ je přirozeně nutné určit báze v *obou* vektorových prostorech.

Dosaďme nyní vektory c_1 až c_n do vyjádření obrazu $\varphi(a)$ vztahem (4.23):

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i c_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \left(\sum_{\beta=1}^{m} \gamma_i^\beta f_\beta \right) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \gamma_i^\beta \right) f_\beta \implies \varphi(a) = \sum_{\beta=1}^{m} \bar{\alpha}^\beta f_\beta, \;\; \bar{\alpha}^\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \gamma_i^\beta \,,$$

v maticovém zápisu

$$a \sim (\alpha), \quad \varphi(a) \sim (\bar{\alpha}), \quad (\bar{\alpha}) = (\alpha)A\,, \quad \text{tj.}$$
$$(\bar{\alpha}^1\bar{\alpha}^2\dots\bar{\alpha}^m) = (\alpha^1\alpha^2\dots\alpha^n)\begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^m \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^m \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

A ve hře jsou opět matice! Zadáme-li báze v prostorech V_n (prostor vzorů) a W_m (prostor možných obrazů), stačí vzít jakoukoli matici typu n/m a máme jistotu, že tato matice bude reprezentovat jisté lineární zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$. Připomeňme si, že řádky této matice obsahují složky obrazů vektorů báze e_1, e_2, …, e_n vyjádřených v bázi $(f_1, f_2, \dots, f_m)$. Co je však třeba ověřit, je jednoznačnost takového způsobu zadání lineárního zobrazení. Představme si, že zvolíme ve W_m vektory $c_1, c_2, \dots, c_n$ a řekneme: „Toto jsou obrazy vektorů e_1, e_2, …, e_n tvořících bázi prostoru V_n pro lineární zobrazení φ.“ Skutečně, jedno takové lineární zobrazení již sestrojit umíme: $\varphi(a) = \alpha^1c_1 + \alpha^2c_2 + \dots + \alpha^nc_n$ pro libovolný vzor $a = \alpha^1e_1 + \alpha^2e_2 + \dots + \alpha^ne_n$. Dosadíme-li totiž $a = e_j$, dostaneme skutečně $\varphi(e_j) = c_j$. Co když však existuje ještě jiné lineární zobrazení, třeba ψ, které zobrazuje vektory báze e_j rovněž na vektory c_j, tj. $\psi(e_j) = c_j$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$, avšak pro některý vektor a může dávat jiný obraz než zobrazení φ, tj. $\varphi(a) \neq \psi(a)$? Předpokládejme, že tomu tak skutečně je. Pak

$$\varphi(a) = \varphi(\sum_{i=1}^{n}\alpha^ie_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha^i\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha^ic_i,$$

$$\psi(a) = \psi(\sum_{i=1}^{n}\alpha^ie_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha^i\psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha^ic_i.$$

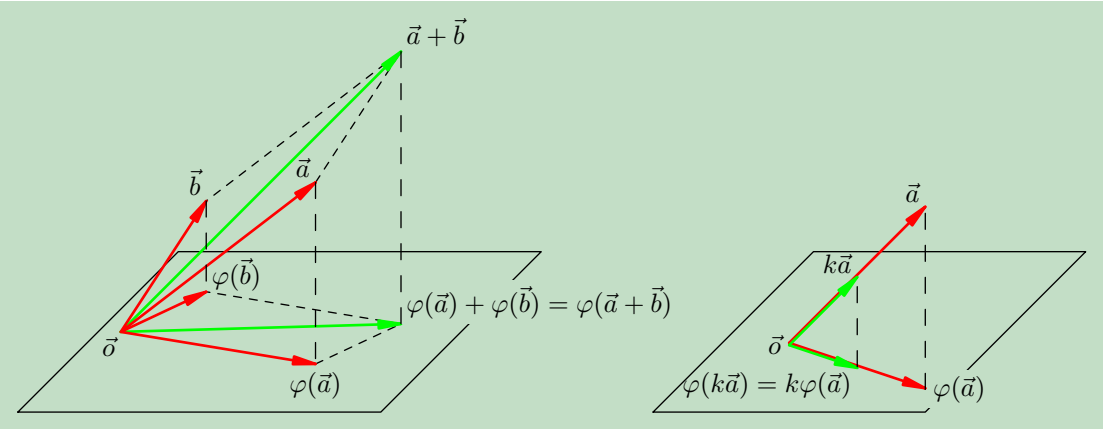
Je vidět, že $\varphi(a) = \psi(a)$ pro libovolný vektor a, tedy $\varphi = \psi$.

Výsledky, ke kterým jsme právě dospěli, jsou pro zadávání lineárních zobrazení natolik důležité, že je vyjádříme formou matematické věty:

Věta 4.2: *Každé lineární zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ je jednoznačně určeno obrazy libovolné báze prostoru V_n.*

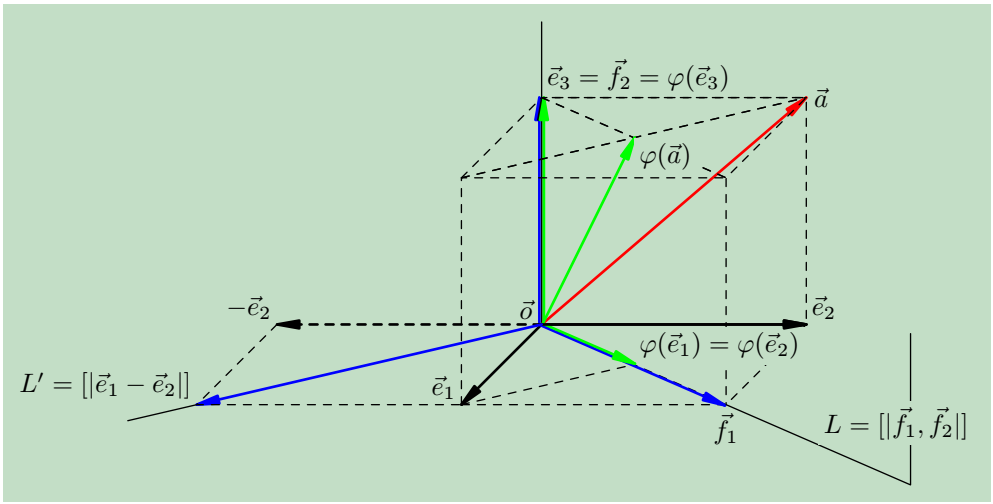
Příklad 4.41: Geometrická představivost a algebraický zápis

Abychom si zvykli na algebraický popis geometrických objektů, jimiž vektorové prostory a lineární zobrazení mezi nimi jsou, porovnáme algebraické řešení úlohy s geometrickým pro případy, kdy ještě můžeme uplatnit



Obr. 4.27 Promítání názorně.

představivost. To je dobře možné v prostorech jedno-, dvou- a trojrozměrných, jak dokumentuje například ilustrativní obrázek 4.27, znázorňující promítání. Pro konkrétní výpočet zvolíme jako zobrazení φ promítání vektorů prostoru $V_3 = [|\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3|]$ nad $\mathbf{R}$ do podprostoru $L = [|\vec{f}_1, \vec{f}_2|]$, kde $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_3$. Abychom mohli dobře uplatnit představivost, předpokládejme, že vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ jsou jednotkové a navzájem kolmé. Abychom věděli, jak máme promítat, musíme zadat doplněk L' vektorového podprostoru L (viz příklad 4.39). Zvolíme-li $L' = [|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|]$, představíme si situaci velmi dobře, neboť půjde o kolmé promítání, které dobře známe z „obyčejné“ geometrie (viz obrázek 4.28).



Obr. 4.28 Promítání jako lineární zobrazení.

Pozn.: Kolmostí a délkou vektorů z algebraického hlediska se sice budeme zabývat až později, v odstavci o skalárním součinu vektorů, zatím však můžeme využít znalostí geometrických.

Konkrétně promítneme vektor $\vec{a} \in V_3$ znázorněný na obrázku. Ihned vidíme, že

$$\vec{a} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \varphi(\vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Vektor $\vec{a} \in V_3$ má tedy v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ prostoru V_3 složky $(\alpha) = (0\ \ 1\ \ 1)$, jeho obraz má v téže bázi složky $(\bar{\alpha}) = (\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ 1)$.

Nyní ověříme tento výsledek, který jsme na základě geometrické představy získali okamžitě, algebraickým postupem pomocí věty 4.2. Podle obrázku určíme obrazy báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ a matici zobrazení.

Platí

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{e}_1) &= \frac{1}{2}\vec{f}_1 + 0\vec{f}_2, \quad \varphi(\vec{e}_1) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3, \\
\varphi(\vec{e}_2) &= \frac{1}{2}\vec{f}_1 + 0\vec{f}_2, \quad \varphi(\vec{e}_2) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3, \\
\varphi(\vec{e}_3) &= 0\vec{f}_1 + 1\vec{f}_2, \quad \varphi(\vec{e}_3) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Matice zobrazení φ má tvar

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Složky obrazu vektoru a jsou

$$(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Získali jsme očekávaný výsledek, shodný s výsledkem geometrického postupu. Algebraický postup je však pro praktické výpočty nepostradatelný nejen pro svou rutinní jednoduchost, ale především pro použitelnost v případě libovolných dimenzí.

Lineární zobrazení lze také skládat, stejně jako jakákoli zobrazení s vhodnými definičními obory, resp. obory hodnot. Vzpomeňte třeba na skládání funkcí v odstavci 2.1.3 prvního dílu. Předpokládejme, že $\varphi : V_n \to W_m$, resp. $\psi : W_m \to Y_k$ jsou lineární zobrazení vektorových prostorů dimenzí n a m, resp. m a k. Jejich *složením* neboli *kompozicí* rozumíme zobrazení

$$\psi \circ \varphi : V_n \ni a \longrightarrow (\psi \circ \varphi)(a) = \psi(\varphi(a)) \in Y_k.$$

Pokuste se ukázat, že složené zobrazení $\psi \circ \varphi : V_n \longrightarrow Y_k$ je rovněž lineární. Jaká matice však bude toto zobrazení reprezentovat v bázích? Zvolme báze $(e_1, \ldots, e_n)$ ve vektorovém prostoru V_n, $(f_1, \ldots, f_m)$ ve W_m a $(g_1, \ldots, g_k)$ v Y_k. Označme A matici reprezentující zobrazení φ v bázích $(e_1, \ldots, e_n)$ a $(f_1, \ldots, f_m)$ a B matici reprezentující zobrazení ψ v bázích $(f_1, \ldots, f_m)$ a $(g_1, \ldots, g_k)$. Složky vektoru $a \in V_n$ nechť jsou v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentovány řádkovou n-ticí $(\alpha) = (\alpha^1 \ \ldots \ \alpha^n)$. Pak vektor $\varphi(a) \in W_m$ bude v bázi $(f_1, \ldots, f_m)$ reprezentován m-ticí $(\beta) = (\beta^1 \ \ldots \ \beta^m) = (\alpha)A$, vektor $\psi(\varphi(a))$ pak bude v bázi $(g_1, \ldots, g_k)$ reprezentován k-ticí $(\gamma) = (\gamma^1 \ \ldots \ \gamma^k) = (\beta)B = (\alpha)AB$.

Matice C reprezentující zobrazení $\psi \circ \varphi$ ve zvolených bázích je součinem matic A a B, tj. $C = AB$.

