

## Kapitola 5

# Souřadnicové soustavy obvyklejší i méně obvyklé

Odpověď na otázku, jak popsat či zadat polohu nějakého bodu v euklidovské rovině  $\mathbf{R}^2$  nebo v trojrozměrném euklidovském prostoru  $\mathbf{R}^3$  by nám mohla připadat velice snadná — v odstavci 1.4 prvního dílu jsme se zadáním polohy bodů, resp. složek vektorů přece zabývali. Vzpomeňme, že jsme třeba v  $\mathbf{R}^3$  pracovali s *kartézskou soustavou souřadnic*  $\langle O; x, y, z \rangle$  určenou počátkem  $O$  a třemi navzájem kolmými souřadnicovými osami  $x$ ,  $y$  a  $z$  opatřenými stejnými délkovými jednotkami, popřípadě s ekvivalentní soustavou  $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ , v níž vektory  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$  tvoří *ortonormální bázi* (jsou navzájem kolmé a jednotkové — viz též odstavec 6.1.2). Zápis polohy bodu v kartézské soustavě souřadnic je sice jednoduchý, nemusí však vždy být zrovna pohodlný. Představme si třeba situaci, kdy bychom polohu některého místa na zeměkouli měli namísto zadáním zeměpisnou délkou, zeměpisnou šířkou a nadmořskou výškou zadat kartézskými souřadnicemi v soustavě zvolené například tak, že by její počátek byl spjat se středem Země, osa  $z$  by směřovala k severnímu pólu a zbylé osy  $x$  a  $y$  by byly zvoleny nějakým rozumně definovaným způsobem v rovině rovníku. Těžko bychom se v takovém zadání orientovali a už vůbec by nebylo jednoduché sestrojít mapu. A to je přece kartézská soustava souřadnic tak jednoduchá! Jednoduchá sice je, ale není nijak přizpůsobena geometrickému tvaru objektu, který popisuje — zeměkouli. Kdyby nebylo rozdílů nadmořských výšek a mírného zploštění, ležely by všechny popisované body na povrchu koule. Právě proto je nejpřirozenější zadávat jejich polohy pomocí speciálních systémů kružnic ležících na povrchu koule — poledníků a rovnoběžek. Nadmořská výška daného bodu pak již toto zadání jednoduše doplní na úplný soubor údajů o jeho poloze. Protože poledník a rovnoběžka jsou „křivé čáry“, řadíme soustavu souřadnic takto spojenou s povrchem Země mezi soustavy *křivočaré*.

V této kapitole se seznámíme se základními typy soustav souřadnic, *polárních* v  $\mathbf{R}^2$  a *válcových* a *kulových* v  $\mathbf{R}^3$ , které za určitých okolností mohou popis polohy bodu velice zjednodušit. Naučíme se také převádět zadání polohy bodu z kartézské soustavy souřadnic do soustav křivočarých. V závěru kapitoly si všimneme zcela obecných soustav křivočarých souřadnic. Vyložíme si také pojmy *elementární plošný*, resp. *objemový element*. Poznamenejme však, že půjde jen o názorný způsob zavedení a výklad vlastností objektů, které jsou potřebné pro praktické výpočty nejen ploch a objemů geometrických útvarů, ale také například fyzikálních charakteristik těles

se spojitě rozloženou hmotností (hmotnost, momenty setrvačnosti, poloha středu hmotnosti, apod.). Objekty, které takto získáme, budou stejně funkční jako odpovídající pojmy zavedené zcela korektními matematickými postupy a budou také při výpočtech stejně správně fungovat. Pro praxi nám tedy poslouží. Nebudeme jimi však moci, z pohledu „opravdových matematiků“, nahradit regulérní matematické definice a tvrzení. Těm se v tomto dílu ještě věnovat nebudeme.

Samozřejmě jako vždy budeme i v této kapitole předpokládat, že všechny funkce, s nimiž pracujeme, mají potřebné vlastnosti pro provádění operací, které s nimi provádět potřebujeme (spojitost, existence či dokonce spojitost derivací, apod.) Celkově lze kapitolu o souřadnicích charakterizovat jako názornou a nenáročnou, či dokonce skoro oddychovou.

## 5.1 Kartézská soustava souřadnic z jiného pohledu

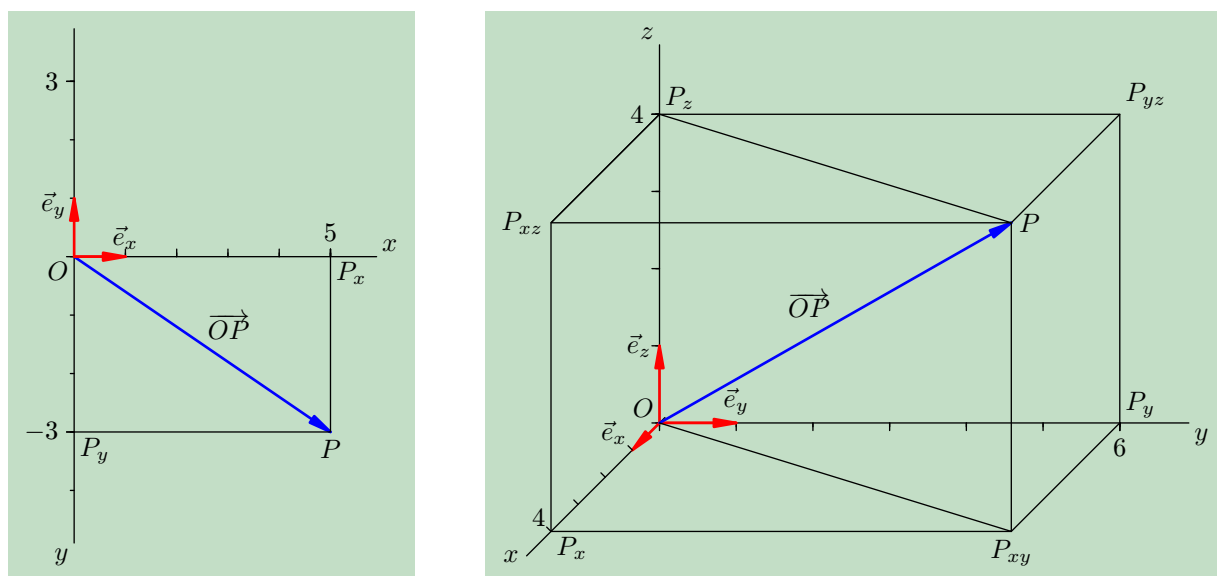
Dosud jsme určovali polohu bodu v kartézské soustavě souřadnic, popřípadě složky vektoru v ortonormální bázi, pomocí kolmých průmětů do souřadnicových os, resp. do směrů vektorů ortonormální báze. Pro usnadnění přechodu k obecnějším souřadnicovým soustavám si však všimneme jiné možnosti, jak charakterizovat polohu bodu. Konkrétně půjde o to interpretovat daný bod jako průsečík tří vhodně zvolených ploch, popřípadě křivek, jejichž tvar určuje obecnou soustavu souřadnic a bývá „přizpůsoben“ konkrétnímu fyzikálnímu nebo geometrickému problému.

### 5.1.1 Poloha bodu v rovině a prostoru

Než se budeme věnovat jinému pohledu na možnosti zadání polohy bodů v kartézské soustavě souřadnic, zopakujme si formou příkladu pohled „klasický“, který jsme používali v odstavci 1.4 a vůbec ve všech částech dosavadního textu, kde se pracovalo se souřadnicemi bodů či složkami vektorů. V odstavci 1.4 jsme vektory ortonormální báze v  $\mathbf{R}^2$ , resp.  $\mathbf{R}^3$  označovali  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ , resp.  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$ . Nyní budeme vektory báze v kartézské soustavě souřadnic ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$  označovat  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  a  $\vec{e}_z$ . Tato změna má svůj dobrý smysl v souvislosti s označeními v křivočarých soustavách souřadnic.

#### Příklad 5.1: Poloha bodu v rovině $\mathbf{R}^2$ a prostoru $\mathbf{R}^3$ — kartézské souřadnice

Bod  $P$  leží v rovině  $\mathbf{R}^2$ . V kartézské soustavě souřadnic  $S = \langle O; x, y \rangle$  určené počátkem  $O$  a osami  $x$  a  $y$ , nebo alternativně vektory ortonormální báze  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ , tj.  $S = \langle O; \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle$ , je zadán svými souřadnicemi  $P = (x_P, y_P) = (5, -3)$ . Bod  $P$  ležící v prostoru  $\mathbf{R}^3$  je v kartézské soustavě souřadnic  $S = \langle O; x, y, z \rangle$ , resp.  $S = \langle O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \rangle$  (počátek  $O$  a osy  $x$ ,  $y$  a  $z$ , nebo alternativně vektory ortonormální báze  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  a  $\vec{e}_z$ ) zadán souřadnicemi  $P = (x_P, y_P, z_P) = (4, 6, 4)$ . Situace je znázorněna na obrázku 5.1. (Je také možné vrátit se k obrázku 1.6 v prvním dílu, kde je uveden příklad bodu  $A = (x_A, y_A, z_A) = (3, 5, 4)$ ). Všimněme si průmětů bodu  $P$  v obecnějším, trojrozměrném případě. Průmět bodu  $P$  do souřadnicové roviny  $xy$ , tzv. *půdorysny*, má souřadnice  $P_{xy} = (4, 6, 0)$ , průmět do roviny  $yz$ , *nárysny*, je  $P_{yz} = (0, 6, 4)$ , a konečně průmět do roviny



Obr. 5.1 Průměty bodu v kartézské soustavě souřadnic.

$xz$ , bokorysny, je  $P_{xz} = (4, 0, 4)$ . Průměty bodu  $P$  do jednotlivých souřadnicových os  $x$ ,  $y$  a  $z$  jsou postupně  $P_x = (4, 0, 0)$ ,  $P_y = (0, 6, 0)$  a  $P_z = (0, 0, 4)$ . Vázaný vektor  $\overrightarrow{OP}$  má složky  $\overrightarrow{OP} = (4, 6, 4)$ .

Je-li bod  $P$  zadán kartézskými souřadnicemi  $P = (x_P, y_P, z_P)$ , platí pro jeho průměty do souřadnicových rovin, resp. souřadnicových os

$$P_{xy} = (x_P, y_P, 0), \quad P_{yz} = (0, y_P, z_P), \quad P_{xz} = (x_P, 0, z_P),$$

$$P_x = (x_P, 0, 0), \quad P_y = (0, y_P, 0), \quad P_z = (0, 0, z_P).$$

Pro vázaný vektor  $\overrightarrow{PQ}$  platí

$$\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P)\vec{e}_x + (y_Q - y_P)\vec{e}_y + (z_Q - z_P)\vec{e}_z.$$

Pro vzdálenost bodu  $P$  od počátku soustavy souřadnic, resp. pro délku úsečky  $PQ$  platí

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}, \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}.$$

### 5.1.2 Souřadnicové přímky a roviny

Při pozorném prohlížení obrázku 5.1 si můžeme uvědomit samozřejmou, ale užitečnou věc. Bod  $P \in \mathbf{R}^2$  je průsečíkem přímek  $p_{x,P}$  a  $p_{y,P}$  rovnoběžných se souřadnicovými osami. Nazývají se vcelku přirozeně *souřadnicové přímky* a jejich rovnice jsou

$$p_{x,P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}, y = y_P\}, \quad p_{y,P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = x_P, y \in \mathbf{R}\}. \quad (5.1)$$

Obdobně můžeme uvažovat o prostorové situaci. Bod  $P \in \mathbf{R}^3$  je průsečíkem souřadnicových přímek

$$\begin{aligned} p_{x,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in \mathbf{R}, y = y_P, z = z_P\}, \\ p_{y,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = x_P, y \in \mathbf{R}, z = z_P\}, \\ p_{z,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = x_P, y = y_P, z \in \mathbf{R}\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

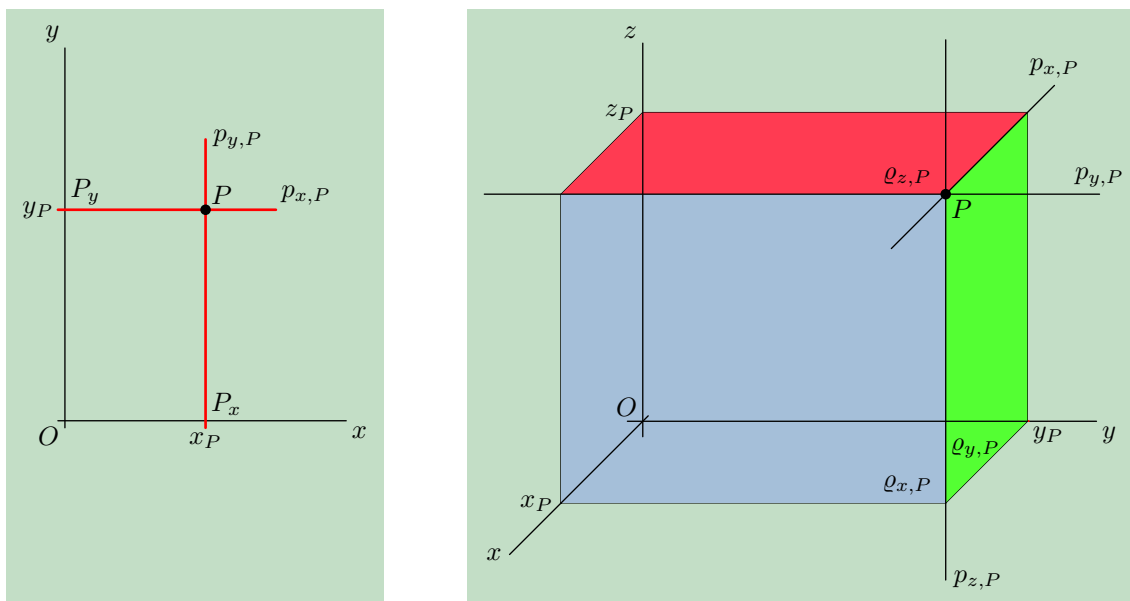
nebo průsečíkem *souřadnicových rovin* rovnoběžných postupně s půdorysnou, nárysou a bokorysnou

$$\begin{aligned} \varrho_{z,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y \in \mathbf{R}, z = z_P\}, \\ \varrho_{x,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y, z \in \mathbf{R}, x = x_P\}, \\ \varrho_{y,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, z \in \mathbf{R}, y = y_P\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

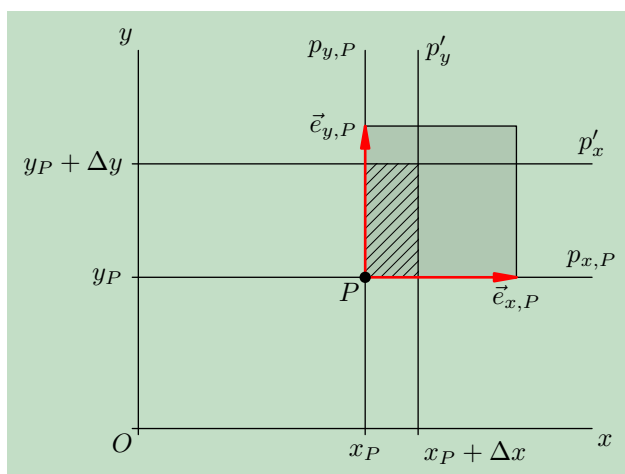
Souřadnicové přímky a roviny jsou znázorněny na obrázku 5.2. Určování bodu  $P$  jako průsečíku souřadnicových rovin nebo přímek by nám mohlo připadat poněkud krkolomné nebo i zbytečné. V případě zadávání polohy bodu v kartézských souřadnicích skutečně velký praktický smysl nemá. Jeho užitečnost se však ukáže u soustav křivočarých souřadnic.