Poslední věc, které si ještě všimneme, je problém přechodu mezi bázemi. Zvolme v prostoru V_n dvě báze $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ s maticí přechodu $T = (\tau_i^j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, a v prostoru W_m báze $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $(f'_1, f'_2, \ldots, f'_m)$ s maticí přechodu $M = (\mu_\alpha^\beta)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$. Platí tedy

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_i^j e_j\,, \quad e_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i^j e'_j,$$

$$f'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} \mu_\alpha^\beta f_\beta\,, \quad f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} \nu_\alpha^\beta f'_\beta\,,$$

kde $S = T^{-1} = (\sigma_i^j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, a $N = M^{-1} = (\nu_\alpha^\beta)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$, jsou inverzní matice k maticím přechodu. Jestliže v nečárkovaných bázích bylo lineární zobrazení φ reprezentováno maticí A, jakou maticí A' bude reprezentováno v bázích čárkovaných? To zjistíme velmi snadno pomocí vztahu (4.24) mezi složkami vzoru a obrazu a vztahů (4.13) pro transformaci složek při změně báze. Zvolme vektor $a \in V_n$ (vzor) libovolně. Předpokládejme, že má v bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ složky $(\alpha) = (\alpha^1\ \alpha^2\ \ldots\ \alpha^n)$, v bázi $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ složky $(\alpha') = (\alpha^{1'}\ \alpha^{2'}\ \ldots\ \alpha^{n'})$. Obraz $\varphi(a)$ má v bázi $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ složky $(\bar\alpha) = (\bar\alpha^1\ \bar\alpha^2\ \ldots\ \bar\alpha^m)$, v bázi $(f'_1, f'_2, \ldots, f'_m)$ složky $(\bar\alpha') = (\bar\alpha^{1'}\ \bar\alpha^{2'}\ \ldots\ \bar\alpha^{m'})$. Platí

$$(\bar\alpha') = (\alpha')A' = (\alpha)T^{-1}A', \quad (\bar\alpha') = (\bar\alpha)M^{-1} = (\alpha)AM^{-1}.$$

Odtud porovnáním

$$(\alpha)T^{-1}A' = (\alpha)AM^{-1} \quad \text{pro libovolné } (\alpha).$$

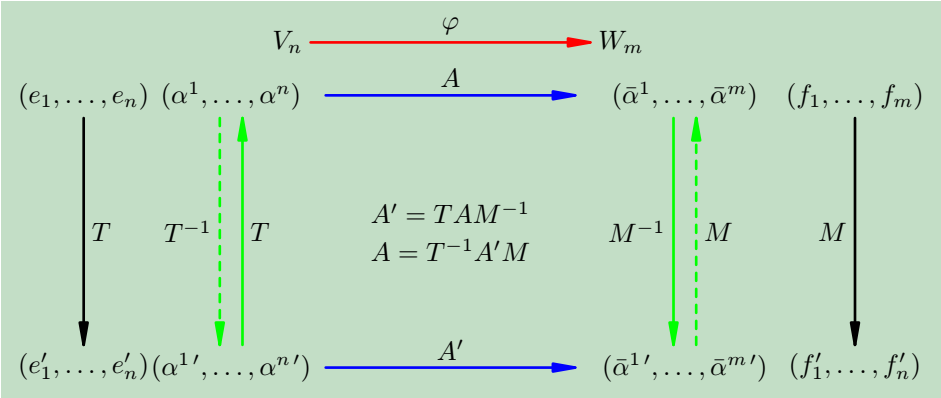
Protože byl vzor a zvolen libovolně, platí předchozí vztah pro *každou* volbu n-tice (α). Nelze jej proto splnit jinak než rovností příslušných matic, tj.

$$T^{-1}A' = AM^{-1} \implies A' = TAM^{-1}\,. \tag{4.25}$$

Vztah (4.25) si můžeme snadno zapamatovat pomocí diagramu na obrázku 4.29. Všimněme si vztahu (4.25) ve speciálním případě, kdy zobrazení φ zobrazuje vektory zpět do prostoru vzorů, tj. $m = n$, $W_m = V_n$. V takovém případě hovoříme o lineárním zobrazení prostoru V_n *do sebe*. Pro zápis ve složkách budeme pochopitelně volit jednu a tutéž bázi pro vyjádření vzorů i obrazů, tj. $f_i = e_i$ a $f'_i = e'_i$ pro všechny hodnoty indexu $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak $M = T$ a

$$A' = TAT^{-1}, \quad A = T^{-1}A'T = SAS^{-1}. \tag{4.26}$$

Matice A, A', reprezentující lineární zobrazení $\varphi : V_n \to V_n$ prostoru vzorů do sebe, jsou *podobné*. Vztah (4.26) se nazývá *podobnostní transformace*.



Obr. 4.29 Matice lineárního zobrazení v různých bázích.

4.2.3 Vektorové podprostory spjaté s lineárním zobrazením

S každým lineárním zobrazením $\varphi : V_n \to W_m$ jsou automaticky spojeny určité vektorové podprostory v prostoru vzorů a v prostoru obrazů, *jádro* a *obraz* lineárního zobrazení. Než je obecně definujeme, osvětlíme si situaci pomocí výsledků příkladu 4.41.

Příklad 4.42: Jádro a obraz lineárního zobrazení

Interpretujme promítání z příkladu 4.41 například jako lineární zobrazení prostoru V_3 do sebe. Popišme nejprve všechny vektory, které vzniknou jako obrazy všech vektorů prostoru V_3 lineárním zobrazením φ, tj. množinu průmětů všech vektorů z V_3 do podprostoru $L = [|\vec f_1,\ \vec f_2|]$. Každý takový průmět má v bázi $(\vec e_1,\ \vec e_2,\ \vec e_3)$ složky

$$(\bar\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac12(\alpha^1+\alpha^2) & \frac12(\alpha^1+\alpha^2) & \alpha^3 \end{pmatrix},$$

α^1, α^2, α^3 mohou nabývat libovolných hodnot, obrazy jsou určeny dvěma nezávislými proměnnými $\beta = \frac12(\alpha^1 + \alpha^2)$ a $\gamma = \alpha^3$. Všechny obrazy mají tvar $\beta(\vec e_1 + \vec e_2) + \gamma\vec e_3$ (β, γ jsou libovolné) a vyplňují tedy dvojrozměrný vektorový podprostor ve V_3

$$L = \operatorname{Im}\varphi = [|\vec e_1 + \vec e_2,\ \vec e_3|].$$

Pokusme se nyní popsat všechny vzory, které se při promítání φ promítnou na nulový vektor. Splňují podmínku

$$\left(\frac12(\alpha^1+\alpha^2) \quad \frac12(\alpha^1+\alpha^2) \quad \alpha^3\right) = (0\ 0\ 0).$$

Odtud $\alpha^1 + \alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = 0$. Hledané vzory mají tvar $\alpha^1\vec e_1 - \alpha^1\vec e_2 + 0\vec e_3 = \alpha^1(\vec e_1 - \vec e_2)$ a generují jednorozměrný vektorový podprostor ve V_3

$$L' = \operatorname{Ker}\varphi = [|\vec e_1 - \vec e_2|].$$

Podprostor L je *obrazem* lineárního zobrazení φ a L' jeho *jádrem*. Všimněte si, že vektorové podprostory $L = \operatorname{Im}\varphi$ a $L' = \operatorname{Ker}\varphi$ jsou navzájem doplňkové, tedy $L + L' = V_3$ a $L \cap L' = \{\vec o\}$. Doplňkové jsou tedy i jejich dimenze, $\dim L + \dim L' = 3$.

Definujeme nyní pojem obrazu a jádra obecně, pro případ lineárního zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$. Prostor vzorů a prostor, v němž leží jejich obrazy, jsou tedy obecně odlišné.

Množiny $\operatorname{Im}\varphi \subset W_m$, resp. $\operatorname{Ker}\varphi \subset V_n$, definované takto:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(a) \in W_m \,|\, a \in V_n\}, \quad \operatorname{Ker}\varphi = \{a \in V_n \,|\, \varphi(a) = 0_{W_m}\}, \tag{4.27}$$

nazýváme *obrazem*, resp. *jádrem* lineárního zobrazení φ.

Jádro libovolného lineárního zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ je vektorovým podprostorem ve V_n, obraz je vektorovým podprostorem ve W_m.

Jak prověříme, že se opravdu jedná o vektorové podprostory? Snadno. Víme již, že stačí ověřit uzavřenost zkoumaných podmnožin vzhledem k algebraickým operacím, tj. vzhledem k sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Předpokládejme tedy, že vektory b_1 a b_2 jsou prvky $\operatorname{Im}\varphi$. Potom ke každému z nich existuje v prostoru V_n alespoň jeden vzor, tj. $b_1 = \varphi(a_1)$ a $b_2 = \varphi(a_2)$ pro jisté vektory $a_1, a_2 \in V_n$. Pro libovolné skaláry β^1 a β^2 dostaneme:

$$\beta^1 b_1 + \beta^2 b_2 = \beta^1\varphi(a_1) + \beta^2\varphi(a_2) = \varphi(\beta^1 a_1 + \beta^2 a_2) \in \operatorname{Im}\varphi.$$

Spolu s vektory b_1 a b_2 tedy do $\operatorname{Im}\varphi$ patří i jejich libovolná lineární kombinace. Dokázali jsme tak, že $\operatorname{Im}\varphi \subset W_m$ je podmnožina prostoru W_m uzavřená vzhledem k operacím, je tedy vektorovým podprostorem ve W_m. Obdobně postupujeme v případě jádra. Zvolme libovolné vektory $a_1, a_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$ a libovolné skaláry α^1 a α^2. Zobrazme pomocí φ lineární kombinaci $\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2$:

$$\varphi(\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2) = \alpha^1\varphi(a_1) + \alpha^2\varphi(a_2) = 0_{W_m},$$

neboť $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = 0_{W_m}$. Odtud $\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Uvědomte si, na kterých místech výpočtu jsme využili linearity zobrazení φ.

Jako vždy v případě vektorových prostorů vzniká i nyní otázka, jak je to s dimenzemi $\operatorname{Im}\varphi$ a $\operatorname{Ker}\varphi$. Bude mezi nimi vůbec nějaký vztah? Vždyť se přece jedná o podprostory různých vektorových prostorů!

Označme $h = h(\varphi) = \dim \operatorname{Im}\varphi$ a $d = d(\varphi) = \dim \operatorname{Ker}\varphi$. Tato čísla nazýváme *hodností*, resp. *defektem* zobrazení φ.

Zvolme nyní libovolnou bázi $(b_1, b_2, \ldots, b_h)$ vektorového podprostoru $\operatorname{Im}\varphi$. Označme jako a_j libovolný ze všech vzorů obrazu b_j, $1 \le j \le h$. Tyto vzory generují ve V_n vektorový podprostor

$$L(\varphi) = [|a_1, a_2, \ldots, a_h|] \subset V_n.$$

Jeho dimenze je $\dim L = h$, neboť vektory a_1 až a_h jsou lineárně nezávislé. Skutečně, utvoříme-li jejich nulovou lineární kombinaci, tj.

$$\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \cdots + \alpha^h a_h = 0_{V_n},$$

a zobrazíme ji pomocí φ, dostáváme

$$\varphi(\alpha^1 a_1 + \cdots + \alpha^h a_h) = \alpha^1\varphi(a_1) + \cdots + \alpha^h\varphi(a_h) = \alpha^1 b_1 + \cdots + \alpha^h b_h = \varphi(0_{V_n}) = 0_{W_m}.$$

O vektorech b_1 až b_h však víme, že jsou lineárně nezávislé. Vždyť jsme je tak volili. Proto je $\alpha^1 = \cdots = \alpha^h = 0$. Vektory a_1 až a_h jsou tedy také nezávislé a tvoří bázi vektorového podprostoru $L(\varphi)$. Odtud $\dim L(\varphi) = h$.

Příklad 4.43: Co když zvolíme jiné vzory vektorů báze $(b_1, \ldots, b_h)$?

Zvolme vektory $\bar a_1, \bar a_2, \ldots, \bar a_h$ tak, aby rovněž byly vzory vektorů b_1 až b_h tvořících bázi v $\operatorname{Im}\varphi$. Tyto vektory generují ve V_n vektorový podprostor

$$\bar L(\varphi) = [|\bar a_1, \bar a_2, \ldots, \bar a_h|],$$

jehož dimenze je opět h. (Vzpomeňme si, že důkaz nezávislosti vzorů báze vektorového podprostoru $\operatorname{Im}\varphi \subset W_m$ byl nezávislý na konkrétní volbě vzorů a_1 až a_h.) Vektorové podprostory $L(\varphi)$ a $\bar L(\varphi)$ mají tedy shodnou dimenzi. Obecně však jsou různé. Můžeme to snadno uvidět opět na případu promítání z příkladu 4.41. V tomto příkladu jsme pracovali s bází $(\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$ v prostoru V_3. Prostor obrazů byl $\operatorname{Im}\varphi = [|\vec e_1 + \vec e_2, \vec e_3|]$. Zvolme $\vec b_1 = \vec e_1 + \vec e_2 = (1, 1, 0)$, $\vec b_2 = \vec e_3 = (0, 0, 1)$. Popišme nyní všechny vzory těchto vektorů, zapsané ve tvaru lineárních kombinací $\alpha_1^1\vec e_1 + \alpha_1^2\vec e_2 + \alpha_1^3\vec e_3$, resp. $\alpha_2^1\vec e_1 + \alpha_2^2\vec e_2 + \alpha_2^3\vec e_3$. Pomůže nám k tomu znalost matice A lineárního zobrazení φ:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & 0\\ \frac12 & \frac12 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (1\ 1\ 0)\,,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & 0\\ \frac12 & \frac12 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (0\ 0\ 1)\,.$$

Získali jsme tak dvě soustavy rovnic, jejichž řešením dostáváme množiny všech vzorů vektoru $\vec b_1$ a vektoru $\vec b_2$:

$$\varphi^{-1}(\{\vec b_1\}) = \{\alpha_1^1\vec e_1 + (2 - \alpha_1^1)\vec e_2 \,|\, \alpha_1^1 \in \mathbf{R}\},$$

$$\varphi^{-1}(\{\vec b_2\}) = \{\alpha_2^1\vec e_1 - \alpha_2^1\vec e_2 + \vec e_3 \,|\, \alpha_2^1 \in \mathbf{R}\}.$$

Například pro $\alpha_1^1 = 0$, $\alpha_2^1 = 0$ dostaneme vzory $\vec a_1 = 2\vec e_2$, $\vec a_2 = \vec e_3$, tj. $L(\varphi) = [|2\vec e_2, \vec e_3|]$, pro $\alpha_1^1 = 1$, $\alpha_2^1 = 1$ je $\bar{\vec a}_1 = \vec e_1 + \vec e_2$, $\bar{\vec a}_2 = \vec e_1 - \vec e_2 + \vec e_3$, tj. $\bar L(\varphi) = [|\vec e_1 + \vec e_2, \vec e_1 - \vec e_2 + \vec e_3|]$. Oba tyto podprostory jsou dvojrozměrné, jsou však různé.

Pozn.: Symbol φ^{-1} zde neznačí inverzní zobrazení (to v daném případě ani neexistuje, protože zobrazení φ není prosté). Jedná se o standardní zápis množiny vzorů, obecně $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{a \in V_n \,|\, \varphi(a) = b\}$.

Vraťme se opět k obecným úvahám o obrazu a jádru lineárního zobrazení. Ve vektorovém prostoru vzorů V_n máme nyní dva podprostory spjaté se zobrazením φ, $L(\varphi)$ a $\operatorname{Ker}\varphi$. Mají nějaké vektory společné? Předpokládejme, že vektor c je prvkem $L(\varphi)$ a současně prvkem jádra. Je tedy $c = \gamma^1 a_1 + \cdots + \gamma^h a_h$ a současně $\varphi(c) = 0_{W_m}$, tj.

$$\gamma^1\varphi(a_1) + \cdots + \gamma^h\varphi(a_h) = \gamma^1 b_1 + \cdots + \gamma^h b_h = 0_{W_m}.$$

Vektory b_1 až b_h však jsou lineárně nezávislé (tvoří bázi $\operatorname{Im}\varphi$), takže $\gamma_1 = \ldots = \gamma_h = 0$ a $c = 0_{V_n}$. Platí tedy $L(\varphi) \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0_{V_n}\}$. Zvolme nyní libovolný vektor $a \in V_n$. Ukážeme, že jej lze rozložit na součet dvou vektorů, z nichž jeden je prvkem $L(\varphi)$ a druhý prvkem jádra. Obraz vektoru a je, jako všechny obrazy, lineární kombinací vektorů $b_1, b_2, \ldots, b_h$. Proto

$$\varphi(a) = \beta^1 b_1 + \cdots + \beta^h b_h = \beta^1\varphi(a_1) + \cdots + \beta^h\varphi(a_h).$$

Označme $c = a - (\beta^1 a_1 + \cdots + \beta^h a_h)$. Platí (za vektor $\varphi(a)$ dosadíme z předchozího vztahu)

$$\varphi(c) = \varphi(a) - \varphi(\beta^1 a_1 + \cdots + \beta^h a_h) = 0_{W_n} \implies c \in \operatorname{Ker}\varphi.$$

Vektorové podprostory $L(\varphi)$ a $\operatorname{Ker}\varphi$ generují dohromady celý prostor V_n, tj. $L(\varphi)+\operatorname{Ker}\varphi = V_n$. Ukázali jsme tedy, že podprostory $L(\varphi)$ a $\operatorname{Ker}\varphi$ jsou navzájem doplňkové. Pro jejich dimenze tak platí $\dim L(\varphi) + \dim \operatorname{Ker}\varphi = n$, tj.

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi) + \dim \operatorname{Ker}\varphi = n, \quad \text{tj.} \quad h(\varphi) + d(\varphi) = n. \tag{4.28}$$

Připomeňme ještě, že podprostory generované ve V_n různými výběry souboru vzorů libovolně zvolené báze $(b_1, b_2, \ldots, b_h)$ obrazu zobrazení φ mají stejnou dimenzi $h(\varphi)$, představují však různé doplňky jádra v prostoru V_n.

V souvislosti s vlastnostmi jádra a obrazu lineárního zobrazení či se vztahem mezi hodností a defektem připomeňme ještě jedno speciální zobrazení. Vzpomínáte na izomorfismus vektorových prostorů V_n a W_n stejné dimenze? Definovali jsme jej v odstavci 4.1.3 jako vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru V_n na prostor W_n s vlastnostmi, které přesně odpovídají požadavkům (4.21) na lineární zobrazení. Každý izomorfismus vektorových prostorů je tedy rovněž lineárním zobrazením a každé vzájemně jednoznačné lineární zobrazení jednoho prostoru na druhý je izomorfismem. Ze vzájemné jednoznačnosti izomorfismu vyplývá, že jeho jádro obsahuje pouze nulový vektor. Izomorfismus tedy má nulový defekt a maximální hodnost rovnou společné dimenzi obou prostorů. V bázích bude vždy reprezentován regulární maticí A. Ke každému izomorfismu samozřejmě existuje inverzní zobrazení, které je také izomorfismem, a je reprezentováno inverzní maticí A^{-1}.

V tomto místě se prostřednictvím následujícího příkladu vrátíme ke zdůvodnění praktického výpočtu inverzní matice, které jsme slíbili v prvním dílu (příklad 1.24).

Příklad 4.44: Izomorfismus a hrátky s maticemi

Uvažujme o libovolném izomorfismu $f : V_n \to W_n$. Ten je v nějakých pevně zvolených bázích $(e_1, \ldots, e_n)$ ve V_n a $(f_1, \ldots, f_n)$ ve W_n reprezentován čtvercovou regulární maticí A. Položme si otázku: Existují čárkované báze $(e'_1, \ldots, e'_n)$, resp. $(f'_1, \ldots, f'_n)$, ve kterých by tentýž izomorfismus byl reprezentován obzvláště jednoduchou maticí A', například jednotkovou? Podle transformačního vztahu 4.25 je $A' = TAM^{-1}$ Hledejme matici přechodu T od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \ldots, e'_n)$ a matici přechodu M od báze $(f_1, \ldots, f_n)$ k bázi $(f'_1, \ldots, f'_n)$ tak, aby platilo $A' = E = TAM^{-1}$. Na straně 31 prvního dílu jsme používali ekvivalentních úprav pro převedení regulární matice na matici jednotkovou. Každou ze základních řádkových ekvivalentních úprav je možné realizovat násobením vhodnou maticí zleva. První z matic

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & i & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & k & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \text{resp.} \qquad \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & k & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

realizuje vynásobení i-tého řádku číslem k ($k \neq 0$, k stojí v i-tém řádku na diagonále), druhá přičtení k-násobku j-tého řádku k i-tému řádku (k stojí v i-tém řádku a j-tém sloupci). Sami zkontrolujte, že to tak opravdu funguje a zkonstruujte analogicky matice pro ekvivalentní úpravy sloupcové (těmi ovšem budeme násobit zprava). Všimněme si, že matice realizující kteroukoli ekvivalentní úpravu je regulární. Můžeme ji tedy považovat za matici přechodu k nové bázi. Převedeme-li konečným počtem p ekvivalentních řádkových úprav matici A na jednotkovou, je to totéž, jako bychom ji postupně vynásobili příslušnými maticemi $T_1, \ldots, T_p$ zleva, tedy

$$A' = E = T_p T_{p-1} \ldots T_2 T_1 A = TA.$$

Výsledná matice T je maticí přechodu od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \ldots, e'_n)$ v prostoru V_n, báze prostoru W_n zůstává stejná, tj. $M = E$. Vidíme, že vhodnou volbou bází prvního a druhého prostoru docílíme toho, aby libovolný izomorfismus byl reprezentován jednotkovou maticí. Současně je z předchozího postupu vidět, proč metoda výpočtu inverzní matice na straně 31 prvního dílu funguje. Platí-li totiž $TA = E$, pak ihned dostáváme $A = T^{-1}E$ a s využitím druhého ze vztahů (1.27)

$$A^{-1} = (T^{-1}E)^{-1} = E^{-1}(T^{-1})^{-1} = ET = TE = T_p \ldots T_1 E. \tag{4.29}$$

Inverzní matici k matici A opravdu „vyrobíme“ z jednotkové matice stejnými postupnými úpravami, jakými jsme z matice A získali matici jednotkovou. Proveďte podobou úvahu také pro sloupcové úpravy (ty představují změnu báze v prostoru W_n). A konečně, bude výpočet inverzní matice fungovat také pro kombinace sloupcových a řádkových úprav?

Zobrazení $\varphi : V_n \to V_n$, které je izomorfismem, se také nazývá regulární.

Pro zobrazení $\varphi : V_n \to V_n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- φ je regulární,
- $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{V_n}\}$, tj. $d(\varphi) = 0$,
- $\operatorname{Im}\varphi = V_n$, tj. $h(\varphi) = n$,
- existuje inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : V_n \to V_n$, tj. $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_{V_n}$,
- φ je v každé bázi reprezentováno regulární maticí,
- obrazy vektorů libovolné báze prostoru V_n tvoří opět bázi.

Vzhledem k poslední vlastnosti hovoříme o regulárních zobrazeních také jako o *lineárních transformacích* vektorového prostoru V_n.

Příklad 4.45: Může jádro splynout s obrazem?

Uvažujme o lineárním zobrazení vektorového prostoru V_n do sebe, $\varphi : V_n \to V_n$ (takové zobrazení nazýváme také *lineárním operátorem* ve vektorovém prostoru V_n.) Obrazy tedy „pocházejí“ ze stejného prostoru jako vzory, jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi$ zobrazení φ jsou podprostory téhož vektorového prostoru V_n. Uvědomíme-li si větu o dimenzi, tj. $h(\varphi) + d(\varphi) = n$, vypadá to, že jádro a obraz nemohou být totožné, naopak — spíše by měly být doplňkovými podprostory. Skutečnost však nebývá vždy taková, jak se zdá na první pohled. Definujme pro $n = 2$ zobrazení φ pomocí báze (b_1, b_2) takto: $\varphi(b_1) = b_2$, $\varphi(b_2) = 0_{V_2}$. Matice tohoto zobrazení v bázi (b_1, b_2) je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obraz je tvořen všemi vektory tvaru $\varphi(b)$, tj.

$$\varphi(b) = \varphi(\beta^1 b_1 + \beta^2 b_2) = \beta^1\varphi(b_1) + \beta^2\varphi(b_2) = \beta^1 b_2 \sim (0\ \beta^1),$$

tj. $\operatorname{Im}\varphi = [|b_2|]$. Jádro je definováno podmínkou $\varphi(a) = 0_{V_2}$ pro každý vektor $a \in \operatorname{Ker}\varphi$, $a = \alpha^1 b_1 + \alpha^2 b_2$, tj.

$$0_{V_2} = \varphi(a) = \varphi(\alpha^1 b_1 + \alpha^2 b_2) = \alpha^1\varphi(b_1) + \alpha^2\varphi(b_2) = \alpha^1 b_2 \Longrightarrow \alpha^1 = 0.$$

Platí tedy $\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in V_2 | a = \alpha^2 b_2\}$, tj. $\operatorname{Ker}\varphi = [|b_2|]$. Vidíme, že pro tento případ je obraz lineárního zobrazení φ totožný s jádrem. Všimněme si zajímavé vlastnosti tohoto zobrazení. Pro jeho matici snadno ověříme vztah $A^2 = O$, kde O je nulová matice. Znamená to, že po dvojí postupné aplikaci zobrazení φ dostaneme z libovolného vzoru nulový vektor. Lze to ověřit i z definice zobrazení φ:

$$\varphi(\varphi(b_1)) = \varphi(b_2) = 0_{V_2}, \quad \varphi(\varphi(b_2)) = \varphi(0_{V_2}) = 0_{V_2}.$$

Lineární zobrazení $\varphi : V_n \to V_n$, pro které $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ je nulové zobrazení (viz příklad 4.37), je speciálním případem tzv. *nilpotentního* zobrazení. Platí pro ně $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Opravdu, vezměme libovolný vektor $b \in \operatorname{Im}\varphi$. Pak existuje alespoň jeden vektor $a \in V_n$, který je vzorem vektoru b, tj. $b = \varphi(a)$. Pak $\varphi(b) = \varphi^2(a) = 0_{V_n}$, tj. $b \in \operatorname{Ker}\varphi$. Obrácená inkluze obecně neplatí. Na první pohled je to vidět u prostorů liché dimenze. V případě $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$ by totiž platilo $h(\varphi) = d(\varphi) = n/2$, což pro lichá n nelze splnit. Vidíme, že jádro a obraz lineárního zobrazení mohou být za jistých podmínek i totožné. Obecně tedy neplatí, že jsou navzájem doplňkovými podprostory vektorového prostoru V_n.

Pozn.: Obecně se lineární zobrazení $\varphi : V_n \to V_n$ nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje přirozené číslo m takové, že $\varphi^m = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{m}$ je nulové zobrazení.

4.2.4 Projekce

Projekce jsou zvláštním typem lineárních zobrazení vektorového prostoru V_n do sebe. Jejich typické vlastnosti jsme si již mohli všimnout v příkladu 4.41, kde jsme se zabývali speciálním případem projekce. Vraťme se k tomuto příkladu.