### 5.1.3 Elementární plocha a objem

A ještě jeden pojem můžeme zavést pomocí souřadnicových přímek a rovin, opět s výhledem na použití ukázaného postupu pro soustavy křivočarých souřadnic. Je to *elementární plocha* v  $\mathbf{R}^2$ , resp. *elementární objem* v  $\mathbf{R}^3$ . Použijeme názorného obrázku 5.3. Elementární plocha o obsahu  $\Delta S_k(P) = \Delta x \Delta y$  umístěná v bodě  $P$  je vymezena souřadnicovými přímkami (5.1) a



Obr. 5.2 Souřadnicové přímky a roviny v kartézské soustavě souřadnic.



Obr. 5.3 Elementární plocha v kartézské soustavě souřadnic.

přímkami

$$p'_x = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}, y = y_P + \Delta y\}, \quad p'_y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = x_P + \Delta x, y \in \mathbf{R}\}.$$

### Příklad 5.2: Jak složitě zapsat jedničku

V obrázku 5.3 je plocha, kterou nazveme *kartézský plošný element*, vyznačena šrafováním. Nespokojíme se však s tím, že umíme obsah plošky  $\Delta S_k$  vyjádřit snadno vzorcem pro obsah obdélníka ze základní školy, nýbrž

se pokusíme zapsat jej „učeníji“, způsobem, který nám později umožní zobecnění. Umístíme do bodu  $P$  vektory ortonormální báze  $\vec{e}_{x,P}$  a  $\vec{e}_{y,P}$ . Obsah čtverce o stranách určených právě těmito vektory je jednotkový. Na druhé straně jej můžeme zapsat pomocí vektorového součinu  $|\vec{e}_{x,P} \times \vec{e}_{y,P}| = 1$ . Při takovém zdánlivě zbytečně složitým vyjádření jedničky můžeme obsah elementární plošky zapsat ve tvaru  $\Delta S_k(P) = |\vec{e}_{x,P} \times \vec{e}_{y,P}| \Delta x \Delta y$ . Pro pořádek si musíme ještě uvědomit, že pro výpočet vektorového součinu vektorů  $\vec{e}_{x,P}$  a  $\vec{e}_{y,P}$  musíme formálně doplnit jejich třetí (nulovou) složku, tj. chápat rovinu (vektorový prostor jimi určený) jako podprostor trojrozměrného vektorového prostoru  $\mathbf{R}^3$  umístěného v bodě  $P$ .

Obdobným způsobem, jakým jsme získali kartézský plošný element, můžeme zavést i element objemový. Elementární kvádr o objemu  $\Delta V_k(P) = \Delta x \Delta y \Delta z$  umístěný v bodě  $P$  vymezíme souřadnicovými rovinami  $\varrho_{z,P}$ ,  $\varrho_{x,P}$  a  $\varrho_{y,P}$ , určenými vztahy (5.3), a rovinami s nimi rovnoběžnými

$$\begin{aligned}\varrho'_z &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y \in \mathbf{R}, z = z_P + \Delta z\}, \\ \varrho'_x &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y, z \in \mathbf{R}, x = x_P + \Delta x\}, \\ \varrho'_y &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, z \in \mathbf{R}, y = y_P + \Delta y\}.\end{aligned}$$

V tomto případě zapíšeme jednotkový objem pomocí vektorů  $\vec{e}_{x,P}$ ,  $\vec{e}_{y,P}$  a  $\vec{e}_{z,P}$  umístěných v bodě  $P$  jako absolutní hodnotu smíšeného součinu vektorů ortonormální báze (viz odstavec 1.4.3 prvního dílu), tj.

$$|\vec{e}_{x,P}(\vec{e}_{y,P} \times \vec{e}_{z,P})| = |[\vec{e}_{x,P}, \vec{e}_{y,P}, \vec{e}_{z,P}]|.$$

Pokud je souřadnicová soustava pravotočivá, což standardně předpokládáme, nemusíme psát u smíšeného součinu absolutní hodnotu. Pro kartézský plošný a objemový element jsme tedy dostali vztahy

$$\Delta S_k(P) = |\vec{e}_{x,P} \times \vec{e}_{y,P}| \Delta x \Delta y, \quad \Delta V_k(P) = |[\vec{e}_{x,P}, \vec{e}_{y,P}, \vec{e}_{z,P}]| \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (5.4)$$

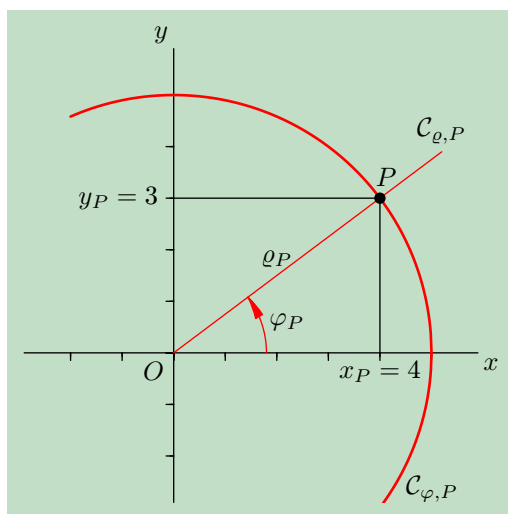
V tuto chvíli se nám možná zdá zbytečné vymezení plošného, resp. objemového elementu souřadnicovými přímkami, resp. rovinami. Vždyť vyjádřit obsah plošky  $\Delta S_k(P)$  i objem  $\Delta V_k(P)$  pomocí vektorů báze bylo možné i bez souřadnicových přímek a rovin. Je nutné vyznačovat v zápisu plošného či objemového elementu jeho umístění v bodě  $P$ ? A jak vůbec vyjádření (5.4) s vektory báze umístěnými v bodě  $P$  souvisí? Souvislost je jednoduchá. Například vektor  $\vec{e}_{x,P}$  je tečným vektorem k souřadnicové přímce  $p_{x,P}$ . Obdobně lze interpretovat vektory  $\vec{e}_{y,P}$  a  $\vec{e}_{z,P}$ . Pokud jde o vyznačování bodu  $P$  ve vyjádření plošného či objemového elementu — v případě kartézských souřadnic by nutné nebylo. V případě křivočarých souřadnic se ukáže, že plošný či objemový element je na bodu  $P$  závislý. A vůbec — celý předchozí zdánlivě zbytečně složitý postup vyjádření elementárních plošných obsahů či elementárních objemů oceníme až u křivočarých souřadnic.

## 5.2 Polární, válcové a kulové souřadnice

Nejjednoduššími a vzhledem k symetrii řady geometrických a fyzikálních úloh také nejčastěji používanými soustavami křivočarých souřadnic jsou v rovině  $\mathbf{R}^2$  souřadnice *polární* a v prostoru  $\mathbf{R}^3$  souřadnice *válcové* a *kulové* (též cylindrické a sférické). Už z názvu je symetrie jistě zřejmá.

### 5.2.1 Poloha bodu v rovině a prostoru jinak

Všimněme si nejprve jiného způsobu zadání polohy bodu  $P$  v rovině než kartézskými souřadnicemi. Pomůže nám obrázek 5.4 (červeně vyznačených křivek si zatím nevšímejte, jejich význam vysvětlíme v odstavci 5.2.2). Namísto dvojice kartézských souřadnic  $P = (x_P, y_P)$  zadáme vzdálenost  $\varrho_P$  bodu  $P$  od počátku soustavy souřadnic a úhel  $\varphi_P$ , který svírá vázaný vektor  $\overrightarrow{OP}$  s kladným směrem osy  $x$ . Dvojice  $(\varrho_P, \varphi_P)$  rovněž určuje polohu bodu  $P$  jednoznačně. Čísla



Obr. 5.4 Polární souřadnice bodu v rovině  $\mathbf{R}^2$ .

$\varrho_P$  a  $\varphi_P$  se nazývají *polární souřadnice* bodu  $P$ . Z obrázku je ihned vidět převod zadání dvojice polárních souřadnic na dvojici kartézských souřadnic:

$$x_P = \varrho_P \cos \varphi_P, \quad y_P = \varrho_P \sin \varphi_P, \quad \varrho_P \in [0, \infty), \quad \varphi_P \in [0, 2\pi).$$

Vzhledem k tomu, že tvar převodních vztahů je nezávislý na volbě bodu  $P$ , můžeme pro jednoduchoost vynechat psaní indexu  $P$ .

Pro převod polárních souřadnic do kartézských platí:

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad \varrho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (5.5)$$

**Příklad 5.3:** Převod polárních souřadnic tam a zpět

V předchozích vztazích jsme vyjádřili kartézské souřadnice daného bodu pomocí polárních. I naopak to bude snadné, i když s trochou přemýšlení. Umocníme vztahy pro  $x$  a  $y$  v (5.5) a sečteme. Dále vztahy pro  $x$  a  $y$  vydělíme. Dostaneme

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Chceme-li z druhého vztahu vyjádřit explicitně  $\varphi$ , musíme si uvědomit, jak je to s obory hodnot inverzních funkcí k funkcím goniometrickým — zde máme co do činění s inverzní funkcí k tangentě. Mluvili jsme o nich podrobně v prvním dílu. Pokud si závěry již nepamatujete, vraťte se k odstavci 2.1.8 o elementárních funkcích. Obor hodnot arkustangenty je  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ , my však potřebujeme převodními vztahy pokrýt interval  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . To nedokáže žádná z cyklometrických funkcí. Musíme proto interval  $[0, 2\pi)$  pokrýt „navíckrát“. Nejpohodlnější je použít funkce arkuskosinus. Z rovnic (5.5) dostaneme pro  $\cos \varphi$  a  $\sin \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\varrho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\varrho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Předchozí vztahy platí pouze pro případ, že alespoň jedna ze souřadnic bodu  $X$  je nenulová. Pro  $x = y = 0$  (odpovídá počátku soustavy souřadnic) je  $\varrho = 0$  a úhel  $\varphi$  nelze definovat. Pro určení polohy počátku je však údaj  $\varrho = 0$  postačující. Pro případ, že úhel  $\varphi$  leží v intervalu  $[0, \pi]$ , tj. pro  $y \geq 0$ , lze pro jeho vyjádření přímo použít funkci arkuskosinus. Funkce  $\cos \varphi$  je totiž v intervalu  $[0, \pi]$  prostá, a proto k ní existuje funkce inverzní, definovaná na intervalu  $[-1, 1]$ , která nabývá hodnot z intervalu  $[0, \pi]$ . Pro  $y \geq 0$  a  $x^2 + y^2 \neq 0$  tedy platí

$$\varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Abychom „se dostali“ s hodnotou  $\varphi$  do intervalu  $(\pi, 2\pi)$ , musíme hodnotu arkuskosinu odečíst od  $2\pi$ .

Pro převod kartézských souřadnic do polárních platí:

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ \varphi &= 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y < 0, \\ \varphi &\text{ není definováno pro } (x, y) = (0, 0). \end{aligned} \tag{5.6}$$

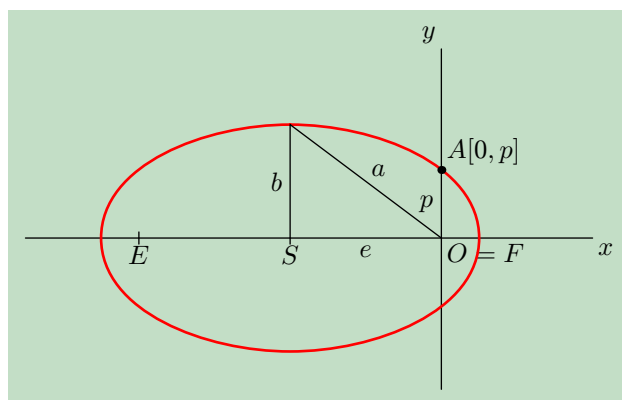
Zopakujme, že polohu libovolného bodu v rovině  $\mathbf{R}^2$  lze ekvivalentně vyjádřit dvojicí kartézských souřadnic  $(x, y)$ , nebo dvojicí polárních souřadnic  $(\varrho, \varphi)$ . Převody mezi těmito vyjádřeními jsou dány vztahy (5.5) a (5.6).

**Příklad 5.4:** Pohyb planet

Podle prvního Keplerova zákona obíhají planety naší sluneční soustavy po elipsách, v jejichž společném ohnisku je Slunce. Pokud budou astronomové planetu pozorovat, jistě nebudou udávat její polohu pomocí kartézských souřadnic. Bylo by to velmi nepohodlné. Používají zejména souřadnic úhlových. Také „polární“



úhel  $\varphi$  je úhlovou souřadnicí. Ne sice zrovna tou, která se zaznamenává při astronomických pozorováních, přece však, spolu se souřadnicí  $\varrho$  poslouží k popisu pohybu planety lépe než souřadnice kartézské. Už také kvůli „centrální“ symetrii fyzikálního problému — Slunce působí na planetu gravitační silou mířící k jeho středu. Anž bychom se nyní zabývali fyzikální formulací a řešením pohybu planet, musí nám být jasné, že bude výhodné umět popsat elipsu pomocí polárních souřadnic. Počátek kartézské i polární soustavy souřadnic umístíme do ohniska elipsy, osu  $x$  zvolíme podél velké poloosy (obrázek 5.5). Velikost velké, resp. malé poloosy označme  $a$ , resp.  $b$ . Ze střední školy si nepochybně pamatujete, že kartézská rovnice elipsy se středem  $S = (m, n)$  je



Obr. 5.5 K příkladu 5.4 — polární rovnice elipsy.

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Je-li počátek soustavy souřadnic umístěn v pravém ohnisku jako na obrázku 5.5, má střed elipsy souřadnice  $S = (-e, 0)$ , kde  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  je *excentricita (výstřednost)* elipsy. Veličina  $p$  v obrázku je *parametr* elipsy. Do kartézské rovnice elipsy dosadíme za  $x$  a  $y$  jejich vyjádření pomocí polárních souřadnic (5.5) a dostaneme

$$\frac{(x + e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies b^2(\varrho \cos \varphi + e)^2 + \varrho^2 a^2 \sin^2 \varphi = a^2 b^2. \quad (5.7)$$

Pro bod  $A = (0, p)$  také platí rovnice elipsy, tj.

$$\frac{e^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \implies e^2 b^2 + a^2 p^2 = a^2 b^2 \implies b^2(a^2 - e^2) = a^2 p^2 \implies b^4 = a^2 p^2.$$

Dále budeme upravovat rovnici elipsy (5.7), v níž již máme dosazeny polární souřadnice, tak, že za  $\sin^2 \varphi$  dosadíme  $1 - \cos^2 \varphi$ , za  $a^2$  na pravé straně dosadíme  $e^2 + b^2$  a použijeme získaného vztahu pro  $b^4$ . Dostaneme

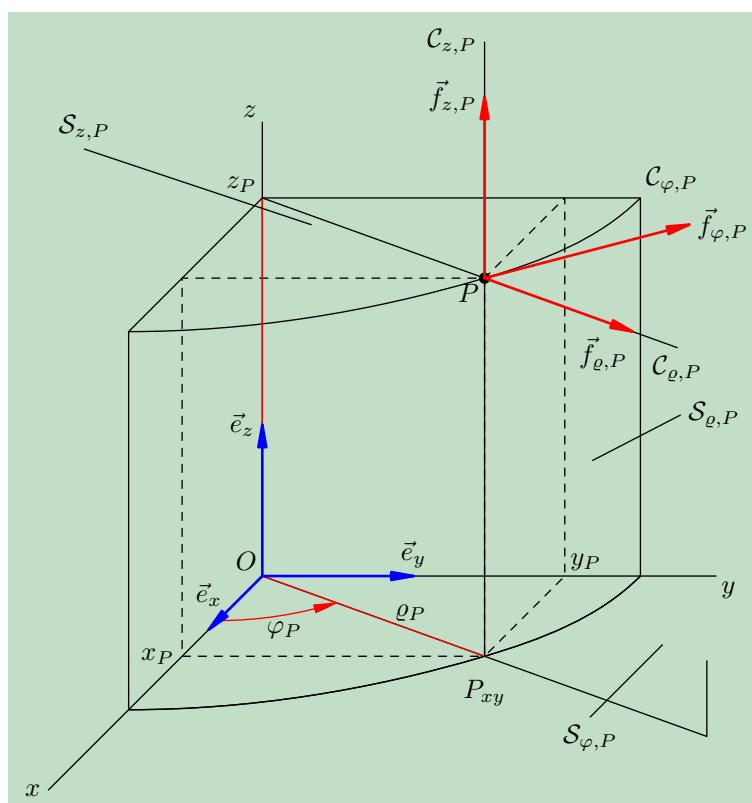
$$\begin{aligned} \varrho^2 b^2 \cos^2 \varphi + 2\varrho e b^2 \cos \varphi + e^2 b^2 + \varrho^2 a^2 - \varrho^2 a^2 \cos^2 \varphi &= e^2 b^2 + a^2 p^2 \implies \\ \implies \varrho^2 a^2 - (\varrho^2 e^2 \cos^2 \varphi - 2\varrho e a p \cos \varphi + a^2 p^2) &= 0 \implies \varrho^2 - (\varrho \epsilon \cos \varphi - p)^2 = 0, \quad \text{kde } \epsilon = \frac{e}{a} \implies \\ \implies \varrho(1 + \epsilon \cos \varphi) = p, \quad \text{resp. } \varrho(1 - \epsilon \cos \varphi) &= -p. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Prvá z možností ve vztahu (5.8) je pro  $0 \leq \epsilon < 1$  *polární rovnici* elipsy se středem  $S = (-e, 0)$ . Obvykle se uvádí ve tvaru

$$\frac{p}{\varrho} = 1 + \epsilon \cos \varphi.$$

Poznamenejme, že formálně stejně vypadá i polární rovnice paraboly a hyperboly. Pro parabolu je však  $\epsilon = 1$ , pro hyperbolu  $\epsilon > 1$ .

Polární souřadnice jsou základem pro vyjádření polohy bodu  $P$  v prostoru  $\mathbf{R}^3$  ve *válcových souřadnicích*. Je to vidět na obrázku 5.6. Půdorysný průmět bodu  $P = (x_P, y_P, z_P)$  je na něm označen jako  $P_{xy}$  a jeho kartézské souřadnice jsou  $P_{xy} = (x_P, y_P, 0) = (\varrho_P \cos \varphi_P, \varrho_P \sin \varphi_P, 0)$ . Vidíme, že kdybychom pracovali pouze v půdorysné rovině, byly by  $\varrho_P$  a  $\varphi_P$  polární souřadnice bodu  $P_{xy}$ . Souřadnice  $\varrho_P$ ,  $\varphi_P$  a  $z_P$  nazýváme *válcovými souřadnicemi* bodu  $P \in \mathbf{R}^3$ . (Dalších označení v obrázku si zatím nevšimněte, vrátíme se k nim v odstavci 5.2.2.) Převodní vztahy



Obr. 5.6 Válcové souřadnice bodu v prostoru  $\mathbf{R}^3$ .

mezi kartézskými a válcovými souřadnicemi bodu  $P$ , a samozřejmě každého obecně zvoleného bodu  $X = (x, y, z)$ , jsou jednoduché. V podstatě je máme k dispozici v podobě rovnic (5.5) a (5.6), přidáme jen triviální rovnici pro  $z$ .

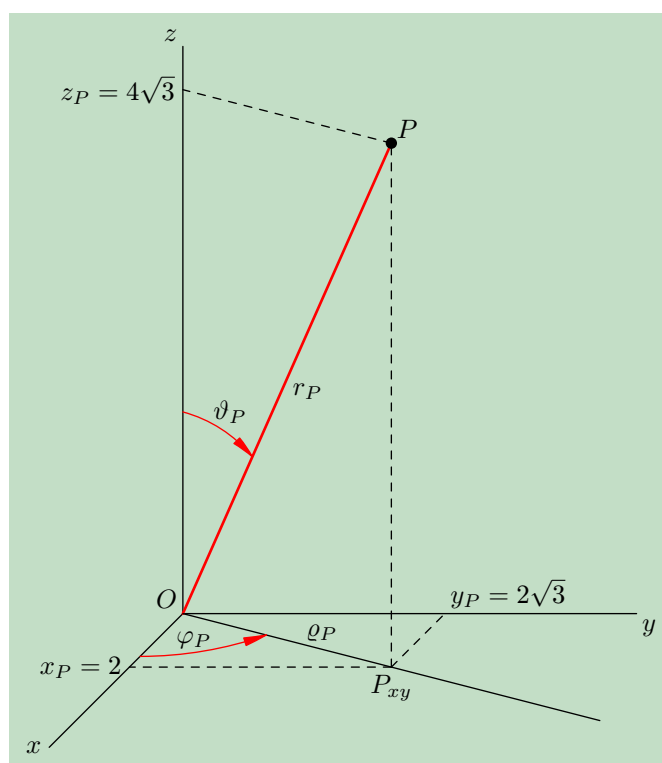
Pro převod válcových souřadnic do kartézských platí:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, & y &= \varrho \sin \varphi, & z &= z, \\ \varrho &\in [0, \infty), & \varphi &\in [0, 2\pi), & z &\in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pro převod kartézských souřadnic do válcových platí:

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y \geq 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, z), \\ \varphi &= 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y < 0, \\ \varphi &\text{ není definováno pro } (x, y, z) = (0, 0, z), \\ z &= z. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Pro popis ještě symetričtějších geometrických, fyzikálních i technických úloh často dobře vyhovují *kulové souřadnice*. Takovou jednoduchou geometrickou úlohou je třeba velmi názorné a již zmiňované zadávání polohy bodu na zeměkouli pomocí dvou úhlů — zeměpisné šířky a zeměpisné délky. Toto zadání skutečně vychází z definice kulových souřadnic v  $\mathbf{R}^3$ , znázorněných na obrázku 5.7. Poloha zcela konkrétně zvoleného bodu  $P = (x_P, y_P, z_P) = (2, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$  je



Obr. 5.7 Kulové souřadnice bodu v prostoru  $\mathbf{R}^3$ .

v obrázku popsána kromě kartézských souřadnic také parametry  $r_P$ ,  $\vartheta_P$  a  $\varphi_P$ . Jejich význam je z obrázku zřejmý —  $r_P$  je vzdálenost bodu  $P$  od počátku  $O$  soustavy souřadnic,  $\vartheta_P$  je úhel,

který svírá polohový vektor  $\overrightarrow{OP}$  bodu  $P$  s kladným směrem osy  $z$ , a konečně  $\varphi_P$  je úhel, který svírá rovina kolmá k půdorysně a obsahující osu  $z$  i bod  $P$  s rovinou  $xz$ , tedy bokorysnou. Zjednodušeně řečeno je úhel  $\varphi_P$  úhlovou polární souřadnicí průmětu  $P_{xy}$  bodu  $P$  do půdorysny.

### Příklad 5.5: Zeměpisné souřadnice

Všimějme si na chvíli jen takových bodů  $P$ , které mají od počátku  $O$  stejnou vzdálenost rovnou třeba poloměru Země (to pro případ, že prohlásíme Zemi za kouli). Vidíme, že  $\varphi_P$  představuje zeměpisnou délku za předpokladu, že nulový Greenwichský poledník leží v souřadnicové rovině  $xz$ . Úhel  $\vartheta_P$  je doplňkem zeměpisné šířky bodu  $P$  do devadesáti stupňů.

Nyní už přistupme k odvození převodních vztahů mezi kartézskými a kulovými souřadnicemi. Pomocí obrázku 5.7 to bude jednoduché. Pro usnadnění je v něm ještě vyznačena polární souřadnice  $\varrho_P$  půdorysného průmětu  $P_{xy}$  bodu  $P$ . Protože vztahy budou formálně stejné pro všechny body  $X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , nebudeme již vypisovat index vyznačující konkrétní bod.

Pro převod kulových souřadnic do kartézských platí:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, & y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, & z &= r \cos \vartheta, \\ r &\in [0, \infty), & \vartheta &\in [0, \pi], & \varphi &\in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pro převod kartézských souřadnic do kulových platí:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \vartheta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & (x, y, z) &\neq (0, 0, 0), \\ \vartheta &\text{ není definováno pro } (x, y, z) = (0, 0, 0), \\ \varphi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & y &\geq 0, & (x, y, z) &\neq (0, 0, z), \\ \varphi &= 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y &< 0, \\ \varphi &\text{ není definováno pro } (x, y, z) = (0, 0, z). \end{aligned} \quad (5.12)$$

### Příklad 5.6: Převod kartézských souřadnic na kulové prakticky

Bod  $P$  v obrázku 5.7 má zadány kartézské souřadnice  $P = (2, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ . Určíme jeho souřadnice kulové. Použijeme při tom převodních vztahů (5.12).

$$r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} = \sqrt{4 + 12 + 48} = 8,$$

$$\vartheta_P = \arccos \frac{z_P}{r_P} = \arccos \frac{4\sqrt{3}}{8} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\varphi = \arccos \frac{x_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} = \arccos \frac{2}{\sqrt{4+12}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

### 5.2.2 Souřadnicové křivky a plochy

Bod  $P \in \mathbf{R}^2$  jsme v odstavci 5.1.2 zadali jako průsečík souřadnicových přímk  $p_{x,P}$  a  $p_{y,P}$  rovnoběžných s osami kartézské soustavy souřadnic. Obecně bychom mohli bod  $P$  popsat jako průsečík jakýchkoli dvou křivek, které se v něm protínají. Co nás tedy vedlo v odstavci 5.1.2 právě k volbě souřadnicových přímk? Samozřejmě bychom mohli říci, že to byla jednoduchost takové volby. Podstatnější však je, že souřadnicové přímky jaksi „kopírovaly“ zvolený typ soustavy souřadnic. Příмка  $p_{x,P}$  byla rovnoběžná s osou  $x$  a body na ní měly konstantní kartézskou souřadnici  $y = y_P$ . Naopak, body na přímce  $p_{y,P}$ , rovnoběžné s osou  $y$ , měly konstantní kartézskou souřadnici  $x = x_P$ . Aplikujeme-li myšlenku konstantnosti jedné z dvou souřadnic také na souřadnice polární pro  $P \neq O$ , dostaneme *souřadnicové křivky*, které budou „kopírovat“ polární soustavu souřadnic. Zobrazení, které přiřazuje polárním souřadnicím kartézské, označme

$$\alpha : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \ni (\varrho, \varphi) \longrightarrow \alpha(\varrho, \varphi) = (x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi)) \in \mathbf{R}^2.$$

Souřadnicové křivky jsou

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\varphi,P} &= \{\alpha(\varrho, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \mid \varrho = \varrho_P, \varphi \in [0, 2\pi)\}, \\ \mathcal{C}_{\varrho,P} &= \{\alpha(\varrho, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \mid \varrho \in [0, \infty), \varphi = \varphi_P\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

První ze souřadnicových křivek je kružnice  $\mathcal{C}_{\varphi,P}$  se středem v počátku a poloměrem  $\varrho_P$ , druhá křivka  $\mathcal{C}_{\varrho,P}$  je polopřímka, jejímž počátečním bodem je počátek soustavy souřadnic. Situaci ukazuje obrázek 5.4, na který jsme se odvolávali již dříve.

#### Příklad 5.7: Kartézské rovnice polárních souřadnicových křivek

Vztahy (5.13) jsou polárními rovnicemi souřadnicových křivek polární soustavy. Pro praktické počítání je často výhodné (a je to také názorné) znát jejich rovnice v kartézské soustavě souřadnic, tj. popsat je jako množiny bodů o souřadnicích  $(x, y)$  splňujících podmínky (5.13). Získat tyto rovnice je velice snadné, použijeme-li převodních vztahů z příkladu 5.3, samozřejmě s výjimkou bodů, pro něž nejsou definovány:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho_P \implies \mathcal{C}_{\varphi,P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \varrho_P^2\},$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi_P \implies$$

$$\implies \mathcal{C}_{\varrho,P} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x \operatorname{tg} \varphi_P, x \geq 0 \text{ pro } \varphi_P \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), x \leq 0 \text{ pro } \varphi_P \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right\}.$$

Je vidět, že křivka  $C_{\varphi,P}$  je skutečně kružnicí o poloměru  $\varrho_P$  a křivka  $C_{\varrho,P}$  polopřímku o směrnicí  $\operatorname{tg} \varphi_P$ . Bod  $P = O$  nedefinuje žádné souřadnicové křivky. Zápis pro souřadnicovou křivku  $C_{\varrho,P}$  nezahrnuje případy, kdy bod  $P$  leží na ose  $y$ . Uvědomte si, proč tomu tak je a rovnici příslušné souřadnicové křivky pro daný bod  $P = (0, y_P)$  sami zapište.

*Pozn.:* Všimněme si ještě indexování. Index u označení souřadnicové křivky určuje tu souřadnici, která se podél křivky mění.

V případě bodu  $P \in \mathbf{R}^3$  si můžeme, podobně jako tomu bylo v kartézské soustavě souřadnic, vybrat, zda jej popíšeme jako průsečík tří křivek, nebo jako průsečík tří ploch. V kartézské soustavě souřadnic byly takovými přirozeně volenými křivkami souřadnicové přímky, plochami byly souřadnicové roviny. Připomeňme, že souřadnicovou přímku jsme dostali zafixováním dvou kartézských souřadnic a třetí byla proměnná (parametr), u souřadnicové roviny byla konstantní jedna kartézská souřadnice, dvě byly proměnné (dva parametry). Stejnou „logiku“ sleduje volba souřadnicových křivek a ploch u válcových a kulových souřadnic. V případě zafixování dvou válcových, resp. kulových souřadnic (třetí bude parametrem) dostaneme parametrické vyjádření příslušné souřadnicové křivky, bude-li jedna válcová, resp. kulová souřadnice konstantní a dvě budou parametry, získáme parametrické vyjádření souřadnicové plochy. Podobně jako u polárních souřadnic označíme zobrazení, které přiřazuje válcovým souřadnicím kartézské,

$$\alpha : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbf{R} \ni (\varrho, \varphi, z) \longrightarrow \alpha(\varrho, \varphi, z) = (x(\varrho, \varphi, z), y(\varrho, \varphi, z), z(\varrho, \varphi, z)) \in \mathbf{R}^3.$$

Pro souřadnicové křivky dostáváme

$$\begin{aligned} C_{\varrho,P} &= \{\alpha(\varrho, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \varrho \in [0, \infty), \varphi = \varphi_P, z = z_P\}, \\ C_{\varphi,P} &= \{\alpha(\varrho, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \varrho = \varrho_P, \varphi \in [0, 2\pi), z = z_P\}, \\ C_{z,P} &= \{\alpha(\varrho, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \varrho = \varrho_P, \varphi = \varphi_P, z \in \mathbf{R}\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Křivka  $C_{\varrho,P}$  je polopřímka ležící v rovině  $z = z_P$ , jejíž směrový vektor je  $(\cos \varphi_P, \sin \varphi_P, 0)$ . Křivka  $C_{\varphi,P}$  je kružnice o poloměru  $\varrho_P$ , která leží v rovině  $z = z_P$  a má střed na ose  $z$ . Křivka  $C_{z,P}$  je přímka rovnoběžná s osou  $z$ . Všechny souřadnicové křivky samozřejmě procházejí bodem  $P$ . Vidíme je na obrázku 5.6. Podobně jako u polárních souřadnic se i zde zaměříme na otázku, jaké jsou kartézské rovnice souřadnicových křivek. Nejprve se však podívejme, jak vypadají souřadnicové plochy a jejich rovnice. Souřadnicové křivky v  $\mathbf{R}^3$  totiž nedokážeme popsat jednou rovnicí. Potřebujeme dvě rovnice ploch, jejichž průsečnicí pak bude souřadnicová křivka. S podobnou situací jsme se již setkali v příkladu 1.12 v prvním dílu. Tam jsme chtěli zadat kartézskými rovnicemi přímku v  $\mathbf{R}^3$  a viděli jsme, že k tomu potřebujeme dvě kartézské rovnice rovin, jejichž průsečnicí je daná přímka. Rovnice souřadnicových ploch  $S_{\varrho,P}$ ,  $S_{\varphi,P}$  a  $S_{z,P}$  dostaneme zafixováním příslušné válcové souřadnice. Na rozdíl od souřadnicových křivek, kde v indexu vystupovala proměnná souřadnice, vystupuje v indexu u ploch souřadnice pevná.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\varrho,P} &= \{\alpha(\varrho, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \varrho = \varrho_P, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbf{R}\}, \\
\mathcal{S}_{\varphi,P} &= \{\alpha(\varrho, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \varrho \in [0, \infty), \varphi = \varphi_P, z \in \mathbf{R}\}, \\
\mathcal{S}_{z,P} &= \{\alpha(\varrho, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \varrho \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), z = z_P\}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Geometrická interpretace vztahů (5.15) je velmi názorná. Útvar  $\mathcal{S}_{\varrho,P}$  je množina všech bodů v  $\mathbf{R}^3$ , jejichž půdorysné průměty mají od počátku soustavy souřadnic stejnou vzdálenost  $\varrho_P$ . Jedná se tedy o válcovou plochu nekonečné délky o poloměru  $\varrho_P$ , jejíž osou symetrie je osa  $z$ .  $\mathcal{S}_{\varphi,P}$  je množina všech bodů v  $\mathbf{R}^3$ , jejichž půdorysné průměty leží na polopřímce procházející počátkem soustavy souřadnic a svírající s kladným směrem osy  $x$  úhel  $\varphi_P$ . Touto množinou je polorovina obsahující osu  $z$  a kolmá k půdorysně — něco jako list v knize, jejímž hřbetem je osa  $z$ . Útvar  $\mathcal{S}_{z,P}$  je rovina rovnoběžná s půdorysnou ve vzdálenosti  $z_P$  od ní.