Příklad 4.46: Opakované promítání

Zkusme ještě jednou promítnout obraz vektoru $\vec{a}$. Díky geometrické představě, která v trojrozměrném prostoru ještě neselhává, očekáváme, že další promítání již s jednou promítnutým vektorem nic nového neudělá. Skutečně,

$$\varphi(\vec{a}) \sim (\alpha^1\ \alpha^2\ \alpha^3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}(\alpha^1 + \alpha^2)\ \ \frac{1}{2}(\alpha^1 + \alpha^2)\ \ \alpha^3 \right),$$

$$\varphi(\varphi(\vec{a})) \sim \left(\frac{1}{2}(\alpha^1 + \alpha^2)\ \ \frac{1}{2}(\alpha^1 + \alpha^2)\ \ \alpha^3 \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}(\alpha^1 + \alpha^2)\ \ \frac{1}{2}(\alpha^1 + \alpha^2)\ \ \alpha^3 \right) \sim \varphi(\vec{a}).$$

Pro zobrazení z příkladu 4.41 tedy opravdu platí $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \varphi$.

Předchozí vlastnost představuje obecnou definiční podmínku pro projekci:

Lineární zobrazení $\varphi : V_n \to V_n$ se nazývá *projekce* neboli *idempotentní zobrazení*, jestliže platí

$$\varphi^2 = \varphi, \quad \text{tj.} \quad \varphi \circ \varphi(a) = \varphi(a) \quad \text{pro libovolné} \quad a \in V_n. \tag{4.30}$$

Všimněme si blíže vlastností projekce. Pro její matici A v libovolné bázi platí $AA = A$. Je-li φ regulární, dostáváme $A = E_n$ (zdůvodněte). Jedinou regulární projekcí je identita.

Jako u každého lineárního zobrazení budeme i u projekcí studovat jádro a obraz. V příkladu 4.45 jsme viděli, že jádro a obraz mohou mít společné prvky. Jak je tomu u projekce? V příkladu 4.41, kdy se jednalo o projekci, byly jádro a obraz navzájem doplňkovými vektorovými podprostory ve V_n, jejich jediným společným prvkem tedy byl nulový vektor. Platí tento závěr obecně? Předpokládejme, že $c \in \operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi$. Z předpokladu $c \in \operatorname{Im}\varphi$ plyne existence vzoru a, pro který $\varphi(a) = c$. Odtud $\varphi(c) = \varphi^2(a) = \varphi(a) = c$. Avšak současně je $c \in \operatorname{Ker}\varphi$, tj. $\varphi(c) = 0_{V_n}$. Proto je $c = 0_{V_n}$. Jádro a obraz projekce mají jediný společný prvek, nulový vektor. Z věty o dimenzi je pak již zřejmé, že jsou navzájem doplňkovými vektorovými podprostory ve V_n, tj.

$$\varphi^2 = \varphi \implies \operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi = V_n,\ \operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0_{V_n}\}. \tag{4.31}$$

4.2.5 Vektorové prostory lineárních zobrazení

Lineární zobrazení vektorového prostoru V_n do vektorového prostoru W_m si již dokážeme představit jako určitý předpis, který každému vektoru z V_n, tedy vzoru, přiřadí nějaký obraz z prostoru W_m. Způsob přiřazení není ledajaký. Má přísná pravidla spočívající v tom, že součtu dvou libovolných vzorů je přiřazen součet obrazů a násobku libovolného vzoru je přiřazen stejný násobek jeho obrazu. Lineární zobrazení „operují“ na vektorových prostorech vzorů a zobrazují tyto vzory do jiných vektorových prostorů. Název odstavce však naznačuje, že samotná lineární zobrazení tvoří také vektorový prostor. Jak je to možné? Věc je docela jednoduchá. Budeme-li množinu všech lineárních zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ považovat za nosnou množinu a podaří-li se nám na ní definovat operaci sčítání lineárních zobrazení a násobení lineárních zobrazení skalárem (z téhož pole, nad kterým jsou konstruovány prostor vzorů i prostor obrazů) tak, aby tyto operace splňovaly požadavky vektorového prostoru z odstavce 4.1.3, získáme skutečně vektorový prostor lineárních zobrazení. Pokusme se tedy o definici potřebných operací. Z „cvičných důvodů“ použijeme v tomto odstavci při výpočtech ve složkách Einsteinovu symboliku, vysvětlenou v příkladu 4.18. To proto, že zavádění struktury vektorového prostoru na množině lineárních zobrazení je prvním krokem k tenzorové algebře, v níž je Einsteinova symbolika zcela běžným nástrojem.

Označme $L(V_n, W_m)$ množinu všech lineárních zobrazení z V_n do W_m. Zvolme libovolně $\varphi, \psi \in L(V_n, W_m)$. Definujme dvě nová zobrazení

$$\chi : V_n \longrightarrow W_m : \quad \chi(a) = \varphi(a) + \psi(a), \tag{4.32}$$

$$\varrho : V_n \longrightarrow W_m : \quad \varrho(a) = \alpha\varphi(a), \tag{4.33}$$

kde $a \in V_n$ je libovolný vzor a α je libovolný skalár z číselného pole $\mathbf{C}$, nebo $\mathbf{R}$, podle toho, nad kterým z obou polí jsou konstruovány vektorové prostory vzorů a obrazů. Jsou nová zobrazení také lineární? To musíme zjistit. Ověříme požadavky linearity (4.21). Zvolme libovolné vzory $a, b \in V_n$ a libovolný skalár $\beta \in \mathbf{C}$, nebo $\beta \in \mathbf{R}$.

$$\chi(a+b) = \varphi(a+b) + \psi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) + \psi(a) + \psi(b) =$$

$$= [\varphi(a) + \psi(a)] + [\varphi(b) + \psi(b)] = \chi(a) + \chi(b),$$

$$\chi(\beta a) = \varphi(\beta a) + \psi(\beta a) = \beta\varphi(a) + \beta\psi(a) = \beta[\varphi(a) + \psi(a)] = \beta\chi(a).$$

Vidíme, že zobrazení χ opravdu požadavky linearity splňuje. Obdobně je můžeme dokázat i pro zobrazení ϱ. Pokuste se o to sami.

Projdeme-li ještě jednou předchozí jednoduchý důkaz linearity zobrazení χ, uvědomíme si, že jsme v jeho průběhu použili několik důležitých vlastností: definici zobrazení χ, linearitu obou zobrazení φ a ψ, a konečně vlastnosti základních operací s vektory — komutativitu a asociativitu vektorového sčítání a zákon linearity pro skalárního činitele. Dovedete označit v důkazu místa, kde jsme jednotlivých vlastností využili? A ještě jedna otázka: V první části důkazu se na řadě míst objevuje znaménko „plus“. Někdy však jde o znak součtu ve vektorovém prostoru V_n (mohli bychom tedy značit $+_{V_n}$), jindy ve vektorovém prostoru W_m (tedy $+_{W_m}$). Dokázali byste k jednotlivým „plusům“ připsat správný index?

Nová zobrazení χ a ϱ nazveme *součet* zobrazení φ a ψ a α*-násobek* zobrazení φ, značíme

$$\chi = \varphi + \psi, \quad \varrho = \alpha\varphi.$$

Vida, objevilo se nové „plus“ a „násobení skalárem“, tentokrát v množině $L(V_n, W_m)$. Nyní již stačí ověřit, zda nosná množina $L(V_n, W_m)$ opatřená operacemi sčítání a násobení skalárem splňuje axiomy vektorového prostoru. Ověřte sami. Zamyslete se také nad tím, jaké lineární zobrazení hraje roli neutrálního prvku nového vektorového prostoru a jak je definováno opačné zobrazení k φ.

V souvislosti s každým vektorovým prostorem si klademe otázku — jaký je jeho rozměr? Také v případě vektorového prostoru $L(V_n, W_m)$ na ni odpovíme. Máme již zkušenost, že nejjednodušeji odpověď získáme, nalezneme-li libovolnou bázi prostoru a spočítáme její prvky. Než se do takové konstrukce pustíme, pokusme se dimenzi prostoru lineárních zobrazení φ prostoru V_n do W_m určit na základě názorné představy. Tentokrát ovšem půjde spíše o „představivost“ algebraickou. Podle věty 4.2 je lineární zobrazení jednoznačně určeno obrazy kterékoli báze prostoru vzorů a v bázích $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ve V_n a $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ je reprezentováno maticí typu n/m. Taková matice má n krát m prvků, zobrazení φ je tedy určeno nm složkami. Zobrazení φ je ovšem „vektorem“, prvkem vektorového prostoru $L(V_n, W_m)$. Víme však již také, že počet složek, jimiž je prvek vektorového prostoru určen, je roven dimenzi prostoru.

Množina lineárních zobrazení $L(V_n, W_m)$ tvoří vektorový prostor dimenze nm.

Nyní zkonstruujeme v $L(V_n, W_m)$ bázi. Zvolme ve vektorovém prostoru vzorů V_n bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a v prostoru obrazů W_m bázi $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Nejjednodušší možnosti, jak vzorům $e_1, e_2, \ldots, e_n$ přisoudit obrazy, jsou zadány přímo touto volbou samotnou: Pro každý vzor e_j máme m možností jednoduchého přiřazení obrazu — každou z nich reprezentuje některý z vektorů f_α. Definujme proto lineární zobrazení ϕ^j_α pro $1 \le j \le n$, $1 \le \alpha \le m$, takto:

$$\begin{aligned}
\phi^1_1(e_1) &= f_1, \quad \phi^1_1(e_2) = 0_{W_m}, \quad \ldots, \quad \phi^1_1(e_n) = 0_{W_m}, \\
\phi^1_2(e_1) &= f_2, \quad \phi^1_2(e_2) = 0_{W_m}, \quad \ldots, \quad \phi^1_2(e_n) = 0_{W_m}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\phi^1_m(e_1) &= f_m, \quad \phi^1_m(e_2) = 0_{W_m}, \quad \ldots, \quad \phi^1_m(e_n) = 0_{W_m},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1^2(e_1) &= 0_{W_m}, \quad \phi_1^2(e_2) = f_1, \quad \ldots, \quad \phi_1^1(e_n) = 0_{W_m}\,,\\
\phi_2^2(e_1) &= 0_{W_m}, \quad \phi_2^2(e_2) = f_2, \quad \ldots, \quad \phi_2^1(e_n) = 0_{W_m}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\phi_m^2(e_1) &= 0_{W_m}, \quad \phi_m^2(e_2) = f_m, \quad \ldots, \quad \phi_m^2(e_n) = 0_{W_m}\,,
\end{aligned}$$

atd.

$$\begin{aligned}
\phi_1^n(e_1) &= 0_{W_m}, \quad \phi_1^n(e_2) = 0_{W_m}, \quad \ldots, \quad \phi_1^n(e_n) = f_1\,,\\
\phi_2^n(e_1) &= 0_{W_m}, \quad \phi_2^n(e_2) = 0_{W_m}, \quad \ldots, \quad \phi_2^n(e_n) = f_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\phi_m^n(e_1) &= 0_{W_m}, \quad \phi_m^1(e_2) = 0_{W_m}, \quad \ldots, \quad \phi_m^n(e_n) = f_m\,.
\end{aligned}$$

Obecný výraz pro zobrazení definovaná předchozími vztahy má tvar

$$\phi_\alpha^j(e_k) = f_\alpha\,\delta_k^j, \tag{4.34}$$

kde δ_k^j je Kroneckerovo delta (připomeňme, že nabývá hodnoty 1 pro $j = k$ a hodnoty 0 pro $j \neq k$). Je třeba dokázat, že soubor zobrazení $\{\phi_\alpha^j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, je bází prostoru $L(V_n, W_m)$. Nejprve dokážeme lineární nezávislost tohoto souboru. Předpokládejme, že

$$\gamma_j^\alpha\,\phi_\alpha^j = 0_{L(V_n,W_m)}, \quad \gamma_j^\alpha \in \mathbf{C}, \text{ nebo } \mathbf{R}.$$

(Nezapomeňme, že předchozí zápis představuje sumaci přes indexy $j = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha = 1, 2, \ldots, m$. I v dalších vztazích bude použita Einsteinova symbolika.) Vyčíslíme-li hodnotu této lineární kombinace všech zobrazení ϕ_α^j na vektorech báze e_k, dostaneme

$$0_{W_m} = (\gamma_j^\alpha \phi_\alpha^j)(e_k) = \gamma_j^\alpha\,\phi_\alpha^j(e_k) = \gamma_j^\alpha\,\delta_k^j f_\alpha = \gamma_k^\alpha\,f_\alpha.$$

Vektory $f_1, f_2, \ldots, f_m$ jsou ovšem lineárně nezávislé (tvoří bázi prostoru W_m). Nulovou lineární kombinaci z nich proto lze utvořit pouze pomocí nulových koeficientů, tj. $\gamma_j^\alpha = 0$ pro $1 \leq j \leq n$, $1 \leq \alpha \leq m$. Odtud je vidět, že zobrazení ϕ_α^j jsou lineárně nezávislá. Zbývá ověřit, že se jedná o *maximální lineárně nezávislý* systém zobrazení, tj. takový, který umožňuje vyjádřit kteréhokoli zobrazení patřící do prostoru $L(V_n, W_m)$ jako lineární kombinaci svých prvků. Zvolme libovolné zobrazení $\varphi \in L(V_n, W_m)$ a hledejme jeho zápis ve tvaru

$$\varphi = \varphi_j^\alpha\,\phi_\alpha^j.$$

Pokud se nám podaří nalézt konkrétní hodnoty všech koeficientů φ_j^α, znamená to, že jsme opravdu dokázali vyjádřit zobrazení φ jako lineární kombinaci systému zobrazení $\{\phi_\alpha^j\}$. Vyčíslíme-li φ na vektoru e_k báze prostoru vzorů, dostaneme

$$\varphi(e_k) = \varphi_j^\alpha\,\phi_\alpha^j(e_k) = \varphi_j^\alpha\,\delta_k^j\,f_\alpha = \varphi_k^\alpha\,f_\alpha.$$

Vyjádřili jsme obraz $\varphi(e_k)$ vektoru e_k, který je prvkem prostoru obrazů, jako lineární kombinaci báze tohoto prostoru $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Složky vektoru $\varphi(e_k)$ v dané bázi jsou právě hledaná čísla φ_j^α. Víme však, že rozklad vektoru do báze je určen jednoznačně, proto jsou koeficienty φ_j^α rovněž jednoznačné a představují složky zobrazení φ v bázi $\{\phi_\alpha^j\}$.