**Příklad 5.8:** Kartézské rovnice souřadnicových ploch a souřadnicových křivek válcových souřadnic

Dostaneme je velice jednoduše, dosadíme-li, podobně jako v příkladu 5.7,  $\varrho_P = \sqrt{x^2 + y^2}$  a  $\operatorname{tg} \varphi_P = y/x$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\varrho,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \varrho_P\}, \\
\mathcal{S}_{\varphi,P} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = x \operatorname{tg} \varphi_P, x \geq 0 \text{ pro } \varphi_P \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), x \leq 0 \text{ pro } \varphi_P \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right\}, \\
\mathcal{S}_{z,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = z_P\}.
\end{aligned}$$

Také z kartézských rovnic souřadnicových ploch je hned vidět, že se jedná o útvary, které jsme popsali před chvílí — válcovou plochu, polorovinu kolmou k půdorysně a rovinu rovnoběžnou s půdorysnou. Souřadnicové křivky vzniknou jako průsečnice dvojic souřadnicových ploch, konkrétně

$$\mathcal{C}_{\varrho,P} = \mathcal{S}_{\varphi,P} \cap \mathcal{S}_{z,P}, \quad \mathcal{C}_{\varphi,P} = \mathcal{S}_{\varrho,P} \cap \mathcal{S}_{z,P}, \quad \mathcal{C}_{z,P} = \mathcal{S}_{\varrho,P} \cap \mathcal{S}_{\varphi,P}.$$

Křivka  $\mathcal{C}_{\varrho,P}$  je polopřímka. Je průsečnicí poloroviny — „listu v knize“ a roviny rovnoběžné s půdorysnou. Křivka  $\mathcal{C}_{\varphi,P}$  je kružnice o poloměru  $\varrho_P$  ležící v rovině  $z = z_P$ , střed má na ose  $z$ . Je průsečnicí válcové plochy a roviny rovnoběžné s půdorysnou. Křivka  $\mathcal{C}_{z,P}$  je přímka kolmá k půdorysně. Je průsečnicí válcové plochy a „listu v knize“. Stejně jako v příkladu 5.7 popište výjimečné situace.

Podobné úvahy vedou k popisu souřadnicových křivek a ploch v případě soustavy kulových souřadnic. Pro změnu budeme postupovat opačně a určíme nejprve souřadnicové plochy. Zobrazení převádějící kulové souřadnice v kartézské označíme opět symbolem  $\alpha$ ,

$$\alpha : [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \ni (r, \vartheta, \varphi) \longrightarrow \alpha(r, \vartheta, \varphi) = (x(r, \vartheta, \varphi), y(r, \vartheta, \varphi), z(r, \vartheta, \varphi)) \in \mathbf{R}^3.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{r,P} &= \{\alpha(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid r = r_P, \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}, \\ \mathcal{S}_{\vartheta,P} &= \{\alpha(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid r \in [0, \infty), \vartheta = \vartheta_P, \varphi \in [0, 2\pi)\}, \\ \mathcal{S}_{\varphi,P} &= \{\alpha(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid r \in [0, \infty), \vartheta \in [0, \pi], \varphi = \varphi_P\}.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Geometrická interpretace je opět jasná a nevyžaduje příliš podrobný komentář.  $\mathcal{S}_{r,P}$  je množina všech bodů v  $\mathbf{R}^3$ , které mají od počátku soustavy souřadnic  $O$  stejnou vzdálenost  $r_P$ . Je to kulová plocha se středem v bodě  $O$  a poloměrem  $r_P$ . Útvar  $\mathcal{S}_{\vartheta,P}$  je množina všech bodů, jejichž polohový vektor  $\overrightarrow{OP}$  svírá s kladným směrem osy  $z$  stálý úhel  $\vartheta_P$ . Je to tedy kuželová plocha o vrcholovém úhlu  $2\vartheta_P$ . Konečně  $\mathcal{S}_{\varphi,P}$  je množina všech bodů, pro které polohový vektor jejich půdorysného průmětu  $\overrightarrow{OP}_{xy}$  svírá s osou  $x$  úhel  $\varphi_P$ . A máme zde opět „list v knize“.

#### Příklad 5.9: Kartézské rovnice souřadnicových ploch kulových souřadnic

Pomocí převodních vztahů (5.11) nebo (5.12) získáme kartézské rovnice souřadnicových ploch velice snadno. Zkuste sami dosadit. Platí

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{r,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r_P^2\}, \\ \mathcal{S}_{\vartheta,P} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{tg} \vartheta_P\}, \\ \mathcal{S}_{\varphi,P} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = x \operatorname{tg} \varphi_P, x \geq 0 \text{ pro } \varphi_P \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), x \leq 0 \text{ pro } \varphi_P \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right\}.\end{aligned}$$

Také z kartézských rovnic je ihned zřejmé, jaký tvar mají souřadnicové plochy. Souřadnicové křivky jsou určeny vždy dvojicí kartézských rovnic souřadnicových ploch. Opět popište případy, kdy tangenty nejsou definovány.

Souřadnicové křivky mají v soustavě kulových souřadnic rovnice

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{r,P} &= \{\alpha(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid r \in [0, \infty), \vartheta = \vartheta_P, \varphi = \varphi_P\}, \\ \mathcal{C}_{\vartheta,P} &= \{\alpha(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid r = r_P, \vartheta \in [0, \pi], \varphi = \varphi_P\}, \\ \mathcal{C}_{\varphi,P} &= \{\alpha(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid r = r_P, \vartheta = \vartheta_P, \varphi \in [0, 2\pi)\}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Platí

$$\mathcal{C}_{r,P} = \mathcal{S}_{\vartheta,P} \cap \mathcal{S}_{\varphi,P}, \quad \mathcal{C}_{\vartheta,P} = \mathcal{S}_{r,P} \cap \mathcal{S}_{\varphi,P}, \quad \mathcal{C}_{\varphi,P} = \mathcal{S}_{r,P} \cap \mathcal{S}_{\vartheta,P}.$$

Podél křivky  $\mathcal{C}_{r,P}$  se mění jen vzdálenost bodu  $P$  od počátku. Křivka je tedy polopřímku (paprskem) spojujícím počátek s bodem  $P$ . Podél křivky  $\mathcal{C}_{\vartheta,P}$  se mění úhel  $\vartheta$ . Můžeme si představit bod na povrchu zeměkoule o poloměru  $r_P$ , jehož zeměpisná délka se nemění, tj.  $\varphi = \varphi_P$ , a bod „cestuje“ po poledníku (mění se  $\vartheta$ , tedy i zeměpisná šířka). Souřadnicovou křivkou je poledník — polovina (hlavní) kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem  $r_P$ , která leží v polovině — „listu v knize“. Podél křivky  $\mathcal{C}_{\varphi,P}$  se rovněž nemění vzdálenost



bodu od počátku (leží opět na „zeměkouli“ o poloměru  $r_P$ ). Nemění se ani zeměpisná šířka  $\Phi = 90^\circ - \vartheta_P$ . Mění se pouze zeměpisná délka, bod „cestuje“ po rovnoběžce. Křivka je tedy kružnice o poloměru  $\rho_P = r_P \sin \vartheta_P$ , jejíž rovina je rovnoběžná s půdorysnou a střed leží na ose  $z$ .

### 5.2.3 Malá odbočka do světa funkcí více proměnných — parciální derivace

Nyní již jistě čekáte, že se pustíme do vyjádření plošného elementu v polárních souřadnicích a objemového elementu v souřadnicích válcových a kulových. Abychom to mohli udělat, potřebujeme si připravit jednoduchý výpočetní aparát, který zatím nemáme. Jsou jím parciální derivace funkcí více proměnných. Těmi se budeme důkladně zabývat v obecnějších souvislostech až v kapitole 9, která bude celá věnována právě funkcím více proměnných. V tomto odstavci se skutečně zaměříme jen na názorný výklad toho, co to parciální derivace je, a na objasnění rutinních postupů při jejím výpočtu.

Význam parciálních derivací si ukážeme na příkladu funkce dvou proměnných. Takovou funkci rozumíme zobrazení

$$f : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) \in \mathbf{R},$$

tedy předpis, jímž je každé uspořádané dvojici reálných čísel  $x$  a  $y$  přiřazena funkční hodnota, která je rovněž reálným číslem. Definičním oborem funkce  $f$  nemusí být nutně celá euklidovská rovina  $\mathbf{R}^2$ , ale třeba jen nějaká její podmnožina  $D_f$ . Nejtypičtějšími definičními obory bývají otevřené, nebo uzavřené obdélníky  $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ , nebo  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \in \mathbf{R}^2$ , popřípadě množiny, které se dají zapsat jako sjednocení otevřených obdélníků (tzv. otevřené množiny). Funkční hodnota funkce  $f$  se při změně proměnných nějak obecně mění. Může nás však zajímat, jak se funkce chová, jestliže se mění hodnota jen jedné z proměnných, zatímco druhá proměnná zůstává konstantní. Zapišeme tento úkol matematicky. Uvažujme o chování funkce v blízkosti bodu  $P = (a, b) \in D_f$ . Předpokládejme, že hodnota proměnné  $y$  je na chvíli pevná, třeba  $y = b$ , a hodnota  $x$  se mění. Pohybujeme se tedy po souřadnicové přímce  $p_{x,P}$ , samozřejmě tak, aby platilo  $(x, b) \in D_f$ . Definujme funkci

$$h_b : x \longrightarrow h_b(x) = f(x, b) \quad \text{pro} \quad (x, b) \in D_f \cap p_{x,P}.$$

To je však již funkce jen jedné proměnné  $x$  a můžeme ji derivovat.

Existuje-li derivace funkce  $h_b$  v bodě  $a$ , tj. vlastní limita

$$h'_b(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h_b(x) - h_b(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}, \quad (5.18)$$

nazveme ji *parciální derivací funkce  $f(x, y)$  v bodě  $(a, b)$  podle proměnné  $x$* .

Obdobně definujeme *parciální derivaci funkce*  $f(x, y)$  v bodě  $(a, b)$  podle proměnné  $y$ . S použitím standardního označení vypadají definiční vztahy pro obě parciální derivace takto:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x,y)=(a,b)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a},$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x,y)=(a,b)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

Z těchto definic je hned také vidět, jaký bude při parciálním derivování postup. Budeme používat obvyklá pravidla pro derivování funkcí jedné proměnné a k druhé proměnné se budeme chovat jako ke konstantě. Stejně se postupuje u funkcí více proměnných. Pravidla pro derivování uplatňujeme vůči jedné z nich, podle které právě derivujeme, se všemi ostatními nakládáme jako s konstantami. Postup i geometrickou interpretaci parciálních derivací uvidíme v následujícím příkladu.

#### Příklad 5.10: Jak strmý je kopec nebo hrnec

Na obrázku 5.8 jsou kopec a hrnec představovány grafy funkcí

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 \in \mathbf{R},$$

resp.

$$g : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \ni (x, y) \longrightarrow g(x, y) = x^2 + y^2 \in \mathbf{R}.$$

Jsou to tedy množiny všech bodů  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , pro které je  $(x, y) \in D_f$  a  $z = f(x, y)$ , resp.  $(x, y) \in D_g$  a  $z = g(x, y)$ . Každý z útvarů je částí pláště *rotačního paraboloidu*. Název snadno pochopíme, uvědomíme-li si, že řezy útvaru souřadnicovými rovinami  $xz$  a  $yz$  jsou paraboly (v rovnicích  $z = 2 - x^2 - y^2$  a  $z = x^2 + y^2$  položte postupně  $y = 0$  a  $x = 0$  a hned uvidíte) — odtud název „paraboloid“. Řezy útvarů rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou  $xy$  jsou kružnice — odtud název „rotační“. Vypočteme parciální derivace funkce  $f(x, y)$  třeba v bodě  $(a, b)$  podle jednotlivých proměnných. Nejprve považujme za konstantu proměnnou  $y$  a dosaďme za ni rovnou hodnotu  $b$ . Konstruujeme tím vlastně funkci  $h_b(x)$ , kterou jsme zavedli pro účely definice.

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x,y)=(a,b)} = \left. \frac{d(2 - x^2 - b^2)}{dx} \right|_{x=a} = -2a.$$

Podobně pro parciální derivaci podle proměnné  $y$  dostaneme

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x,y)=(a,b)} = \left. \frac{d(2 - a^2 - y^2)}{dy} \right|_{y=b} = -2b.$$

V praxi se nepočítají parciální derivace tak, že by se za všechny proměnné kromě té, podle které derivujeme, předem dosadily konkrétní konstanty. Postupuje se jinak — všechny proměnné se ve funkčním předpisu ponechají v obecném označení, jen je třeba při derivování myslet na to, že se s nimi má nakládat jako s konstantami. Pro naši funkci tak dostáváme

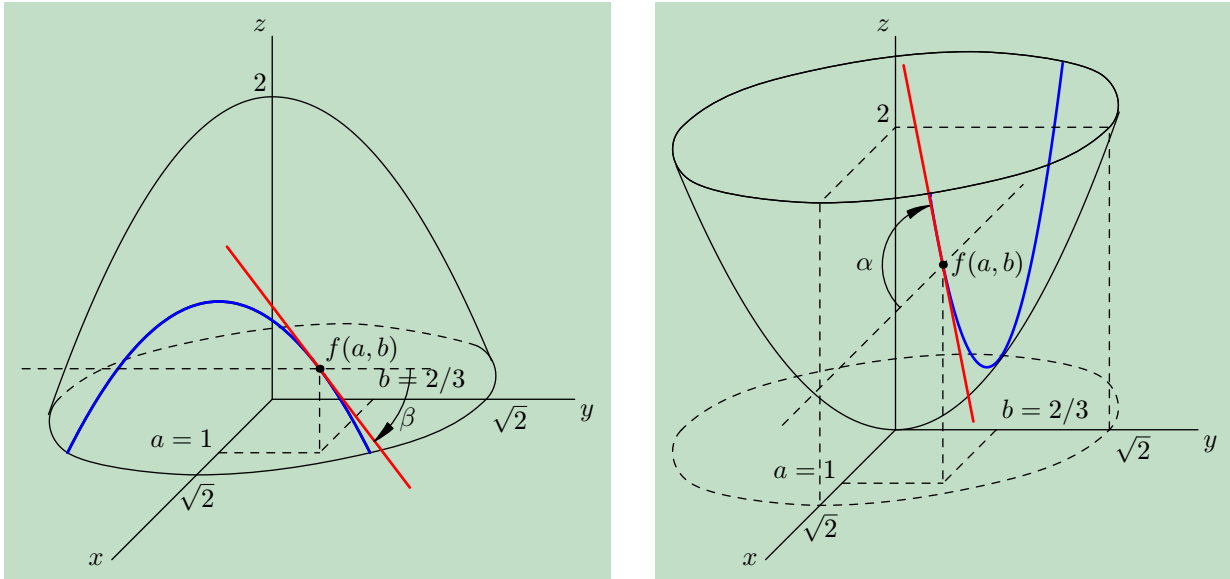
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2y.$$

A teprve do obecných výrazů pro parciální derivace se dosazuje. Výsledek samozřejmě musí vyjít stejný, jako kdybychom za proměnné, podle kterých se zrovna nederivuje, dosadili předem. Ukažme si to na funkci  $g(x, y)$ .

Platí

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 2y.$$

Dosadíme-li  $(x, y) = (a, b)$ , dostáváme pro parciální derivace funkce  $g(x, y)$  v bodě  $(a, b)$  hodnoty  $2a$  a  $2b$ . Ukážeme si nyní geometrický význam parciálních derivací, třeba na příkladu funkce  $f(x, y)$ . V názvu příkladu



Obr. 5.8 Geometrický význam parciálních derivací.

se ptáme, jak strmý je kopec. Každý, kdo po horách chodí, ví, že strmost závisí na tom, jakým směrem po svahu jdeme. Na mapě bývají vyznačeny vrstevnice — to jsou křivky, podél nichž nejdeme ani do kopce, ani s kopce. Spád je podél nich nulový. Naopak, nejstrmější je chůze podél spádnic, ty však na mapách vyznačeny obvykle nejsou. Parciální derivace také určují jakýsi spád. Nikoli však obecně nejmenší nebo největší, ale takový, jaký by odpovídal chůzi po trase, která by se v půdorysu, tedy na rovině (papírové) mapě, promítala do přímky rovnoběžné s osou  $x$ , nebo  $y$ . Na obrázku 5.8 vlevo vidíme tuto situaci pro případ derivování funkce  $f(x, y)$  podle proměnné  $y$ . Ponecháme proměnnou  $x$  konstantní,  $x = a$ , a budeme měnit  $y$  tak, aby bod  $(a, y)$  byl stále prvkem definičního oboru funkce  $f(x, y)$ . Body  $(a, y, f(a, y))$  vyplní křivku, která je průsečnicí grafu funkce  $f(x, y)$ , tedy paraboloidu, a roviny o rovnici  $x = a$ . Tato křivka je parabolou, neboť pro její body platí  $z = f(a, y) = 2 - a^2 - y^2$ . Tečna, kterou k ní sestrojíme například v bodě  $(a, b) = (1, 2/3)$ , bude mít směrnici  $\operatorname{tg} \beta = (1 - y^2)'|_{y=b} = -2y|_{y=b} = -2b = -4/3$ . Tato směrnice je rovna právě parciální derivaci funkce  $f(x, y)$  v bodě  $(a, b) = (1, 2/3)$  podle proměnné  $y$ . Obrázek 5.8 vpravo ukazuje význam parciální derivace funkce  $g(x, y)$  podle proměnné  $x$ .

Předchozí příklad ukazuje, že parciální derivace funkce  $f(x, y)$  v bodě  $(a, b)$  podle  $x$  je směrnici tečny vedené bodem  $(a, b, f(a, b))$  k řezu grafu funkce  $f(x, y)$  rovinou  $y = b$ , a naopak, parciální derivace funkce  $f(x, y)$  v bodě  $(a, b)$  podle  $y$  je směrnici tečny k řezu grafu funkce

$f(x, y)$  rovinou  $x = a$  v tomtéž bodě.

U funkcí jedné proměnné jsme uměli počítat i derivace vyšších řádů. Vzpomeňte si — derivace druhého řádu dané funkce vznikla derivováním již jednou derivované funkce. Také u funkce dvou (a více) proměnných lze derivace vyšších řádů zavést. Dokonce můžeme proměnné, podle kterých derivujeme, „střídat“. Podívejme se na definici podrobněji. Předpokládejme, že funkce  $f(x, y)$  má definiční obor  $D_f$ . Označme  $(D_f)_x \subset D_f$ , resp.  $(D_f)_y \subset D_f$  množinu takových bodů definičního oboru funkce  $f$ , v nichž je definována parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $x$ , resp.  $y$ . Označme

$$f_x : (D_f)_x \ni (x, y) \longrightarrow f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

$$f_y : (D_f)_y \ni (x, y) \longrightarrow f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Funkce  $f_x(x, y)$  a  $f_y(x, y)$  jsou opět funkcemi dvou proměnných a je tedy možné uvažovat o jejich parciálních derivacích,

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \\ f_{yx} &= \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \\ f_{yy} &= \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Máme tedy čtyři derivace druhého řádu. Funkce  $f_{xy}$  a  $f_{yx}$  se nazývají *smíšené parciální* derivace druhého řádu. Volba názvu je z definice zcela zřejmá. Parciálních derivací třetího řádu by již bylo osm, čtvrtého šestnáct,  $k$ -tého  $2^k$ .

### Příklad 5.11: Smíšené parciální derivace

Funkce  $f(x, y)$  je zadána předpisem  $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ . Její geometrický význam již známe — v určitém rozsahu proměnných  $x$  a  $y$ , chápaných jako kartézské souřadnice bodu v rovině, vyjadřuje úhel  $\varphi$  v polárních souřadnicích. Vypočteme její parciální derivace prvního a druhého řádu. Derivujme funkci  $f(x, y)$  nejprve podle proměnné  $x$ . S proměnnou  $y$  tedy zacházíme jako s konstantou. Označme  $u_y(x) = \frac{y}{x}$ ,  $g_y(x) = \arctg u_y(x)$ . Odtud použitím pravidla pro derivování složené funkce jedné proměnné dostaneme

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = g'_y(x) = \frac{1}{1 + u_y^2(x)} u'_y(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Obdobně při derivování funkce  $f(x, y)$  podle  $y$  označíme  $v_x(y) = \frac{y}{x}$  a  $h_x(y) = \arctg v_x(y)$ . Za konstantu nyní považujeme proměnnou  $x$ . Platí

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = h'_x(y) = \frac{1}{1 + v_x^2(y)} v'_x(y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Stejně postupujeme při výpočtu derivací funkcí  $f_x(x, y)$  a  $f_y(x, y)$ , tj. derivací druhého řádu funkce  $f(x, y)$ . Dostáváme tyto výsledky — pokuste se k nim dospět sami.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = -\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že smíšené parciální derivace  $f_{xy}(x, y)$  a  $f_{yx}(x, y)$  jsou shodné. Mohli bychom si samozřejmě myslet, že je to náhoda — ani sto nebo tisíc příkladů přece není důkazem obecného tvrzení, natožpak jeden. Shodnost smíšených parciálních derivací však náhodná není. V deváté kapitole se tímto problémem budeme zabývat podrobněji. V tuto chvíli si jen řekneme jako fakt, že jsou-li smíšené parciální derivace spojitě, pak jsou si rovny. Platí to i pro derivace vyšších řádů. Jsou-li spojitě, je důležité pouze to, kolikrát podle které proměnné derivujeme. Nezáleží na tom, v jakém pořadí. Například pro derivace třetího řádu (budou-li splňovat postačující podmínku spojitosti) bude platit

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial x^2}.$$

Tvrzení o záměnnosti smíšených parciálních derivací je (nejen) pro souřadnicové převody natolik důležité, že je již nyní formulujeme jako větu (důkazu se dočkáme v kapitole 9).

**Věta 5.1 (Schwarzova):** *Jsou-li smíšené parciální derivace  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$  spojitě v bodě  $P = (a, b)$ , pak jsou si v tomto bodě rovny.*

V kapitole 9 si také ukážeme příklady, kdy je podmínka spojitosti porušena. V takových situacích smíšené parciální derivace mohou, ale nemusí být stejné. Nyní nemáme vybudován potřebný matematický aparát ani pro definici pojmu *spojitosti* funkce dvou proměnných, budeme ji tedy zatím chápat „intuitivně“. V kapitole 9 vše napravíme. Smíšené derivace funkcí, se kterými se setkáme v této kapitole, budou vždy spojitě na uvažovaných množinách, můžeme si tedy dovolit pořadí derivování zaměňovat (a v následujících příkladech to také děláme).

Zobecnění pojmu parciálních derivací na funkce více proměnných je jednoduché. Funkcí  $n$  proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rozumíme zobrazení

$$f : \mathbf{R}^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}.$$

Stejně jako u funkce dvou proměnných ani zde nemusí být definičním oborem funkce  $f$  celý prostor  $\mathbf{R}^n$ , ale jen nějaká jeho podmnožina  $D_f$ . Často bývají definičními obory *otevřené* nebo

uzavřené  $n$ -rozměrné kvádry, které jsou kartézskými součiny otevřených nebo uzavřených intervalů, tj.

$$K = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n), \quad \text{resp.} \quad \bar{K} = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n].$$

Charakterem definičních oborů se budeme podrobněji zabývat také až v kapitole 9. Parciální derivací funkce  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  v bodě  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D_f$  podle proměnné  $x_i$  rozumíme derivaci funkce

$$g_i : \mathbf{R} \ni x_i \longrightarrow g_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbf{R}$$

v bodě  $a_i$ , tedy limitu

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x=a} = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x_i - a_i}. \quad (5.20)$$

Výpočet je také jednoduchý. Všechny proměnné s výjimkou  $x_i$  při něm považujeme za konstanty a používáme obvyklá pravidla pro derivování funkcí jedné proměnné.

### Příklad 5.12: Parciální derivování při souřadnicových převodech

Přestože porozumění pojmu parciální derivace nevyžaduje žádné zvláštní úsilí (derivujeme „obyčejně“ podle jedné z proměnných a s ostatními zacházíme jako s konstantami), při jeho praktickém používání je přece jen třeba pozornosti. Zejména pak v situacích, kdy derivujeme funkce vyjádřené jednou v kartézských, podruhé v polárních, resp. válcových, či kulových souřadnicích. Předpokládejme, že ve funkci  $f(x, y)$  jsou proměnné  $x$  a  $y$  kartézskými souřadnicemi bodu v rovině  $\mathbf{R}^2$ . Polohu bodu však můžeme zadat i souřadnicemi polárními, tj. za  $x$  a  $y$  dosadit ze vztahů (5.5). Vznikne tím funkce proměnných  $\varrho$  a  $\varphi$

$$F(\varrho, \varphi) = f(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi)) = f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi).$$

Postupně vyjádříme první a druhé derivace funkce  $F(\varrho, \varphi)$  podle proměnných  $\varrho$  a  $\varphi$ , tj. funkce

$$F_\varrho = \frac{\partial F(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho}, \quad F_\varphi = \frac{\partial F(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi},$$

$$F_{\varrho\varrho} = \frac{\partial^2 F(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho^2}, \quad F_{\varrho\varphi} = F_{\varphi\varrho} = \frac{\partial^2 F(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho \partial \varphi}, \quad F_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi^2}.$$

Funkce  $F(\varrho, \varphi) = f(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi))$  je složenou funkcí proměnných  $\varrho$  a  $\varphi$ . Má vnitřní složky  $x = x(\varrho, \varphi)$ ,  $y = y(\varrho, \varphi)$  a vnější složku  $f(x, y)$ . Na příkladu výpočtu parciální derivace funkce  $F(\varrho, \varphi)$  podle proměnné  $\varrho$  ukážeme zatím pouze praktické použití pravidla pro derivaci složené funkce. Předpokládejme, že existují parciální derivace vnitřních složek  $x = x(\varrho, \varphi)$ ,  $y = y(\varrho, \varphi)$  podle obou proměnných  $\varrho$  a  $\varphi$  i parciální derivace vnější složky  $f(x, y)$  podle proměnných  $x$  a  $y$ . Podle definice je

$$\frac{\partial F(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} = \lim_{\Delta \varrho \rightarrow 0} \frac{F(\varrho + \Delta \varrho, \varphi) - F(\varrho, \varphi)}{\Delta \varrho}.$$

Změní-li se proměnná  $\varrho$  o  $\Delta \varrho$ , změní se obě vnitřní složky  $x = x(\varrho, \varphi)$  i  $y = y(\varrho, \varphi)$  složené funkce  $F(\varrho, \varphi)$ . Označme  $\Delta x = x(\varrho + \Delta \varrho, \varphi) - x(\varrho, \varphi)$  a  $\Delta y = y(\varrho + \Delta \varrho, \varphi) - y(\varrho, \varphi)$ . Upravujeme výraz

$$\frac{F(\varrho + \Delta \varrho, \varphi) - F(\varrho, \varphi)}{\Delta \varrho}$$

za předchozí limitou. Použijeme při tom užitečnou formální úpravu:

$$\begin{aligned} \frac{F(\varrho + \Delta\varrho, \varphi) - F(\varrho, \varphi)}{\Delta\varrho} &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta\varrho} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta\varrho} + \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta\varrho} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{y(\varrho + \Delta\varrho, \varphi) - y(\varrho, \varphi)}{\Delta\varrho} + \\ &\quad + \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \cdot \frac{x(\varrho + \Delta\varrho, \varphi) - x(\varrho, \varphi)}{\Delta\varrho}. \end{aligned}$$

Později ukážeme, že za určitých předpokladů je pro  $\Delta\varrho \rightarrow 0$  také  $\Delta x \rightarrow 0$  a  $\Delta y \rightarrow 0$ . Limity zlomků upraveného výrazu jsou parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} &= \lim_{\Delta\varrho \rightarrow 0} \frac{x(\varrho + \Delta\varrho, \varphi) - x(\varrho, \varphi)}{\Delta\varrho}, \\ \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} &= \lim_{\Delta\varrho \rightarrow 0} \frac{y(\varrho + \Delta\varrho, \varphi) - y(\varrho, \varphi)}{\Delta\varrho}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Zdůrazněme, že do parciálních derivací funkce  $f(x, y)$  je nakonec třeba dosadit za proměnné  $x$  a  $y$  funkce  $x = x(\varrho, \varphi)$  a  $y = y(\varrho, \varphi)$ . (V případě převodu z kartézských do polárních souřadnic to znamená  $x(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi$  a  $y(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi$ .) Získáváme tak výsledek

$$\frac{\partial F(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi))} \cdot \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi))} \cdot \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho}.$$

Stejným postupem vypočteme derivaci složené funkce  $F(\varrho, \varphi)$  podle  $\varphi$ ,

$$\frac{\partial F(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi))} \cdot \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi))} \cdot \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Zkráceně, bez explicitního vyznačování proměnných, píšeme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \varrho} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} (-\varrho \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} (\varrho \cos \varphi). \end{aligned}$$

Parciální derivace druhého řádu zapíšeme již jen ve zkrácené podobě (jednotlivé kroky postupu pořádně propočítejte):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right) = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varrho} \right) = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \varrho^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \varrho^2} = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \varrho} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varrho} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \varrho} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \varrho} = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \varrho} = \\
&= \varrho \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi + \varrho \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = \\
&= \varrho^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \varphi \right) - \varrho \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \right).
\end{aligned}$$

Správnost předchozích složitě vypadajících vztahů můžeme otestovat třeba na jednoduché funkci  $F(\varrho, \varphi) = f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)$ , kde  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Dosadíme-li totiž za  $x$  a  $y$ , dostaneme  $F(\varrho) = \varrho^2$ . Odtud snadno spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = 2\varrho, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho \partial \varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Tytéž výsledky musíme dostat, dosadíme-li do vztahů, které jsme před chvílí odvodili obecně, konkrétní funkci  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Pro ni platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 2\varrho \cos \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 2\varrho \sin \varphi, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \varrho} &= 2\varrho \cos^2 \varphi + 2\varrho \sin^2 \varphi = 2\varrho, \\
\frac{\partial F}{\partial \varphi} &= 2\varrho \cos \varphi \cdot (-\varrho \sin \varphi) + 2\varrho \sin \varphi \cdot (\varrho \cos \varphi) = 0, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} &= 2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi = 2, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho \partial \varphi} &= 0, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} &= 2\varrho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2\varrho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 0.
\end{aligned}$$

Samozřejmě je možné a vhodné odvodit také vztahy pro parciální derivace funkcí kartézských souřadnic vzniklých převodem ze souřadnic polárních, tj. funkcí tvaru  $f(x, y) = F(\varrho(x, y), \varphi(x, y))$ . Tuto „ekvilibristiku“ ponecháme až na cvičení.