Příklad 4.47: Lineární formy

Připomeňme si podmínku (1.13) z příkladu 1.13 v odstavci 1.1.3 pro rovnoběžnost vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ s rovinou o rovnici $ax + by + cz + d = 0$: Vektor je s rovinou rovnoběžný právě tehdy, když $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Výraz na levé straně představuje *lineární formu* (označme ji τ) v proměnných u_1, u_2, u_3, čísla a, b, c jsou takzvané *koeficienty* nebo též *složky* lineární formy. Naopak, vektor $\vec{u}$ nebude s rovinou rovnoběžný právě tehdy, bude-li lineární forma vyčíslená pro jeho složky nabývat nenulové hodnoty. Hodnota lineární formy je v našem případě reálné číslo. Mohli bychom ji zapsat v oblíbeném maticovém tvaru

$$\tau(\vec{u}) = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3 \in \mathbf{R}.$$

Všimněte si, že složky lineární formy na rozdíl od složek vektorů zapisujeme do sloupce.

Zobecníme nyní pojem lineární formy. Nejprve názorně a potom abstraktně. Zvolme ve vektorovém prostoru V_n nad $\mathbf{R}$ bázi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Složky vektorů $a \sim (\alpha) = (\alpha^1 \; \alpha^2 \; \ldots \; \alpha^n)$ budeme považovat za proměnné. Zvolme reálné koeficienty τ_1 až τ_n. Lineární formu v proměnných $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ pak zřejmě zapíšeme ve tvaru

$$\tau(a) = \tau_1\alpha^1 + \tau_2\alpha^2 + \cdots + \tau_n\alpha^n.$$

(Zapište tento výraz pomocí maticového násobení.) Víme, že reálná osa $\mathbf{R}$ s operacemi sčítání a násobení má strukturu jednorozměrného vektorového prostoru. Označme tedy $W_1 = \mathbf{R}$. Lineární zobrazení $\tau \in L(V_n, \mathbf{R})$ nazveme *lineární formou* na vektorovém prostoru V_n. Pro jednoduchost a podle zavedených zvyklostí označme $L(V_n, \mathbf{R}) = V_n^*$. Množinu V_n^* můžeme samozřejmě opatřit operacemi sčítání lineárních forem a jejich násobení reálným číslem. Jde přece o lineární zobrazení vektorových prostorů. Vektorový prostor V_n^* nad $\mathbf{R}$, který takto vznikne, je stejně jako V_n n-rozměrný. Prvky jeho báze definujeme vztahem

$$e^i(e_k) = \delta_k^i, \quad i, k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.35}$$

Důkaz, že $(e^1, \ldots, e^n)$ je báze ve V_n^*, je stejný jako v případě zobrazení ϕ_α^j. Hovoříme o *indukované bázi* (její volba je indukována, „vyvolána“, volbou báze prostoru V_n).

Vektorový prostor V_n^* lineárních forem na prostoru V_n se nazývá *duální prostor k prostoru* V_n. Jeho báze definovaná vztahem (4.35) se nazývá *duální báze*.

Pojem *duality* ještě objasníme na dalším příkladu.

Příklad 4.48: V čem je dualita

Dualita vynikne, uvědomíme-li si vztahy při přechodech mezi bázemi. Přejdeme-li od báze $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ prostoru V_n k bázi $\bar{\mathcal{B}} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ pomocí matice přechodu T, jak bude popsán přechod mezi bázemi indukovanými? Označíme-li matici přechodu od duální báze $(e^1, e^2, \ldots, e^n)$ k bázi $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \ldots, \bar{e}^n)$ symbolem M, můžeme psát $\bar{e}^i = \mu^i_s e^s$. Pak

$$\delta^i_j = \bar{e}^i(\bar{e}_j) = \mu^i_s e^s\left(\tau^r_j e_r\right) = \mu^i_s\tau^r_j\, e^s(e_r) = (\mu^i_s\tau^r_j)\delta^s_r = \left(\mu^i_s\tau^s_j\right) = (MT)^i_j \implies M = T^{-1}.$$

Nechť $\omega \in V_n^*$ je lineární forma, v bázích $(e^1, e^2, \ldots, e^n)$, resp. $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \ldots, \bar{e}^n)$ vyjádřená svými složkami ω_1 až ω_n, resp. $\bar{\omega}_1$ až $\bar{\omega}_n$. Pak zápisy $\omega = \omega_j e^j$ a $\omega = \bar{\omega}_i\bar{e}^i$ vyjadřují tutéž formu ω ve dvou různých bázích. Upravujme druhý výraz

$$\omega = \bar{\omega}_i\bar{e}^i = \bar{\omega}_i(\mu^i_j e^j) = (\bar{\omega}_i\mu^i_j)e^j.$$

Vyjádřili jsme tím formu ω jako lineární kombinaci prvků báze $\mathcal{B}$, takže

$$\omega_j = \mu^i_j\bar{\omega}_i, \quad \bar{\omega}_i = \tau^j_i\omega_j, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^2_1 & \cdots & \tau^n_1 \\ \tau^1_2 & \tau^2_2 & \cdots & \tau^n_2 \\ \tau^1_n & \tau^2_n & \cdots & \tau^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}.$$

Maticový zápis transformačních vztahů pro lineární formy má tvar

$$\implies (\bar{\omega}) = T(\omega), \quad (\omega) = T^{-1}(\bar{\omega}). \tag{4.36}$$

Transformační vztahy (4.36) pro složky lineárních forem jsou duální — dalo by se říci „doplňkové“ nebo „párové“ — k transformačím vztahům (4.13) pro složky vektorů. Matice T a T^{-1} si v nich „vyměňují místo“: při přechodu například od „starých“ (nepruhovaných) složek k „novým“ (pruhovaným) je násobení řádkové n-tice složek vektoru zprava maticí přechodu T^{-1} zaměněno násobením sloupcové n-tice složek lineární formy maticí přechodu T zleva.

Vyjádříme-li konečně vektory a lineární formy pomocí jejich složek v navzájem duálních bázích, dostáváme

$$a = \alpha^i e_i, \quad \omega = \omega_j e^j \implies \omega(a) = \omega_j e^j\left(\alpha^i e_i\right) = \alpha^i\omega_j\delta^j_i = \alpha^i\omega_i,$$

$$\omega(a) = (\alpha^1\ \alpha^2\ \ldots\ \alpha^n)\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = (\alpha)(\omega).$$

(Opakované upozornění: Složky vektoru tvoří řádkovou matici, složky lineární formy matici sloupcovou.) A jaký výsledek vyčíslení lineární formy ω na vektorovém argumentu a máme očekávat, přejdeme-li k bázi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ a k odpovídající bázi duální? Samozřejmě, že stejný:

$$(\bar{\alpha})(\bar{\omega}) = (\alpha)T^{-1}T(\omega) = (\alpha)(\omega).$$

4.2.6 Cvičení

1. Rozhodněte, zda následující zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ jsou lineární:

a) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\varphi((x,y,z)) = (x+2, y+z)$,

b) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\varphi((x,y,z)) = (x+y, z-y, x+z)$,

c) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\varphi((x,y)) = (x-y, x+y, x)$,

d) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\varphi((x,y)) = (x^2+2xy+y^2)$,

e) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\varphi((x,y,z)) = (x-y+3z)$.

2. Pro ta zobrazení z předchozího příkladu, která jsou lineární, určete jejich matici ve standardních bázích, jejich jádro a obraz.

3. Uveďte příklad lineárního zobrazení (symbolem $\mathcal{M}(n/m)$ označujeme prostor matic typu n/m nad reálnými čísly):

a) $\varphi : \mathcal{M}(2/2) \to \mathbf{R}$,

b) $\varphi : \mathcal{M}(2/2) \to \mathcal{M}(3/3)$,

c) $\varphi : \mathbf{P}[3] \to \mathbf{R}^2$,

d) $\varphi : \mathbf{R} \to \mathcal{M}(2/2)$,

e) $\varphi : \mathcal{M}(2/2) \to \mathbf{R}^4$.

Určete jejich jádro a obraz, zvolte nějaké báze příslušných prostorů a určete matice zobrazení v těchto bázích. Uveďte také příklady zobrazení těchto prostorů, která nejsou lineární.

4. Uveďte příklad lineárního zobrazení:

a) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ s jádrem $\mathrm{Ker}\varphi = [|(1,1,0),(0,1,1),(-1,0,1)|]$,

b) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ s obrazem $\mathrm{Im}\varphi = [|(1,1,0),(1,2,0)|]$,

c) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, které je, resp. není izomorfismem,

d) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ s jádrem a obrazem $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Im}\varphi = [|(1,1)|]$.

5. Lineární zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zobrazí vektor $v_1 = (-2,1)$ na $\varphi(v_1) = (-1,2,0)$ a vektor $v_2 = (1,3)$ na $\varphi(v_2) = (0,-3,5)$. Složky vektorů jsou zadány ve standardních bázích. Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bázích, jádro a obraz zobrazení. Určete matici tohoto zobrazení v bázích $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^2} = (v_1, v_2)$, $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^3} = (\varphi(v_1), \varphi(v_2), c)$, kde vektor c zvolte tak, aby systém $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), c)$ byl lineárně nezávislý. Výsledek zkontrolujte pomocí transformačního vztahu (4.25).

6. Jsou dány vektory $u = (1,2,0)$, $v = (2,1,-1)$, $w = (1,-1,-1)$ a $c = (0,0,1)$ v $\mathbf{R}^3$. Zjistěte, zda existuje lineární zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ takové, že:

a) $\varphi(u) = (1,2)$, $\varphi(v) = (2,3)$, $\varphi(w) = (1,1), \varphi(c) = (0,0)$,

b) $\varphi(u) = (-2,1)$, $\varphi(v) = (1,1)$, $\varphi(w) = (8,-1), \varphi(c) = (0,0)$.

V kladném případě takové zobrazení nalezněte.

7. Nechť $\mathbf{P}[n]$ je vektorový prostor všech polynomů s reálnými koeficienty stupně nejvýše n. Definujme zobrazení $\varphi : \mathbf{P}[n] \to \mathbf{P}[n]$ takto:

$$\mathbf{P}[n] \ni P(x) \longrightarrow \varphi(P(x)) = P'(x) \in \mathbf{P}[n],$$

kde $P'(x)$ značí derivaci polynomu $P(x)$.

a) Dokažte, že φ je lineární zobrazení,

b) určete jádro a obraz, hodnost a defekt tohoto zobrazení,

c) rozhodněte, zda se jedná o regulární zobrazení,

d) zapište matici zobrazení φ v bázi $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^n)$, resp. v bázi $\mathcal{B}' = (1, x, \frac{1}{2!}x^2, \ldots, \frac{1}{n!}x^n)$ a přesvědčte se o správnosti výpočtu použitím transformačního vztahu (4.25).

∗**8.** Ukažte, že inverzní zobrazení k libovolnému izomorfismu je opět izomorfismus (tj. z přepokladu, že zobrazení φ je lineární bijekce, plyne linearita zobrazení φ^{-1}).

9. Zodpovězte na otázku z příkladu 4.44: Bude výpočet inverzní matice fungovat také pro kombinaci řádkových a sloupcových úprav?
Návod: V úpravách ve vztahu (4.29) jsme využili skutečnosti, že jednotková matice komutuje s každou maticí. Budeme-li používat jak sloupcových, tak řádkových úprav, bude $A' = E = TAN$, kde matice $N = M^{-1}$ realizuje sloupcové úpravy. Vyjádřete A^{-1} pro tento případ.

10. Uvažujte o množině $L(V_n, W_m)$ jako o vektorovém prostoru opatřeném sčítáním lineárních zobrazení a násobením lineárního zobrazení skalárem. Které zobrazení plní úlohu neutrálního prvku? Které zobrazení plní úlohu opačného prvku k $\varphi \in L(V_n, W_m)$? Zodpovězte tyto otázky také pro případ duálního prostoru k V_n, $V_n^* = L(V_n, \mathbf{R})$.