Vztahy pro derivace složených funkcí vypočtené v předchozím příkladu ještě mnohokrát použijeme. Proto si je nyní zapíšeme jednodušeji, s využitím symboliky uvedené v rovnicích (5.19). Uvažujme o funkci  $f = f(u, v)$  proměnných  $u, v$ . Každá z proměnných  $u, v$  je dále funkcí  $x$  a  $y$ , tedy  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Může se například jednat o převod souřadnic. Předpokládáme spojitost všech funkcí a jejich prvních i druhých parciálních derivací na příslušných definičních oborech. Pro složenou funkci  $F(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$  platí

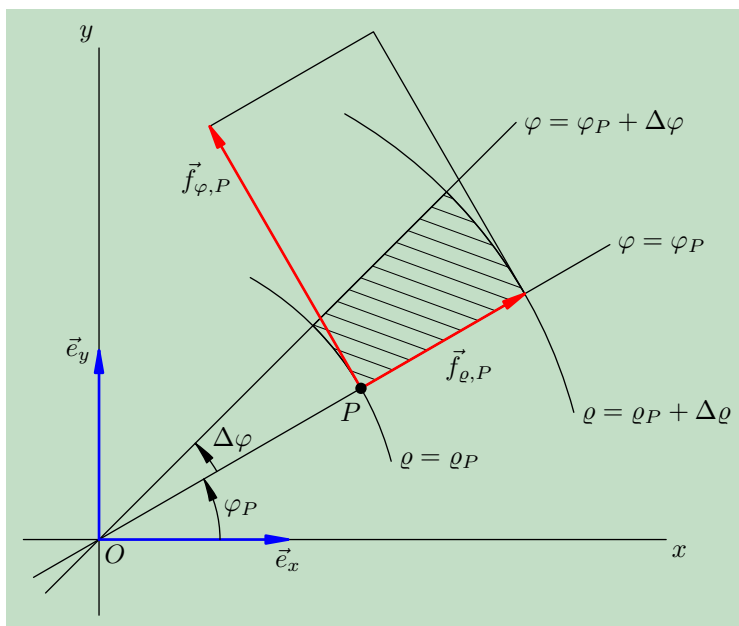
$$\begin{aligned} F_x &= f_u u_x + f_v v_x, \\ F_y &= f_u u_y + f_v v_y, \\ F_{xx} &= f_{uu} u_x^2 + 2f_{uv} u_x v_x + f_{vv} v_x^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}, \\ F_{xy} &= f_{uu} u_x u_y + f_{uv} (u_x v_y + u_y v_x) + f_{vv} v_x v_y + f_u u_{xy} + f_v v_{xy}, \\ F_{yy} &= f_{uu} u_y^2 + 2f_{uv} u_y v_y + f_{vv} v_y^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

### 5.2.4 Elementární plocha a objem

Mohlo by se zdát, že otázka elementární plochy a elementárního objemu s parciálními derivacemi funkcí nijak nesouvisí. Plocha a objem jsou přece geometrické pojmy a derivování patří do matematické analýzy. Za chvíli ukážeme, že souvislost je zde naopak velice těsná a že geometrie a analýza mají k sobě blízko. Parciální derivace, které jsme si jako aparát připravili v minulém odstavci, nám velmi účinně pomohou při odvození plošného nebo objemového elementu, který respektuje volbu polárních souřadnic v  $\mathbf{R}^2$ , nebo válcových, či kulových souřadnic v  $\mathbf{R}^3$ . Pro začátek uvedeme dva geometricky názorné příklady. Předtím však ještě musíme vymyslet, jak bude vymezen útvar představující v polárních, resp. válcových, nebo kulových souřadnicích elementární plochu, resp. objem. Elementární plochu v bodě  $P$  v kartézských souřadnicích v rovině jsme v odstavci 5.1.3 vymezili souřadnicovými přímkami o rovnicích  $x = x_P$ ,  $x = x_P + \Delta x$ ,  $y = y_P$  a  $y = y_P + \Delta y$ , elementární objem souřadnicovými rovinami o rovnicích  $x = x_P$ ,  $x = x_P + \Delta x$ ,  $y = y_P$ ,  $y = y_P + \Delta y$ ,  $z = z_P$  a  $z = z_P + \Delta z$ . Přirozené je použít tuto myšlenku vymezení elementární plochy, resp. objemu i u souřadnic polárních, válcových a kulových. Samozřejmě s tím, že použijeme jim odpovídající souřadnicové křivky a plochy.

#### Příklad 5.13: Plošný element v polárních a objemový element ve válcových souřadnicích

Vzpomínáte si na obrázek 5.3? Znázorňoval elementární plochu v bodě  $P \in \mathbf{R}^2$  o obsahu  $\Delta S_k(P) = \Delta x \Delta y$  v kartézských souřadnicích jako útvar vymezený souřadnicovými přímkami o rovnicích  $x = x_P$ ,  $x = x_P + \Delta x$ ,  $y = y_P$ ,  $y = y_P + \Delta y$ . Pomocí obrázku 5.9 vyjádříme obsah plochy vymezené v bodě  $P$  souřadnicovými křivkami polárních souřadnic, kružnicemi  $\varrho = \varrho_P$  a  $\varrho = \varrho_P + \Delta \varrho$  a polopřímkami  $\varphi = \varphi_P$  a  $\varphi = \varphi_P + \Delta \varphi$ . Útvar, jehož obsah máme počítat, je výseč mezikružjí o vnitřním a vnějším poloměru  $\varrho_P$  a  $\varrho_P + \Delta \varrho$  připadající na úhel  $\Delta \varphi$ .



Obr. 5.9 Plošný element v polárních souřadnicích.

Obsah celého mezikruží je  $\pi(\rho_P + \Delta\rho)^2 - \pi\rho_P^2$ . Obsah výseče pak je

$$\Delta S_p(P) = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} [\pi(\rho_P + \Delta\rho)^2 - \pi\rho_P^2] = \frac{\Delta\varphi}{2} [2\rho_P \Delta\rho + (\Delta\rho)^2] \implies$$

$$\Delta S_p(P) = \rho_P \Delta\rho \Delta\varphi + (\Delta\rho)^2 \Delta\varphi.$$

Za předpokladu, že změny  $\Delta\rho$  a  $\Delta\varphi$  jsou „velmi malé“, můžeme výraz  $(\Delta\rho)^2 \Delta\varphi$  zanedbat vzhledem k  $\rho_P \Delta\rho \Delta\varphi$ . Přibližný obsah elementární plochy v polárních souřadnicích je tedy  $\Delta S_p(P) \doteq \rho_P \Delta\rho \Delta\varphi$ .

Ve válcových souřadnicích je objemový element v bodě  $P \in \mathbf{R}^3$  je vymezen souřadnicovými plochami  $\rho = \rho_P$ ,  $\rho = \rho_P + \Delta\rho$ ,  $\varphi = \varphi_P$ ,  $\varphi = \varphi_P + \Delta\varphi$ ,  $z = z_P$ ,  $z = z_P + \Delta z$  (viz vztahy (5.15)). Jedná se o obecné válcové těleso o podstavě s přibližným obsahem  $\Delta S_p(P) \doteq \rho_P \Delta\rho \Delta\varphi$  a výšce  $\Delta z$ . Objem tohoto tělesa je přibližně  $\Delta V_v(P) \doteq \rho_P \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z$ . Získali jsme tak objemový element ve válcových souřadnicích.

#### Příklad 5.14: Objemový element v kulových souřadnicích

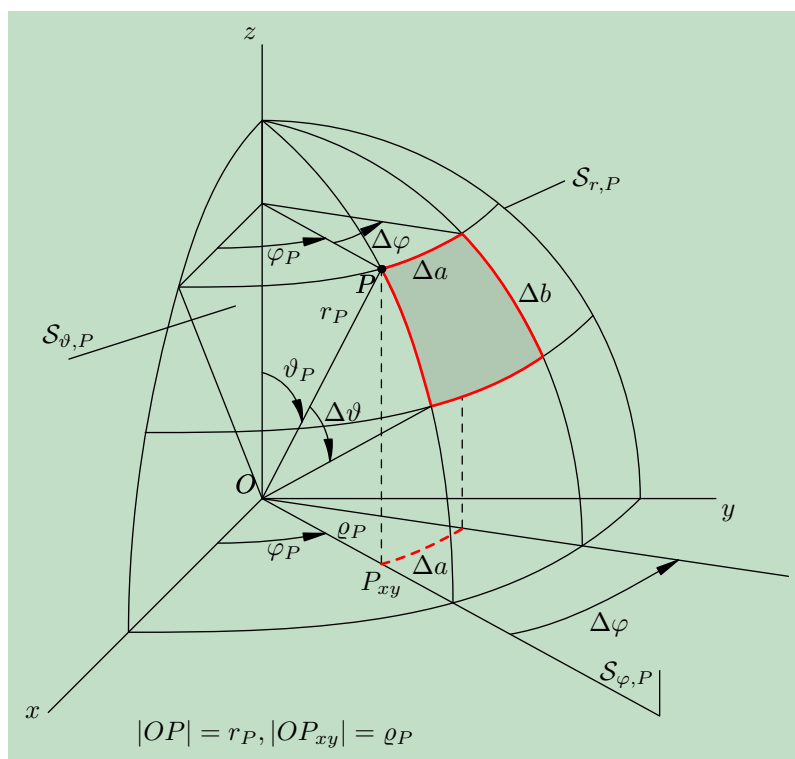
Obrázek 5.10 znázorňuje elementární plochu vymezenou na kulové ploše o poloměru  $r_P$  souřadnicovými plochami sférických souřadnic  $\vartheta = \vartheta_P$ ,  $\vartheta = \vartheta_P + \Delta\vartheta$ ,  $\varphi = \varphi_P$  a  $\varphi = \varphi_P + \Delta\varphi$  (viz též vztahy (5.16)). Za předpokladu velmi malých změn  $\Delta\vartheta$  a  $\Delta\varphi$  můžeme tuto plošku považovat přibližně za obdélník o stranách

$$\Delta a = \rho_P \Delta\varphi = r_P \sin \vartheta_P \Delta\varphi \quad \text{a} \quad \Delta b = r_P \Delta\vartheta.$$

Jeho obsah je

$$\Delta S_\kappa(P) \doteq \Delta a \Delta b = r_P^2 \sin \vartheta_P \Delta\vartheta \Delta\varphi.$$

Element objemu v kulových souřadnicích si můžeme představit jako tělísko o podstavě  $\Delta S_\kappa(P)$  a výšce  $\Delta r$ . Je totiž vymezen kromě souřadnicových ploch  $\vartheta = \vartheta_P$  a  $\vartheta = \vartheta_P + \Delta\vartheta$  (kuželové plochy),  $\varphi = \varphi_P$  a  $\varphi = \varphi_P + \Delta\varphi$  (poloroviny, které jsme nazývali „listy v knize“) ještě kulovými plochami  $r = r_P$  a  $r = r_P + \Delta r_P$ . Pro



Obr. 5.10 „Podstava“ elementárního objemu v kulových souřadnicích.

elementární objem v bodě  $P$  v kulových souřadnicích dostaneme

$$\Delta V_{\kappa}(P) \doteq r_P^2 \sin \vartheta_P \Delta r \Delta \vartheta \Delta \varphi.$$

Skutečnost, že změny souřadnic jsou velmi malé, vyznačujeme tak, že symbol  $\Delta$  nahradíme symbolem  $d$ . Pro plošný, resp. objemový element v polárních, resp. válcových souřadnicích a kulových souřadnicích tak získáváme vztahy

$$dS_p = \varrho d\varrho d\varphi, \quad dV_v = \varrho d\varrho d\varphi dz, \quad dV_{\kappa} = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \quad (5.22)$$

V zápisu (5.22) jsme vynechali index  $P$  — vyjádření elementární plochy a elementárního objemu tak získáváme v obecném bodě.

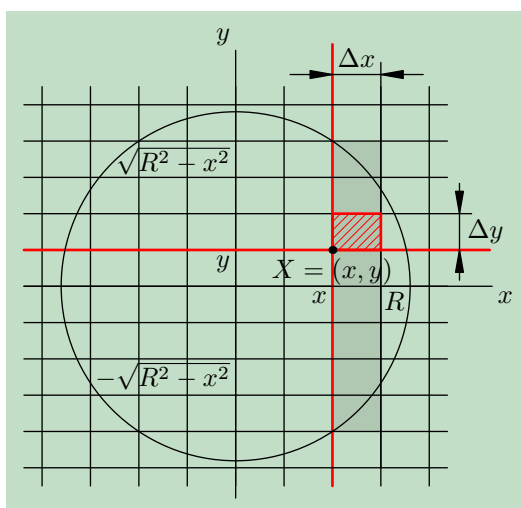
Předchozí výpočty plošných a objemových elementů jsou sice názorné, ale prozatím jen intuitivní, nepříliš korektní a hlavně málo obecné. Týkají se jen speciálních typů křivočarých souřadnic. Než se jim budeme věnovat podrobněji, ukážeme ještě dva příklady, které nás poučí o užitečnosti plošných a objemových elementů v křivočarých souřadnicích. Opět se při jejich řešení budeme muset spolehnout na názornost a intuici a těšit se na jejich korektní zpracování v dalších částech textu. Poněkud jimi totiž odhalíme podstatu výpočtu *vícenásobého integrálu*, na který v tomto dílu knihy ještě ani nepřijde řada.

**Příklad 5.15:** K čemu je dobrý plošný a objemový element

Víte, jaký je obsah kruhu o poloměru  $R$ ? Jistě ano. Je to  $S(K) = \pi R^2$ . Jak to ale dokázat? Můžeme si představit jednoduchý „experimentální“ způsob, použitelný třeba i na základní škole, ale obsahující myšlenku korektního a exaktního postupu. Vezmeme třeba průsvitný milimetrový papír, položíme ho na kruh a spočítáme, kolik milimetrových čtverečků se do kruhu vejde tak, aby „nepřečuhovaly“. Dejme tomu, že je jich  $n$ . Pak spočítáme, kolik čtverečků obsahuje nejmenší možný útvar, do kterého se zase vejde celý kruh. Jejich počet označíme  $N$ . Pro obsah kruhu potom platí

$$n \text{ mm}^2 \leq S(K) \leq N \text{ mm}^2.$$

Je jasné, že takto získáme jen odhad obsahu kruhu — útvar tvořený milimetrovými čtverečky je „zubatý“ a nikdy nemůže přesně pokrýt kruh. Kdybychom síť čtverečků, nebo obecněji, plošných elementů o obsahu  $\Delta S_k = \Delta x \Delta y$ , stále zjemňovali a zjemňovali, byl by předchozí odhad obsahu kruhu stále přesnější a přesnější. Plošné elementy můžeme samozřejmě sčítat v jakémkoli pořadí, lépe však bude udělat to systematicky. Nejprve sečteme pro danou pevnou hodnotu  $x$  všechny plošné elementy v mezích od  $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$  do  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Dostaneme tak obsah elementárního „sloupečku“ zvýrazněného v obrázku 5.11. Pak sečteme všechny elementární sloupečky



Obr. 5.11 K výpočtu obsahu kruhu pomocí objemových elementů.