4.3 Vlastní vektory

Od tohoto odstavce se budeme věnovat výhradně lineárním zobrazením vektorového prostoru V_n do sebe. Budeme jim říkat *lineární operátory*. Z odstavce 4.2.2 víme, že takové lineární zobrazení je v zadané bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ vektorového prostoru reprezentováno čtvercovou maticí A řádu n, v jiné bázi $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ pak maticí $\bar{A} = TAT^{-1}$, kde T je matice přechodu od první báze k druhé. Výběr báze pro reprezentaci zobrazení je libovolný. Proč tedy nevolit takovou bázi, aby v ní bylo zobrazení reprezentováno maticí co nejjednodušší? Nejlépe diagonální. Pokud by se taková věc podařila, byl by to velmi významný praktický výsledek. Vzpomínáte na úvod předchozího odstavce, v němž jsme právě na fyzikálních příkladech vybudovali definici lineárního zobrazení? Ve vztahu mezi úhlovou rychlostí (vzor) a momentem hybnosti (obraz) je lineární zobrazení reprezentováno maticí momentu setrvačnosti. Lineární vztah mezi intenzitou elektrického pole (vzor) a polarizací (obraz) je dán maticí polarizovatelnosti, apod. Pokud by existovaly v trojrozměrném vektorovém prostoru takové báze, ve kterých jsou „fyzikální“ lineární zobrazení reprezentována diagonálními maticemi, bylo by to pro praktické počítání velmi výhodné. V takové bázi by například vztahy mezi složkami úhlové rychlosti a složkami momentu hybnosti získaly tvar $L_1 = J_{11}\omega_1$, $L_2 = J_{22}\omega_2$ $L_3 = J_{33}\omega_3$ (podle fyzikálních zvyklostí jsou všechny indexy dole). Nediagonální složky matice J by byly nulové. Musíme tedy zodpovědět otázku, zda vůbec a za jakých podmínek taková báze bude existovat. Zjistíme, že při její konstrukci hrají důležitou roli takzvané *vlastní vektory* daného lineárního zobrazení, které jsou, zhruba řečeno, určeny podmínkou, že při daném lineárním zobrazení nemění svůj směr.

Dodejme, že zatímco v klasické fyzice lze nalezení báze, ve které má lineární operátor diagonální tvar, považovat spíše za usnadnění výpočtů, v jiných oblastech fyziky má význam princi-

piální. Například fyzikální systémy složené z mikročástic (třeba soustava elektronů v atomu) se nechovají podle klasických pravidel. Nejde o kuličky či hmotné body poslušně obíhající kolem větší kuličky — atomového jádra — určitou rychlostí či s určitou energií, která může nabývat všech možných hodnot. Naopak, jejich energie je kvantována, může se změnit jen skokem, při současném vyzáření či pohlcení světla, jehož energie či vlnová délka musí odpovídat povolené velikosti skoku. A mají ještě další důležitou vlastnost. Stav elektronu není určen polohou a hybností, jako je tomu u klasického hmotného bodu. Polohu a hybnost není dokonce ani možné současně přesně určit, platí pro ně známé Heisenbergovy relace neurčitosti. I přes toto podivné chování našli fyzikové vhodný matematický aparát, jímž lze fyzikální soustavy v mikrosvětě popsat. Je jím právě aparát lineární algebry. Stav fyzikální soustavy (třeba opět elektronu v atomu) je popsán určitým vektorem, prvkem vektorového prostoru nad $\mathbf{C}$ — takzvaného prostoru Hilbertova. Fyzikální veličina, třeba energie, je matematicky představována lineárním operátorem v tomto prostoru. Experimentání zkušenost ukazuje, že při měření veličiny lze naměřit jen takové hodnoty, které jsou tzv. vlastními hodnotami tohoto operátoru. A nakonec po měření, při kterém jsme získali danou hodnotu, se systém nachází ve stavu popsaném příslušným vlastním vektorem. Že je to neuvěřitelné? Věřte nebo ne, lineární algebru budete všude ve fyzice potřebovat.

4.3.1 Co jsou to vlastní vektory ...

Předpokládejme, že $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je právě taková báze prostoru V_n, jakou hledáme, tj. v níž je lineární operátor $\varphi : V_n \to V_n$ reprezentován diagonální maticí

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Z definice reprezentující matice vyplývá, že její i-tý řádek obsahuje koeficienty lineární kombinace, která vyjadřuje obraz i-tého vektoru báze pomocí všech vektorů této báze, tj.

$$\varphi(b_i) = 0\,b_1 + 0\,b_2 + \cdots + 0\,b_{i-1} + \lambda_i b_i + 0\,b_{i+1} + \cdots + 0\,b_n \Longrightarrow \varphi(b_i) = \lambda_i b_i.$$

Vektor b_i se tedy zobrazí tak, že se působením φ pouze „natáhne“ nebo „zkrátí“ (také se samozřejmě může zobrazit na nulový vektor, je-li $\lambda_i = 0$, nebo se s ním nestane nic, je-li $\lambda_i = 1$). A právě takové vektory budeme hledat a snažit se z nich vytvořit bázi. Jedná se o *vlastní vektory operátoru* φ.

Nenulový vektor $b \in V_n$ nazveme *vlastním vektorem* lineárního operátoru φ, jestliže existuje číslo λ (reálné, nebo komplexní, podle toho, nad kterým polem čísel je náš vektorový prostor definován) takové, že platí

$$\varphi(b) = \lambda\, b\,. \tag{4.37}$$

Číslo λ nazýváme *vlastní hodnotou* operátoru φ. Vektor b je vlastním vektorem *příslušným vlastní hodnotě* λ.

Je zřejmé, že vlastní hodnota je pro daný vlastní vektor určena jednoznačně. Skutečně, pokud by pro dvě různá čísla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ platilo $\varphi(b) = \lambda_1\, b = \lambda_2\, b$, tj. $(\lambda_1 - \lambda_2)b = 0_{V_n}$, musel by vektor b být nulový. A to jsme v definici vlastního vektoru zakázali. A proč jsme z definice vlastního vektoru vyloučili nulový vektor? Protože platí $\varphi(0_{V_n}) = \lambda\, 0_{V_n}$ pro každé číslo λ. Pokud bychom nulový vektor jako vlastní připustili, nedokázali bychom mu jednoznačně přisoudit vlastní hodnotu. Nulový vektor by také nemohl být prvkem báze, kterou hledáme. Vzpomenete si, proč nulový vektor nemůže být prvkem žádné báze?

Definici vlastního vektoru jsme formulovali na základě požadavku nalezení báze $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, v níž bude daný lineární operátor reprezentován diagonální maticí. Jestliže si znovu uvědomíme, že i-tý řádek reprezentující matice obsahuje složky obrazu i-tého vektoru e_i báze $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, můžeme formulovat následující důležité tvrzení.

Věta 4.3: *Lineární operátor $\varphi : V_n \to V_n$ je v bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ reprezentován diagonální maticí právě když je tato báze tvořena jeho vlastními vektory.*

Nemusíme už nic dokazovat, tvrzení jsme předchozí úvahou odvodili. Je také jasné, že v diagonále matice budou stát vlastní hodnoty operátoru příslušné vlastním vektorům, z nichž je báze sestrojena.

4.3.2 ... a jaké mají vlastnosti a jak je hledat?

Věta uvedená v závěru předchozího odstavce ovšem neodpovídá na nejdůležitější otázku — *zda vůbec* a *kdy* báze tvořená vlastními vektory existuje. Ani my na ni v tomto odstavci neodpovíme, pokusíme se však alespoň zjistit nejdůležitější vlastnosti souboru vlastních vektorů a odpovídajících vlastních hodnot.

Příklad 4.49: Vlastní vektory — geometrická představa a algebraický výpočet

Ještě jednou se vraťme k názornému příkladu 4.41 a pokusme se najít vlastní vektory projekce φ, která je v tomto příkladu popsána. Zobrazení bylo definováno jako promítání do vektorového podprostoru $L = [|\vec{f}_1, \vec{f}_2|]$, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_3$, při volbě doplňku $L' = [|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|]$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je báze vektorového prostoru V_3. Nejprve zjistěme vlastní vektory na základě geometrického významu zobrazení φ. Hledáme, názorně řečeno, všechny takové nenulové vektory prostoru V_3, které promítnutím nezmění směr (popřípadě se anulují). Takové vektory

jsou dvojího druhu. Ty, které jsou prvky vektorového podprostoru L, se promítají samy na sebe, a ty, které jsou prvky doplňku L', se promítají na nulový vektor. Nenulové prvky z L jsou vlastními vektory projekce φ příslušnými vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$, nenulové prvky z L' pak vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě $\lambda_2 = 0$, tj.

$$\varphi(\vec{b}) = \vec{b} \iff \vec{b} \in L, \quad \varphi(\vec{b}) = \vec{o} \iff \vec{b} \in L' .$$

Nyní vypočteme vlastní vektory a vlastní hodnoty algebraicky. Předpokládejme, že hledaný vlastní vektor $\vec{b}$ má v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ složky $\vec{b} \sim (\beta^1\ \beta^2\ \beta^3)$. Matici projekce φ jsme zjistili už v příkladu 4.41. Pro vlastní vektor platí

$$\varphi(\vec{b}) = \lambda\vec{b} \implies (\beta^1\ \ \beta^2\ \ \beta^3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\beta^1\ \ \lambda\beta^2\ \ \lambda\beta^3) ,$$

jeho složky jsou tedy řešením homogenní soustavy tří rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\beta^1 & + & \frac{1}{2}\beta^2 & + & 0\,\beta^3 & = & 0, \\ \frac{1}{2}\beta^1 & + & \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\beta^2 & + & 0\,\beta^3 & = & 0, \\ 0\,\beta^1 & + & 0\,\beta^2 & + & (1-\lambda)\beta^3 & = & 0. \end{array}$$

Matice této soustavy a rozšířená matice mají tvar

$$B = \left((A - \lambda E)^T | \bar{B}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \end{array}\right).$$

Pozn.: Uvědomte si, jak je definována matice soustavy lineárních rovnic (viz odstavec 1.1.2) a proč tedy matici $A - \lambda E$ transponujeme. Dále si připomeňte, že hodnost matice je rovna hodnosti matice transponované a také jejich determinant je stejný.

U homogenní soustavy je hodnost matice soustavy shodná s hodností matice rozšířené. Podle Frobeniovy věty z odstavce 1.1.2 o lineárních rovnicích má tato soustava vždy přinejmenším triviální řešení. Triviální řešení je řešením jediným právě tehdy, je-li společná hodnost matice soustavy a matice rozšířené maximální možná, tj. v našem případě $h(A - \lambda E) = h(B) = 3$. Triviální řešení však představuje nulový vektor, který jsme jako vlastní vektor operátoru nepřipustili. Zajímají nás pouze situace, kdy soustava má netriviální řešení. V takovém případě je $h(A - \lambda E) = h(B) < 3$. Matice $A - \lambda E$ je tedy singulární, má nulový determinant. Tento požadavek umožní určit všechny přípustné hodnoty λ:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \left[\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right](1 - \lambda) = 0 \implies \lambda(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Jako vlastní hodnoty operátoru φ tedy připadají v úvahu dvě různé hodnoty $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 0$. Soustavu rovnic pro neznámé složky β^1, β^2, β^3 nyní vyřešíme po každou z těchto hodnot.

$$(A - \lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \beta^1 = \beta^2, \quad \text{tj.} \quad \vec{b} = \beta^2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \beta^3\vec{e}_3 ,$$

kde β^2 a β^3 jsou volné neznámé. (Aby b byl skutečně vlastní vektor operátoru φ podle definice, nesmí být volné neznámé současně nulové.) Je vidět, že vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ jsou právě všechny

nenulové vektory z dvojrozměrného podprostoru $L = [|\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\, \vec{e}_3|] = [|\vec{f}_1,\, \vec{f}_2|]$. Spolu s nulovým vektorem pak vytvoří vektorový podprostor L. Obdobně pro vlastní hodnotu $\lambda_2 = 0$ dostaneme

$$(A - \lambda_2 E)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \beta^2 = -\beta^1,\ \beta^3 = 0, \quad \text{tj.} \quad \vec{b} = \beta^1(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\,.$$

Jediná volná neznámá β^1 ukazuje na očekávaný výsledek, že řešením této soustavy rovnic bude jednorozměrný podprostor. Tímto podprostorem je doplněk podprostoru L, $L' = [|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|]$. Vlastní vektory projekce φ příslušné vlastní hodnotě $\lambda_2 = 0$ tvoří (po doplnění nulového vektoru) vektorový podprostor L' ve V_3. Pomocí algebraického výpočtu jsme se přesvědčili, že nás naše geometrická představa prozatím nezklamala — vlastní vektory a vlastní hodnoty jsou opravdu takové, jak jsme usoudili na základě geometrické úvahy.

Hledáme nyní novou bázi v prostoru V_3, která bude tvořena vlastními vektory lineárního operátoru φ. V našem příkladu taková báze existuje, neboť vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ tvoří ve V_3 dvojrozměrný vektorový podprostor L a vlastní vektory příslušné hodnotě $\lambda_2 = 0$ jeho jednorozměrný doplněk, samozřejmě vždy po doplnění nulového vektoru. Dohromady všechny vlastní vektory generují celý prostor V_3, takže z nich lze vybrat bázi. (Odpovězte na otázku, kolik takových bází tvořených vlastními vektory zobrazení φ byste dokázali najít, a charakterizujte jejich společné vlastnosti.) Zvolme bázi ve V_3 z vlastních vektorů lineárního operátoru φ například takto: $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, $\vec{e}_1' = \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{f}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Matice přechodu T od původní báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{B}'$ a matice inverzní jsou

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jakou maticí bude zobrazení φ reprezentováno v bázi $\mathcal{B}'$? Na to jistě dokážete odpovědět předem — musí to být diagonální matice, jejíž diagonála bude obsazena vlastními hodnotami. Vlastní hodnota $\lambda_1 = 1$ se objeví v diagonále dvakrát, vlastní hodnota $\lambda_2 = 0$ jednou. Víte proč?

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zkusme opět naše očekávání ověřit výpočtem, při němž i současně zopakujeme násobení matic:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přesvědčili jsme se, že algebraický výpočet vede ke stejnému výsledku jako geometrický postup. Jeho výhoda je však v tom, jak jsme již ostatně několikrát konstatovali, že je použitelný univerzálně, tedy i v případě, že geometrická představa je obtížná, nebo selhává zcela. Takovou situaci představuje každá úloha ve více než trojrozměrném prostoru. Ani čtyřrozměrný prostor si nedokážeme představit, natož pak nějaké geometrické operace v něm.

Příklad 4.50: Když vlastní vektory nestačí

Zůstaňme u úvah v trojrozměrném vektorovém prostoru (nyní již v abstraktním, ne nutně z orientovaných úseček). Předpokládejme, že lineární operátor $\varphi : V_3 \to V_3$ je v bázi (e_1, e_2, e_3) reprezentován maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hledejme vlastní vektory tohoto operátoru. Nejprve najdeme jeho vlastní hodnoty.

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda-3)^2 = 0 \implies \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3.$$

Kořen $\lambda_1 = 0$ je jednonásobný, kořen $\lambda_2 = 3$ dvojnásobný. Složky vlastních vektorů jsou neznámými v soustavě rovnic o matici $(A - \lambda_1 E)^T$, resp. $(A - \lambda_2 E)^T$:

$$(A - \lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies L_1 = [|(1,\,1,\,1)|],$$

$$(A - \lambda_2 E)^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies L_2 = [|(-2,\,1,\,4)|].$$

Každé z hodnot $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 3$ tedy přísluší pouze jednorozměrný podprostor vlastních vektorů. I když máme k dispozici nekonečně mnoho vlastních vektorů operátoru φ, nedokážeme z nich vytvořit v prostoru V_3 bázi. Všechny dohromady totiž generují pouze dvojrozměrný podprostor $L = L_1 + L_2$.

Některé závěry z předchozích příkladů snadno zobecníme. Nechť V_n je vektorový prostor nad polem komplexních (nebo reálných) čísel, $\varphi : V_n \to V_n$ je lineární operátor. Řešení problému vlastních hodnot znamená nalezení všech komplexních (nebo reálných) čísel λ a všech odpovídajících vektorů b vyhovujících definici (4.37), tj.

$$\varphi(b) = \lambda b \iff (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{V_n})(b) = 0_{V_n}. \tag{4.38}$$

Pro praktické nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů je třeba tento vztah vyjádřit číselně, tj. v nějaké bázi. Označíme-li zatím neznámé složky vektoru b v libovolné, ale předem pevně zvolené bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ jako $(\beta) = (\beta^1\ \beta^2\ \ldots\ \beta^n)$ a uvážíme-li, že zobrazení φ je v této bázi reprezentováno známou maticí A, dostaneme z rovnice (4.38) homogenní soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých β^1 až β^n:

$$(\beta)(A - \lambda E) = (0), \quad \text{tj.}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_1^1 - \lambda)\beta^1 + \alpha_2^1\beta^2 + \cdots + \alpha_n^1\beta^n &= 0\,,\\
\alpha_1^2\beta^1 + (\alpha_2^2 - \lambda)\beta^2 + \cdots + \alpha_n^2\beta^n &= 0\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\,,\\
\alpha_1^n\beta^1 + \alpha_2^n\beta^2 + \cdots + (\alpha_n^n - \lambda)\beta^n &= 0\,.
\end{aligned}$$

Maticí této soustavy je matice $(A - \lambda E)^T$. Pozor, při řešení soustavy úpravami matice do schodovitého tvaru nesmíme na transponování zapomenout! Soustava je homogenní, a proto má vždy přinejmenším triviální řešení. To však představuje nulový vektor, který za vlastní považovat nechceme. „Opravdové“ vlastní vektory můžeme dostat pouze v případech, kdy soustava bude mít netriviální řešení, tj. pro

$$h(A - \lambda E) < n \quad \text{neboli} \quad \det(A - \lambda E) = 0. \tag{4.39}$$

Dostáváme tak vztah pro možné vlastní hodnoty λ. Splňují jej právě kořeny polynomu n-tého stupně v proměnné λ, který získáme vyjádřením determinantu. Kořenů je v komplexním oboru právě n, započteme-li každý z nich tolikrát, kolik činí jeho násobnost. Které z těchto kořenů však skutečně budou vlastními hodnotami a které ne? Pokud pracujeme s vektorovým prostorem nad $\mathbf{C}$, je determinant matice $(A - \lambda E)$ polynomem s komplexními koeficienty a bude mít také obecně komplexní kořeny. Každý z nich jako vlastní hodnota skutečně poslouží, neboť pro každý z nich bude mít soustava rovnic pro vlastní vektory nad $\mathbf{C}$ netriviální řešení. V případě vektorového prostoru nad $\mathbf{R}$ je malý „zádrhel“. Determinant je sice polynomem s reálnými koeficienty, jeho kořeny však mohou být i komplexní (nejjednodušší ukázkou je polynom $\lambda^2 + 1$). Ty však vlastními hodnotami být nemohou, neboť pro ně není definováno násobení vektoru a pravá strana rovnice (4.37) nemá smysl.

A ještě jedna otázka: Jaký smysl budou mít takto získané hodnoty λ, když jedno a totéž lineární zobrazení je v různých bázích reprezentováno různými maticemi? Bude i determinant matice $(A - \lambda E)$ v různých bázích různý? Naštěstí nikoliv. Snadno se o tom přesvědčíme. V bázi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ je zobrazení φ reprezentováno v souladu se vztahem (4.26) maticí $\bar{A} = TAT^{-1}$, kde T je matice přechodu mezi bázemi. Platí

$$\det(\bar{A} - \lambda E) = \det(TAT^{-1} - \lambda E) = \det[T(A - \lambda E)T^{-1}] = \det(A - \lambda E).$$

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že $\lambda E = \lambda TET^{-1} = T(\lambda E)T^{-1}$, a pravidla pro determinant součinu matic. Vidíme, že polynom $\det(A - \lambda E)$, a tedy ani jeho kořeny, nezávisí na volbě báze, jsou dány pouze zobrazením samotným. Mluvíme o *charakteristickém polynomu* a *charakteristických kořenech* lineárního operátoru φ. Matice $(A - \lambda E)$ samotná sice na volbě báze závisí, ale přesto je nazývána *charakteristickou maticí* lineárního operátoru.

Můžeme tedy nakonec vyslovit tvrzení, které vzápětí ilustrujeme příkladem.

Věta 4.4: *Vlastními hodnotami lineárního operátoru ve vektorovém prostoru V_n nad polem komplexních čísel jsou právě jeho charakteristické kořeny. Vlastními hodnotami lineárního operátoru ve vektorovém prostoru V_n nad polem reálných čísel jsou právě jeho reálné charakteristické kořeny.*

Soubor charakteristických kořenů lineárního operátoru se nazývá jeho *spektrem*. Že vám to připomíná fyzikální terminologii? Zcela právem. Například spektrální složení světla, které vyzařují excitované atomy, úzce souvisí se spektrem charakteristických kořenů operátoru energie elektronů atomového obalu. Jsou-li všechny vlastní hodnoty operátoru jednonásobné, hovoříme o *jednoduchém spektru*.

Příklad 4.51: Kdy lze a nelze použít charakteristický kořen?

Vraťme se k příkladu 4.40 a uvažujme o otáčení v rovině o úhel α (viz obr. 4.26 s označením α místo ψ). Jedná se o lineární operátor $\varphi : V_2 \to V_2$, přičemž V_2 je dvojrozměrný vektorový prostor nad $\mathbf{R}$. Přemýšlejme nad vlastními vektory nejprve geometricky. Existuje nějaký nenulový vektor, který při otočení nezmění svůj směr? Při obecném úhlu otočení jistě nikoliv. Jedině budeme-li otáčet o násobky 180°, dostaneme netriviální řešení problému vlastních vektorů. V případě sudých násobků bude příslušné otočení identitou. Vlastním vektorem identity je ovšem každý vektor prostoru a přísluší vlastní hodnotě $\lambda = 1$. Pro úhly otočení, které jsou lichými násobky 180°, je příslušné otočení operací středové symetrie, všechny vektory jsou opět vlastní a odpovídají vlastní hodnotě $\lambda = -1$. K témuž závěru bychom měli dospět také algebraickým postupem. Podle věty 4.2 je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno obrazy kterékoli báze. V našem případě jsou tyto obrazy vyjádřeny v původní bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ takto: $\varphi(\vec{e}_1) = (\cos\alpha)\vec{e}_1 + (\sin\alpha)\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2) = (-\sin\alpha)\vec{e}_1 + (\cos\alpha)\vec{e}_2$. Najdeme charakteristické kořeny tohoto otočení.

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + (\sin\alpha)^2.$$

Kořeny tohoto polynomu jsou

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha}.$$

Pro $\alpha \neq k\pi$ se jedná vždy o dvojici komplexně sdružených kořenů, které v prostoru nad polem reálných čísel nemohou plnit roli vlastních hodnot. Úloha tedy nemá řešení, otočení o obecný úhel nemá vlastní vektory. Pouze pro $\alpha = 2k\pi$ dostaneme $\lambda_{1,2} = 1$ a $A = E$, pro $\alpha = (2k+1)\pi$ pak $\lambda_{1,2} = -1$ a $A = -E$. V obou případech je každý nenulový vektor prostoru vlastním vektorem příslušného operátoru.

Pokud bychom připustili, že vektorový prostor V_2 je konstruován nad polem komplexních čísel, a vzdali se tedy geometrické představy otáčení, budou oba komplexně sdružené kořeny (pro $\alpha \neq k\pi$) přípustné jako vlastní hodnoty operátoru φ. Najdeme vlastní vektory.

$$(A - \lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\mathrm{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení soustavy rovnic pro vlastní vektory tvoří jednorozměrný vektorový podprostor $L_1 = [|(\mathrm{i}, 1)|]$. Obdobně lze najít jednorozměrný podprostor vlastních vektorů operátoru φ příslušných vlastní hodnotě λ_2, $L_2 = [|(-\mathrm{i}, 1)|]$.

Na základě výsledků předchozích tří příkladů můžeme poznatky o vlastních vektorech a vlastních hodnotách lineárních operátorů shrnout takto: V případě, že se pohybujeme ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{C}$, budou všechny charakteristické kořeny operátoru použitelné i jako vlastní hodnoty. To však neznamená, že se podaří najít dostatek vlastních vektorů k tomu, aby v prostoru utvořily bázi. Jsou situace, kdy ji vytvoří (viz příklad 4.49), jsou však i situace opačné (příklad 4.50).

Příkladem operátorů ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{C}$, pro něž báze z vlastních vektorů zaručeně existuje, jsou ty, které mají jednoduché spektrum. Abychom to ukázali, musíme ještě chvíli zkoumat vlastnosti souboru vlastních vektorů operátoru (úvahy vedeme nad $\mathbf{C}$).

Příklad 4.52: Vlastní vektory příslušné téže vlastní hodnotě

Z příkladů již víme, že jedné vlastní hodnotě přísluší více vlastních vektorů. V příkladech, které jsme řešili, jsme pracovali v bázích. Soubory složek vlastních vektorů operátoru vždy tvořily vektorový podprostor v prostoru n-tic (po doplnění nulové n-tice). Lze tento závěr učinit bez konkrétní volby báze? Označme b_1 a b_2 libovolné dva vlastní vektory operátoru φ příslušné téže vlastní hodnotě λ a zvolme libovolný skalár α. Platí

$$\varphi(b_1 + b_2) = \varphi(b_1) + \varphi(b_2) = \lambda b_1 + \lambda b_2 = \lambda(b_1 + b_2),$$

$$\varphi(\alpha b_1) = \alpha\varphi(b_1) = \lambda(\alpha b_1).$$

Vektory $b_1 + b_2$ a αb_1, jsou-li nenulové, jsou rovněž vlastními vektory operátoru φ příslušnými vlastní hodnotě λ. Množina všech vlastních vektorů operátoru příslušných téže vlastní hodnotě je tedy uzavřená na operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Zdá se, že je vektorovým podprostorem ve V_n. Je tomu tak doopravdy? Vzhledem k tomu, že jsme z definice vlastního vektoru vyloučili nulový vektor, uvedená množina vektorovým podprostorem není. Můžeme však vektorový podprostor získat, když do něj nulu vrátíme:

> Množina vlastních vektorů příslušných téže vlastní hodnotě doplněná nulovým vektorem tvoří vektorový podprostor ve V_n.