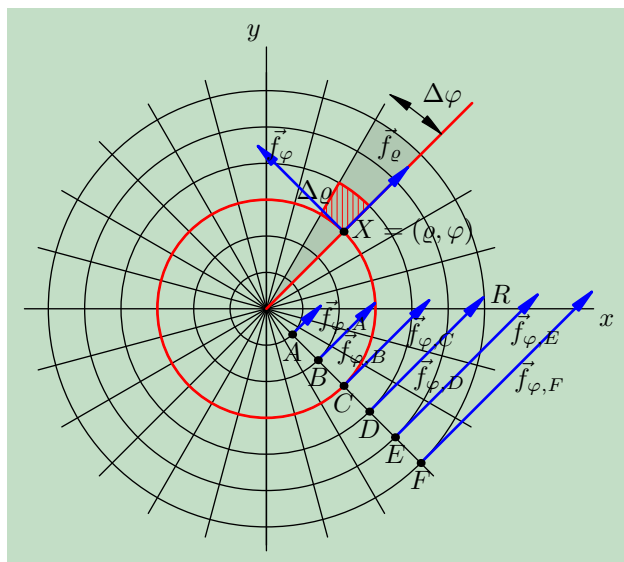
pro  $x$  v mezích od  $x = -R$  do  $x = R$ . Z odstavce 2.3 prvního dílu víme, že takové „sčítání limitně malých elementů“ se děje pomocí integrování. Postup sčítání plošných elementů vyplňujících kruh lze tedy vyjádřit následující postupnou integrací,

$$S(K) = \int_{-R}^R \left( \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2-x^2} dx.$$

Při výpočtu integrálu použijeme substituce  $x = R \cos t$ . Dolní mezi  $x = -R$  odpovídá  $t = \pi$ , horní mezi  $x = R$  odpovídá  $t = 0$ . Dostaneme

$$S(K) = - \int_{\pi}^0 2R^2 \sin t |\sin t| dt = 2R^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2R^2 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = \pi R^2.$$

Stejný výsledek bychom měli dostat, kdybychom takto „posčítali“ plošné elementy v polárních souřadnicích. Vidíme to na obrázku 5.12.



Obr. 5.12 K výpočtu obsahu kruhu pomocí plošných elementů.

Polární souřadnice mnohem lépe vystihují tvar kruhu. Uvidíme, že výpočet bude daleko jednodušší než „sčítání“ kartézských plošných elementů. Nejprve sečteme plošné elementy  $\Delta S_p = \rho d\rho d\varphi$  ve výšce  $[\varphi, \varphi + \Delta\varphi]$  v rozmezí  $\rho = 0, \rho = R$ , a potom sečteme všechny výšce v mezích  $\varphi = 0, \varphi = 2\pi$ .

$$S(K) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \rho d\rho \right) d\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2.$$

Vidíme, že křivočaré souřadnice se souřadnicovými křivkami, resp. plochami určité symetrie mohou velmi zjednodušit výpočty v úlohách stejného typu symetrie.

### Příklad 5.16: Laplaceův integrál v polárních souřadnicích

Na straně 240 prvního dílu jsme hovořili o Laplaceově integrálu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Nyní si hodnotu Laplaceova integrálu názorně zdůvodníme pomocí jeho převodu do polárních souřadnic. Uvažujme o dvojném integrálu

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Tímto integrálem bychom například počítali hmotnost čtverce o straně  $2a$  (v kartézských souřadnicích), jehož plošná hustota je dána funkcí  $\sigma(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ . Vzhledem k tomu, že funkce hustoty klesá se vzdáleností

od počátku, můžeme si položit otázku, zda existuje limita tohoto integrálu pro  $a$  jdoucí do nekonečna. Takový nevlastní integrál by pak odpovídal výpočtu hmotnosti  $M$  nekonečné roviny s plošnou hustotou  $\sigma(x, y)$ . Úpravou integrálu dostaneme:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right]^2.$$

Laplaceův integrál jsme zatím nespočetali. Vidíme však, že pokud bychom dokázali spočítat hmotnost  $M$  nekonečné roviny s hustotou  $\sigma(x, y)$  nějakým jiným způsobem, byla by tato hodnota rovna právě druhé mocnině Laplaceova integrálu. V polárních souřadnicích to bude jednoduché! Protože je  $x^2 + y^2 = \varrho^2$ , pro funkci hustoty platí  $\sigma(\varrho, \varphi) = e^{-\varrho^2}$ . Plošný element  $dx dy$  nahradíme výrazem  $\varrho d\varrho d\varphi$  a nevlastní integrál již snadno spočítáme:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho = 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-\varrho^2} \right]_0^{\infty} = -\pi \left[ \lim_{\varrho \rightarrow \infty} e^{-\varrho^2} - 1 \right] = \pi.$$

Hmotnost  $M$  a tedy i druhá mocnina Laplaceova integrálu je rovna hodnotě  $\pi$ .

V dalších úvahách si všimneme jiného způsobu, jak určit plošný, resp. objemový element v polárních, resp. válcových a kulových souřadnicích, než jsme použili v příkladech 5.13 a 5.14. Získáme tak postup, který bude možné zobecnit i na jiné křivočaré souřadnice, u nichž bychom s geometrickým přístupem použitým v příkladech 5.13 a 5.14 neuspěli. V příkladu 5.2 jsme vyjádřili obsah jednotkové plošky určené vektory ortonormální báze  $(\vec{e}_{x,P}, \vec{e}_{y,P})$  kartézských souřadnic umístěné v bodě  $P$  poněkud komplikovaným způsobem, jako velikost vektorového součinu těchto vektorů. Tyto vektory jsou tečné k souřadnicovým přímkám  $p_{x,P}$  a  $p_{y,P}$  procházejícím bodem  $P$ . Jejich konstrukci ukážeme na následujícím příkladu.

### Příklad 5.17: Tečný vektor

Parametrické vyjádření přímek  $p_{x,P}$  a  $p_{y,P}$  má tvar  $p_{x,P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = t, y = y_P\}$ ,  $p_{y,P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = x_P, y = t\}$ . Představme si, že například přímka  $p_{x,P}$  je parametrickým vyjádřením trajektorie nějaké částice, přičemž parametr  $t$  představuje čas. Pořádný fyzik musí namítnout, že rovnost  $x = t$  je rozměrově nesprávná, neboť čas je měřen v sekundách a souřadnice v metrech. Tato správná námitka se dá vyřešit, zapíšeme-li vztah ve tvaru  $x = u_1 t$ , kde  $u_1 = 1 \text{ m s}^{-1}$  má význam složky rychlosti a funguje jako *rozměrová konstanta*. Polohový vektor této částice je tedy  $\vec{r}_1(t) = (u_1 t, y_P)$ , její rychlost je  $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t) = (1, 0) \text{ m s}^{-1}$ . Vidíme, že rychlost je číselně rovna tečnému vektoru  $\vec{e}_{x,P}$  k souřadnicové přímce  $p_{x,P}$ . Stejnou úvahou dospějeme k závěru, že vektor  $\vec{e}_{y,P} = (0, 1)$  je číselně roven rychlosti částice, jejíž trajektorie má parametrické vyjádření přímky  $p_{y,P}$ , tj.  $\vec{r}_2(t) = (x_P, u_2 t)$ , kde  $u_2 = 1 \text{ m s}^{-1}$  je opět rozměrová konstanta. Platí  $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t) = (0, u_2) = (0, 1) \text{ m s}^{-1}$ .

Příkladem 5.17 jsme si tak trochu připomněli něco z odstavce 2.2.6 prvního dílu, v němž jsme se zabývali charakteristikami trajektorií částic podrobněji. Z toho, co o nich už známe, nyní použijeme tu nejjednodušší a nejnázornější věc, že totiž tečný vektor ke křivce  $\mathcal{C}$  v rovině  $\mathbf{R}^2$ , resp. v prostoru  $\mathbf{R}^3$ , vyjádřené parametricky ve tvaru zobrazení

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2, \quad \text{resp.} \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3,$$

je

$$\vec{f}_C(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \quad \text{resp.} \quad \vec{f}_C(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)). \quad (5.23)$$

Vypočteme nyní tečné vektory k souřadnicovým křivkám polárních, válcových a kulových souřadnic.

### Příklad 5.18: Tečné vektory k souřadnicovým křivkám — polární souřadnice

Polohový vektor obecného bodu s polárními souřadnicemi  $(\varrho, \varphi)$  je v kartézských souřadnicích vyjádřen vztahy (5.5), souřadnicové křivky jsou určeny vztahy (5.13). Uvažujme třeba o křivce  $C_{\varphi,P}$ . Podél ní je polární souřadnice  $\varrho = \varrho_P$  konstantní, proměnnou souřadnici  $\varphi$  chápeme jako parametr. Parametrické vyjádření křivky  $C_{\varphi,P}$  je tedy

$$\vec{r}_{\varphi,P} = (x_{\varphi,P}(\varphi), y_{\varphi,P}(\varphi)) = (\varrho_P \cos \varphi, \varrho_P \sin \varphi).$$

Odpovídající tečný vektor k této souřadnicové křivce dostaneme podle vztahů (5.23) derivováním jejího parametrického vyjádření podle parametru  $\varphi$ ,

$$\vec{f}_{\varphi,P} = (-\varrho_P \sin \varphi, \varrho_P \cos \varphi)|_{\varphi=\varphi_P} = (-\varrho_P \sin \varphi_P, \varrho_P \cos \varphi_P).$$

Obdobně dostaneme parametrické vyjádření křivky  $C_{\varrho,P}$  a její tečný vektor v bodě  $P$ . Proměnným parametrem však nyní bude  $\varrho$ ,

$$\vec{r}_{\varrho,P} = (x_{\varrho,P}(\varphi), y_{\varrho,P}(\varphi)) = (\varrho \cos \varphi_P, \varrho \sin \varphi_P), \quad \vec{f}_{\varrho,P} = (\cos \varphi_P, \sin \varphi_P).$$

Zatímco vektor  $\vec{f}_{\varrho,P}$  je jednotkový, u vektoru  $\vec{f}_{\varphi,P}$  tomu tak není. Je tím delší, čím je bod  $P$  vzdálenější od počátku soustavy souřadnic. Zase si můžeme uvědomit analogii s fyzikou: Parametr  $\varphi$  se při jednom oběhu částice po kružnici změní o  $2\pi$ . Pokud by rovnoměrně obíhající částice měla vykonat jeden oběh po kružnici za danou časovou periodu  $T$ , musela by mít úhlovou rychlost  $\omega = 2\pi/T$ . Vektor její rychlosti (tečný vektor k její trajektorii) by pak měl v případě, že kružnice má poloměr  $\varrho_P$ , velikost  $v = \omega \varrho_P$  úměrnou poloměru kružnice.

Předchozí podrobný výpočet tečných vektorů k souřadnicovým křivkám polárních souřadnic v bodě  $P$  je návodem na výpočet složek tečných vektorů v obecném bodě. Stačí si uvědomit, že vektory  $\vec{f}_{\varrho,P}$  a  $\vec{f}_{\varphi,P}$  jsme získali derivováním polohového vektoru

$$\vec{r}(\varrho, \varphi) = (x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi)) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)$$

jednou podle  $\varrho$  při konstantní hodnotě  $\varphi = \varphi_P$ , podruhé podle  $\varphi$  při konstantní hodnotě  $\varrho = \varrho_P$ . Jde tedy o parciální derivace. Pro tečné vektory k souřadnicovým křivkám v obecném bodě platí

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\varrho} &= \left( \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho}, \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi), \\ \vec{f}_{\varphi} &= \left( \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi}, \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi} \right) = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Vektory  $\vec{f}_{\varrho}$  a  $\vec{f}_{\varphi}$  můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů  $\vec{e}_x$  a  $\vec{e}_y$ , tj.

$$\vec{f}_{\varrho} = \frac{\partial x}{\partial \varrho} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \varrho} \vec{e}_y = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y,$$

$$\vec{f}_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{e}_y = -\varrho \sin \varphi \vec{e}_x + \varrho \cos \varphi \vec{e}_y.$$

A zase algebra. Matice přechodu

$$D\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení  $\alpha : (\varrho, \varphi) \rightarrow (x, y) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)$  přiřazujícího polárním souřadnicím souřadnice kartézské. Tato matice je regulární pro všechny dvojice polárních souřadnic  $(\varrho, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ . Existuje k ní tedy matice inverzní. Jejím výpočtem se budeme zabývat ve cvičení.

Na základě analogie s vyjádřením kartézského plošného elementu zavedeme nyní *plošný element v polárních souřadnicích*. Vektorům  $\vec{f}_\varrho$  a  $\vec{f}_\varphi$  formálně doplníme nulovou  $z$ -ovou složku a určíme jejich vektorový součin. Platí

$$\vec{f}_\varrho \times \vec{f}_\varphi = \left( \frac{\partial x}{\partial \varrho}, \frac{\partial y}{\partial \varrho}, 0 \right) \times \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, 0 \right) = \left( 0, 0, \frac{\partial x}{\partial \varrho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varrho} \right) = (0, 0, \varrho).$$

Všimněme si, že jediná nenulová složka vektorového součinu  $\vec{f}_\varrho \times \vec{f}_\varphi$  je rovna determinantu Jacobiho matice (5.25). Plošný element můžeme zapsat takto:

$$dS_p = |\vec{f}_\varrho \times \vec{f}_\varphi| d\varrho d\varphi = |\det D\alpha| d\varrho d\varphi = \varrho d\varrho d\varphi.$$

Výsledek je shodný s odpovídajícím vztahem (5.22). Absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice se nazývá *jakobián*.

Tečné vektory k souřadnicovým křivkám ve válcových a kulových souřadnicích již teď vypočteme snadno a rychle podle předchozích návodů. Výpočet provedeme vždy rovnou v obecném bodě.