Označíme-li

$$L_\lambda = \{b \in V_n | b \text{ je vlastní vektor } \varphi \text{ příslušný } \lambda\} \cup \{0_{V_n}\},$$

můžeme zkráceně, i když trochu nepřesně, hovořit o vektorovém podprostoru vlastních vektorů příslušných hodnotě λ.

Příklad 4.53: Derivace jako lineární zobrazení

Jistě si pamatujete, že polynomy jedné proměnné lze sčítat i násobit skalárem. Ti, kteří se věnovali i cvičení, také vědí, že množina polynomů stupně nejvýše n tvoří spolu s těmito operacemi vektorový prostor. Jeho dimenzi určíme, nalezneme-li v tomto vektorovém prostoru bázi. Vyjádřeme takový polynom obecně:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n, \quad a_j \in \mathbf{R}.$$

Bázi prostoru tvoří například soubor polynomů $(e_1(x), e_2(x), \ldots, e_{n+1}(x))$, $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x, \ldots, e_{n+1}(x) = x^n$, složky polynomu $P(x)$ v této bázi lze zapsat do $(n+1)$-tice $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Prostor má dimenzi $n+1$. Operace derivace je lineárním zobrazením, neboť

$$[P(x) + Q(x)]' = P'(x) + Q'(x), \quad [\alpha P(x)]' = \alpha P'(x).$$

Obrazy báze jsou

$$[e_1(x)]' = 0, \quad [e_2(x)]' = 1, \quad \ldots, \quad [e_{n+1}]' = nx^{n-1}.$$

Charakteristická matice vypadá takto:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -\lambda & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je jednoduchý, je roven $(-\lambda)^{n+1}$, má tedy n-násobný kořen $\lambda_1 = 0$. Vektorový podprostor příslušný této vlastní hodnotě je jednorozměrný a je generován vektorem $e_1(x)$, neboť obecné řešení odpovídající soustavy rovnic pro neznámé složky vlastních vektorů je $(\beta^1\ \beta^2\ \ldots\ \beta^{n+1}) = (\beta^1\ 0\ \ldots\ 0)$.

Příklad 4.54: Vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám

Zvolme nyní dvě různé vlastní hodnoty λ_1 a λ_2 operátoru φ. Každé z nich přísluší (po doplnění nulového vektoru) podprostor vlastních vektorů, tj. L_1 a L_2. Položme si otázku, zda tyto podprostory mohou obsahovat společný nenulový vektor. Předpokládejme, že takový vektor c existuje. Pak $\varphi(c) = \lambda_1 c$ a současně $\varphi(c) = \lambda_2 c$. Odečtením dostaneme $0_{V_n} = (\lambda_1 - \lambda_2)c$. Protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, musí být vektor c nulový. Proto $L_1 \cap L_2 = \{0_{V_n}\}$. Vidíme, že:

Každé dva vlastní vektory operátoru φ příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.

Tento závěr lze indukcí rozšířit na libovolný počet navzájem různých vlastních hodnot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, jejichž násobnosti jakožto kořenů charakteristického polynomu jsou $k_1, k_2, \ldots, k_r$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$. Označíme-li L_1 až L_r příslušné podprostory vlastních vektorů a q_1 až q_r jejich dimenze, dostaneme

$$L_i \cap L_j = \{0_{V_n}\}, \quad \text{pro} \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \ldots, r\}, \quad \sum_{j=1}^{r} q_j \leq n.$$

Součtem všech podprostorů vlastních vektorů je celý prostor V_n právě tehdy, nastane-li v předchozím vztahu pro dimenze rovnost. V případě jednoduchého spektra operátoru φ je však $r = n$ a $q_j = 1$ pro $1 \leq j \leq r$. Požadovaná rovnost tedy opravdu nastává.

Lineární operátor s jednoduchým spektrem lze reprezentovat diagonální maticí.

Shrňme předchozí závěry v následujícím tvrzení, které uvádí ekvivalentní podmínky pro to, aby bylo možné reprezentovat lineární operátor diagonální maticí.

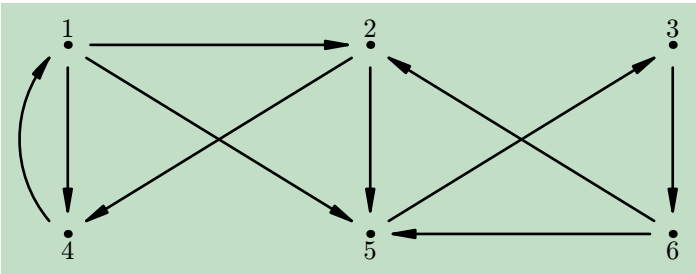
Věta 4.5: *Nechť V_n je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$ a $\varphi : V_n \to V_n$ lineární operátor se spektrem $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, přičemž násobnosti jednotlivých charakteristických kořenů jsou $k_1, \ldots, k_r$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *Lineární operátor φ lze reprezentovat diagonální maticí.*
- *Ve V_n existuje báze tvořená vlastními vektory operátoru φ.*
- *Dimenze vektorového podprostoru L_i vlastních vektorů příslušného hodnotě λ_i je rovna k_i pro všechna $i = 1, \ldots, r$.*
- *Vektorový prostor V_n je přímým součtem podprostorů $L_1, L_2, \ldots, L_r$.*

Obecná otázka existence báze tvořené vlastními vektory operátoru zůstává stále bez odpovědi. Navíc je zde problém fyzikálních aplikací, které mají často smysl jen v případě, že vektorový prostor je konstruován nad polem reálných čísel. A co když charakteristické kořeny vyjdou komplexní? Zdá se, že se naděje na diagonalizaci matic reprezentujících fyzikální lineární operátory ztrácí. Naštěstí však jsou tyto operátory většinou reprezentovány symetrickými maticemi ($A = A^T$), jejichž charakteristické kořeny jsou zásadně reálné a jim příslušné vektorové podprostory generují celý prostor. Abychom však toto, zatím ničím nepodložené tvrzení ověřili, musíme ještě chvíli počkat, nebo hned přikročit ke studiu kapitoly 6. Na závěr však (bez podrobného vysvětlování či dokazování) ještě jeden ilustrativní příklad, od fyziky poněkud vzdálený.

Příklad 4.55: Vlastní vektory a Google

Samozřejmě, zadáte-li heslo „vlastní vektory“ populárnímu vyhledávači Google, najde skoro desítky tisíc odkazů. Ale napadlo by vás, že samy vyhledávače mohou být založeny na řešení problému vlastních vektorů? Je tomu opravdu tak. Pokusme se stručně popsat, jak vyhledávač pracuje, a proč při vyhledávání potřebuje vlastní vektory nějakých operátorů. Představme si jen velmi jednoduchý graf odkazů, znázorněný na obrázku 4.30. Uzly



Obr. 4.30 K příkladu 4.55.

představují jednotlivá hesla (témata) a spojnice vedoucí mezi některými z nich znamenají, že tyto uzly spolu souvisejí, týkají se onoho tématu. Šipka spojnice vede od méně významného z dvojice uzlů k významnějšímu. Je-li šipka oboustranná, jsou oba uzly v dvojici rovnocenné. Čím více šipek v daném uzlu končí, tím je uzel z hlediska zadaného hesla významnější a vyhledávač by mu měl dát prioritu. Graf na našem obrázku je *úplně souvislý*. To znamená, že když vyjdeme z kteréhokoli jeho uzlu a postupujeme po spojnicích, dokážeme se do výchozího uzlu vrátit poté, co jsme prošli všemi ostatními uzly. Vytvořme nyní matici odpovídající danému grafu takto: Graf má n uzlů, které jsme očíslovali. V příkladu na obrázku je $n = 6$. Položme $a^i_j = 1$, jestliže

existuje přímé spojení z i-tého do j-tého uzlu. V opačném případě položme $a_j^i = 0$. Matice odpovídající grafu na obrázku je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a představuje nějaký lineární operátor v šestirozměrném prostoru. Matice je speciální tím, že nemá žádné záporné prvky, nazývá se *nezáporná matice*. (Místo jedniček v ní by bylo možné zadávat i jiná kladná čísla, představující váhu, tedy významnost, daného spojení.) Pro nezáporné matice platí důležitá věta, zvaná *Frobeniův–Perronův teorém*. Podle ní je vlastní hodnota λ_M s největší absolutní hodnotou $|\lambda|_{max}$ sama reálná a kladná a odpovídá jí vlastní vektor, jehož složky jsou rovněž reálné a mají všechny stejné znaménko. Samozřejmě, každý násobek tohoto vlastního vektoru je rovněž vlastním vektorem příslušným hodnotě λ_M. To je s tvrzením v souladu (násobením záporným číslem se změní znaménko všech složek). Současně platí, že největší absolutní hodnotu má složka s pořadovým číslem nejvýznamnějšího uzlu grafu, tj. toho, do kterého ústí nejvíce šipek. V případě našeho grafu a jeho matice A je $\lambda_M = 1,51$ a odpovídající vlastní vektor má složky $a = K(0,39\ \ 0,50\ \ 0,35\ \ 0,59\ \ 0,84\ \ 0,37)$. Největší složka je tedy pátá, nejvýznamnější je uzel s číslem 5. Skutečně, končí v něm tři šipky. www-stránku odpovídající tomuto uzlu tedy vyhledá Google s nejvyšší prioritou, zobrazí ji v pořadí jako první. V uzlech 2 a 4 končí dvě šipky, v uzlech 1, 3 a 6 jen jedna. Tyto stránky se zobrazí postupně za stránkou pátého uzlu.

Při použití metody nemůžeme požadovat, aby byla zachována její „teoretická dokonalost“, neboť vlastní hodnoty a složky vlastních vektorů vyčísluje počítač aproximativními metodami. Přesto však dobře funguje, jak se koneckonců v praxi přesvědčujeme.

4.3.3 Cvičení

1. Určete spektrum a vlastní vektory lineárního operátoru φ, je-li v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentován maticí A. Ve všech případech uvažujte o vektorovém prostoru V_n nad $\mathbf{R}$. Diskutujte diagonalizovatelnost.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$*$**2.** Lineární operátor φ se nazývá *idempotentní*, jestliže $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Ukažte, že každý idempotentní operátor má diagonální reprezentaci a může mít pouze vlastní hodnoty 0 a 1. Uveďte nějaký příklad idempotentního operátoru.
Návod: Předpokládejte, že vektor a je vlastní vektor příslušný nějaké vlastní hodnotě λ a využijte předpokladu $\varphi(\varphi(a) = \varphi(a)$. Dále ukažte, že jádro je tvořeno vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě $\lambda = 0$

a ukažte, že každý vektor z obrazu Imφ je vlastní vektor příslušný hodnotě $\lambda = 1$. Využijte skutečnosti, že součet hodnosti a defektu lineárního operátoru je roven celkové dimenzi prostoru.

∗**3.** Lineární operátor φ se nazývá *involuce*, jestliže $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Ukažte, že involuce je diagonalizovatelná a může mít pouze vlastní hodnoty 1 a -1. Uveďte nějaký příklad involuce.
Návod: Předpokládejte, že b je vlastní vektor operátoru φ příslušný vlastní hodnotě λ. Rovnici $\varphi(b) = \lambda b$ znovu zobrazte pomocí φ a využijte definice involuce. Označte$(e_1^+, \ldots, e_p^+)$, resp. $(e_1^-, \ldots, e_q^-)$ bázi vektorového podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $+1$, resp. -1. Dále ukažte, že pro libovolný vektor $c \in V_n$ je vektor $c + \varphi(c)$, resp. $c - \varphi(c)$ vlastním vektorem operátoru φ příslušným vlastní hodnotě 1, resp. -1. Poté vyjádřete vektory $c+\varphi(c)$ a $c-\varphi(c)$ jako lineární kombinace bází v odpovídajících podprostorech. Sečtením dostanete vektor $2c$, závěr už je jednoduchý.

4. Uveďte příklad lineárního operátoru ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{R}$, který:

a) nemá žádnou vlastní hodnotu,

b) nemá žádný vlastní vektor,

c) má vlastní hodnotu, ale přesto ho nelze reprezentovat maticí v diagonálním tvaru,

d) má pouze nulovou vlastní hodnotu, ale přesto není nulovým operátorem,

e) je v každé bázi reprezentován diagonální maticí,

f) pro který jsou všechny vektory v daném prostoru vlastní.

5. Nechť λ_0 je k-násobný charakteristický kořen lineárního operátoru $\varphi : V_n \to V_n$ a L je příslušný vektorový podprostor vlastních vektorů (po doplnění nulovým vektorem). Dokažte, že $\dim L \leq k$.
Návod: Zvolte bázi $(e_1, \ldots, e_q, e_{q+1}, \ldots, e_n)$ ve V_n tak, že $((e_1, \ldots, e_q)$ je báze v L. Uvědomte si, jaký tvar bude mít v této bázi matice A operátoru φ.