### Příklad 5.19: Tečné vektory k souřadnicovým křivkám — válcové souřadnice

Převod z válcových do kartézských souřadnic, tedy zobrazení

$$\alpha : (\varrho, \varphi, z) \rightarrow (x(\varrho, \varphi, z), y(\varrho, \varphi, z), z(\varrho, \varphi, z)),$$

je dán vztahy (5.9). Tečné vektory k souřadnicovým křivkám  $\mathcal{C}_\varrho$ ,  $\mathcal{C}_\varphi$  a  $\mathcal{C}_z$  jsou

$$\begin{aligned} \vec{f}_\varrho &= \left( \frac{\partial x}{\partial \varrho}, \frac{\partial y}{\partial \varrho}, \frac{\partial z}{\partial \varrho} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \vec{f}_\varphi &= \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0), \\ \vec{f}_z &= \left( \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) = (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (5.26)$$



Jacobiho matice a jakobián jsou

$$D\alpha = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha| = \varrho.$$

### Příklad 5.20: Tečné vektory k souřadnicovým křivkám — kulové souřadnice

Zobrazení  $\alpha$  určující převod z kulových do kartézských souřadnic,

$$\alpha : (r, \vartheta, \varphi) \longrightarrow (x(r, \vartheta, \varphi), y(r, \vartheta, \varphi), z(r, \vartheta, \varphi)),$$

je dáno vztahy (5.11). Tečné vektory k souřadnicovým křivkám  $\mathcal{C}_r$ ,  $\mathcal{C}_\vartheta$  a  $\mathcal{C}_\varphi$  jsou

$$\begin{aligned} \vec{f}_r &= \left( \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \\ \vec{f}_\vartheta &= \left( \frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \right) = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, -r \sin \vartheta), \\ \vec{f}_\varphi &= \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = (-r \sin \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, 0). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Jacobiho matice a jakobián jsou

$$D\alpha = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ r \cos \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \\ -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha| = r^2 \sin \vartheta.$$

Výsledky příkladů 5.19 a 5.20 jsou opět v souladu se vztahy (5.22), jestliže objemový element ve válcových, resp. kulových souřadnicích definujeme v analogii s objemovým elementem v souřadnicích kartézských, tj.

$$dV_v = \left| [\vec{f}_\varrho, \vec{f}_\varphi, \vec{f}_z] \right| d\varrho d\varphi dz, \quad dV_\kappa = \left| [\vec{f}_r, \vec{f}_\vartheta, \vec{f}_\varphi] \right| dr d\vartheta d\varphi.$$

Při výpočtu plošného, resp. objemového elementu v polárních, resp. válcových, či kulových souřadnicích je výhodné pracovat v obecném bodě s tzv. *pohyblivou bází* tvořenou tečnými vektory k souřadnicovým křivkám. Pomocí skalárního součinu snadno prověříte, že u všech typů křivočarých souřadnic, kterými se v tomto odstavci zabýváme, jsou každé dva vektory této „pohyblivé“ báze ve všech případech kolmé. Proto se také polárním, válcovým a kulovým souřadnicím říká *ortogonální*. Vektory pohyblivé báze ale nejsou obecně jednotkové, což může být při některých výpočtech nevýhodné. Bude proto užitečné vedle báze s různě dlouhými vektory zavést i odpovídající bázi ortonormální. Ta bude tvořena jednotkovými vektory souhlasně rovnoběžnými s tečnými vektory k souřadnicovým křivkám. Dejme tomu, že souřadnicová křivka má parametrické vyjádření

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t)).$$

Její tečný vektor je dán vztahem (5.23). Odpovídající jednotkový vektor je

$$\vec{e}_C = \frac{1}{\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2}} (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

Velikost vektoru  $h_C = |\vec{f}_C|$  se nazývá *Laméův koeficient*. Při tomto označení můžeme psát  $\vec{f}_C = h_C \vec{e}_C$ .

### Příklad 5.21: Laméovy koeficienty polárních, válcových a kulových souřadnic

Výpočet Laméových koeficientů je jen rutina. Pro polární souřadnice platí

$$h_\varrho = 1, \quad h_\varphi = \varrho,$$

pro válcové

$$h_\varrho = 1, \quad h_\varphi = \varrho, \quad h_z = 1,$$

a konečně pro kulové

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = r \sin \vartheta.$$

### Příklad 5.22: Co když bude tečný vektor nulový?

Bude pak nulový také objemový element? A Jacobiho matice bude singulární? Může v nějakém bodě tato situace nastat? Vnímavý čtenář si jistě všiml, že za vztahem (5.25) jsme se zmínili o regularitě Jacobiho matice pro  $\varrho$  z *otevřeného* intervalu  $(0, \infty)$ . Přitom v předchozím textu jsme měli interval zleva uzavřený (nulová hodnota souřadnice  $\varrho$  odpovídala počátku soustavy souřadnic). Že by nám tento bod „zavazal“?

Opravdu je tomu tak: Vypočteme-li tečný vektor  $\vec{f}_\varphi$  podle vztahu (5.24) pro  $\varrho = 0$  a libovolné  $\varphi$ , dostaneme nulový vektor. Druhý řádek Jacobiho matice (5.25) je také nulový, matice je singulární. Pochopitelně je nulový také objemový element, jakobián a Laméův koeficient  $h_\varphi$ .

Příčinou tohoto problému je skutečnost, že převod do polárních souřadnic není vzájemně jednoznačným zobrazením, jak bychom si přáli. Ze vztahu 5.5 vidíme, že nekonečně mnoha dvojicím  $(\varrho, \varphi)$ , kde  $\varrho = 0$  a  $\varphi$  je libovolné, je přiřazen tentýž bod v kartézských souřadnicích — počátek soustavy souřadnic  $(x, y) = (0, 0)$ . Naopak ve vztahu 5.6 opačný převod „nefunguje“ (inverzní zobrazení v počátku soustavy souřadnic neexistuje, úhel  $\varphi$  není definován).

Situaci napravíme tím, že počátek soustavy souřadnic, tj. hodnotu  $\varrho = 0$ , vynecháme z našich úvah. Po tomto omezení se převod z polárních do kartézských souřadnic  $\alpha : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  stane vzájemně jednoznačným zobrazením a existuje k němu zobrazení inverzní  $\alpha^{-1} : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ . Tečné vektory jsou potom ve všech bodech nenulové a Jacobiho matice regulární. Nebudeme však vynechaný bod postrádat při výpočtech objemů v polárních souřadnicích? Pomocí pokročilejšího matematického aparátu lze ukázat, že porušení regularity Jacobiho matice v jednom jediném bodě výsledek výpočtů neovlivní.

Na podobný problém narazíme také u válcových, resp. kulových souřadnic. Rozmyslete si sami (s využitím vztahů (5.26) a (5.27)), které body porušují regularitu Jacobiho matice a nenulovost tečných vektorů (ale pozor — je jich nekonečně mnoho, tvoří celou přímku). Jak musíme omezit intervaly pro válcové, resp. kulové souřadnice, aby převod do kartézských souřadnic byl vzájemně jednoznačným zobrazením? Množina bodů, které porušují regularitu Jacobiho matice, je však v  $\mathbf{R}^3$  naštěstí opět „zanedbatelná“ z hlediska našich výpočtů.

### 5.2.5 Elementární délka

V prvním dílu knihy jsme se v odstavcích 2.3.5 a 2.3.6 naučili počítat pomocí křivkového integrálu prvního druhu délku, hmotnost a další charakteristiky křivky  $\mathcal{C}$ , která byla zadána v kartézských souřadnicích parametrickým vyjádřením. Vycházeli jsme při tom z *kartézského elementu délky*  $d\ell$ , resp. z jeho kvadrátu  $(d\ell)^2$ . Ten jsme při jistém dělení  $D$  intervalu parametrů vyjádřili nejprve přibližně, náhradou skutečné délky oblouku mezi dvěma sousedními body, vzniklými na křivce volbou dělení, délkou malé úsečky spojující tyto dva body. Pak jsme provedli limitní přechod normy dělení  $\nu(D)$  k nule (vztah (2.62)). Vzpomínáte si? Připomeneme tento postup, ale jen „z rychlíku“. Výsledek použijeme jako východisko pro výpočet elementu délky rovinné křivky, která bude zadána v polárních souřadnicích, resp. prostorové křivky zadané v souřadnicích válcových nebo kulových. Zvolme na křivce  $\mathcal{C}$  v  $\mathbf{R}^2$  dva blízké body o souřadnicích  $(x, y)$  a  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Délka úsečky, která body spojuje a přibližně nahrazuje délku  $\Delta\ell$  skutečného oblouku křivky mezi nimi, je

$$\Delta\ell \doteq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \implies (\Delta\ell)^2 \doteq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Po provedení limitního přechodu  $\nu(D) \rightarrow 0$  zapisujeme element délky, resp. jeho kvadrát, ve tvaru

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad \text{resp.} \quad (d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Pracovat s kvadrátem bude pro další počítání pohodlnější, nemusíme se „vláčet“ s odmocninou. Při použití polárních souřadnic platí  $x(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi$ ,  $y(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi$ . Naším úkolem nyní bude vyjádřit element délky křivky pomocí změn polárních souřadnic  $\Delta\varrho$  a  $\Delta\varphi$ , resp.  $d\varrho$  a  $d\varphi$ , místo změn kartézských souřadnic  $\Delta x$  a  $\Delta y$ , resp.  $dx$  a  $dy$ . Nejrychleji by se nám takové vyjádření povedlo, kdybychom již měli k dispozici pojem úplného diferenciálu funkce více proměnných, v tomto případě dvou. Ale bohužel nemáme, musíme si počkat na devátou kapitolu. Použití pojmu úplného diferenciálu však dokážeme obejít — sice možná trochu složitěji, ale pomůžeme si. Potřebnou „okliku“ ukážeme v následujícím příkladu.

#### Příklad 5.23: Délkový element v polárních souřadnicích

Je-li křivka vyjádřena parametricky v polárních souřadnicích, jsou polární souřadnice bodů na ní funkcemi nějakého parametru  $t$ , tedy  $\varrho = \varrho(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Kartézské souřadnice  $x$  a  $y$  jsou pak také funkcemi parametru  $t$ , a to prostřednictvím funkcí  $\varrho(t)$  a  $\varphi(t)$ , tj.

$$x(t) = \varrho(t) \cos \varphi(t), \quad y(t) = \varrho(t) \sin \varphi(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Teď už máme co do činění s funkcemi jedné proměnné  $t$ , i když jsou to funkce složené. Pro určení jejich diferenciálů, vyjadřujících jejich přírůstky tím přesněji, čím je menší přírůstek proměnné, použijeme vztah (2.26) z odstavce 2.2.3 prvního dílu:

$$\begin{aligned} dx(t) &= \dot{x}(t) dt = [\dot{\varrho}(t) \cos \varphi(t) - \varrho(t) \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t)] dt, \\ dy(t) &= \dot{y}(t) dt = [\dot{\varrho}(t) \sin \varphi(t) + \varrho(t) \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t)] dt. \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si, že výrazy  $\dot{\varrho}(t) dt$  a  $\dot{\varphi}(t) dt$  jsou diferenciály funkcí  $\varrho(t)$  a  $\varphi(t)$ , dostaneme již snadno

$$\begin{aligned} dx(t) &= \cos \varphi(t) d\varrho(t) - \varrho(t) \sin \varphi(t) d\varphi(t), \\ dy(t) &= \sin \varphi(t) d\varrho(t) + \varrho(t) \cos \varphi(t) d\varphi(t). \end{aligned}$$

Nebudeme-li již vypisovat závislost na parametru  $t$ , jehož volba je úplně libovolná, zápis se zjednoduší takto:

$$dx = \cos \varphi d\varrho - \varrho \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi d\varrho + \varrho \cos \varphi d\varphi. \quad (5.28)$$

Pro délkový element pak platí (z cvičných důvodů proveďte výpočet podrobně)

$$\begin{aligned} (d\ell)^2 &= (\cos \varphi d\varrho - \varrho \sin \varphi d\varphi)^2 + (\sin \varphi d\varrho + \varrho \cos \varphi d\varphi)^2, \\ (d\ell)^2 &= (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\varphi)^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Všimněme si vztahů (5.28) pro  $dx$  a  $dy$ . Vypíšeme koeficienty u  $d\varrho$  a  $d\varphi$  do matice:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme transponovanou matici k Jacobiho matici (5.25). A ještě něco: Koeficienty u  $(d\varrho)^2$  a  $(d\varphi)^2$  ve vyjádření délkového elementu (5.29) jsou druhé mocniny Laméových koeficientů. Kvadrát délkového elementu bychom tedy mohli zapsat ve tvaru  $(d\ell)^2 = h_\varrho^2 (d\varrho)^2 + h_\varphi^2 (d\varphi)^2$ . Je to všechno náhoda?

Je to všechno náhoda? Jistěže není — to je odpověď na otázku, kterou jsme uzavřeli příklad 5.23. „Okliku“ při výpočtu elementu délky v polárních souřadnicích, kterou jsme použili v příkladu 5.23, nyní zobecníme tak, že budeme pracovat s obecnými funkčními závislostmi  $x = x(\varrho, \varphi)$ ,  $y = y(\varrho, \varphi)$  a obecným parametrickým vyjádřením  $\varrho = \varrho(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Vyjádření  $x$  a  $y$  pomocí polárních souřadnic dosadíme až do výsledku.

Parametrické vyjádření křivky v kartézských souřadnicích je dáno složenými funkcemi jedné proměnné  $t$

$$x(t) = x(\varrho(t), \varphi(t)), \quad y(t) = y(\varrho(t), \varphi(t)).$$

Každá z nich má vnější složku ( $x$ , resp.  $y$ ) závislou na dvou proměnných  $\varrho$  a  $\varphi$ . Ty jsou funkcemi jediné proměnné, parametru  $t$ . V odstavci 5.2.3, konkrétně v příkladu 5.12, jsme zkoumali pravidlo pro parciální derivování složené funkce, kde vnější složka i vnitřní složky byly funkcemi vždy dvou proměnných. Toto pravidlo můžeme aplikovat i na případ, kdy vnitřní složky, a tím i složená funkce, závisí pouze na jedné proměnné. Jedinou změnou bude to, že jednu proměnnou vypustíme a místo parciálních derivací složené funkce budeme počítat derivaci obyčejnou.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left. \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} \right|_{(\varrho(t), \varphi(t))} \cdot \dot{\varrho}(t) + \left. \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{(\varrho(t), \varphi(t))} \cdot \dot{\varphi}(t), \\ \dot{y}(t) &= \left. \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} \right|_{(\varrho(t), \varphi(t))} \cdot \dot{\varrho}(t) + \left. \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{(\varrho(t), \varphi(t))} \cdot \dot{\varphi}(t). \end{aligned}$$

Pro diferenciály funkcí  $\varrho(t)$  a  $\varphi(t)$  jedné proměnné  $t$  opět použijeme známých vztahů vycházejících ze vzorce (2.26) v prvním dílu,  $d\varrho(t) = \dot{\varrho}(t) dt$  a  $d\varphi(t) = \dot{\varphi}(t) dt$ . Pro diferenciály funkcí  $x(t)$  a  $y(t)$  tak dostaneme, již bez vypisování proměnné  $t$ ,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial x(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi d\varrho - \varrho \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial y(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi d\varrho + \varrho \cos \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Asi nás nepřekvapí, že jsme po obecném výpočtu dostali dosazením konkrétního vyjádření kartézských souřadnic pomocí polárních vztahu (5.28).

*Pozn.:* Všimněte si souvislosti vztahů (5.28) se vztahy uvedenými za vzorci (5.24). V obou případech jde o lineární kombinace. Tečné vektory k polárním souřadnicovým křivkám jsou lineární kombinace vektorů tečných ke kartézským souřadnicovým přímkám, koeficienty lineární kombinace jsou prvky Jacobiho matice přechodu od polárních ke kartézským souřadnicím  $D\alpha$ . Diferenciály kartézských souřadnic jsou lineárními kombinacemi diferenciálů polárních souřadnic. Koeficienty jsou prvky transponované matice k matici  $D\alpha$ .

Pomocí  $dx$  a  $dy$  daných obecnější částí vztahů (5.30), tj. ještě před dosazením konkrétního vyjádření parciálních derivací, zapíšeme nyní kvadrát elementu délky křivky,

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 = \\ &= \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varrho} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varrho} \right)^2 \right] (d\varrho)^2 + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \varrho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varrho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) d\varrho d\varphi + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] (d\varphi)^2. \end{aligned}$$

Zajímavé jsou koeficienty u výrazů  $(d\varrho)^2$ ,  $d\varrho d\varphi$  a  $(d\varphi)^2$ . Hned je vidět jejich souvislost s tečnými vektory  $\vec{f}_\varrho$  a  $\vec{f}_\varphi$  (viz (5.24)). Jsou to jejich všechny možné skalární součiny. Kvadrát délkového elementu tak můžeme zapsat ve tvaru

$$(dl)^2 = (\vec{f}_\varrho \vec{f}_\varrho) (d\varrho)^2 + 2(\vec{f}_\varrho \vec{f}_\varphi) d\varrho d\varphi + (\vec{f}_\varphi \vec{f}_\varphi) (d\varphi)^2 = h_\varrho^2 (d\varrho)^2 + h_\varphi^2 (d\varphi)^2. \quad (5.31)$$

Při poslední úpravě jsme využili jednak kolmosti vektorů  $\vec{f}_\varrho$  a  $\vec{f}_\varphi$ , jednak definice Laméových koeficientů (jsou to velikosti vektorů  $\vec{f}_\varrho$ , resp.  $\vec{f}_\varphi$ ).

#### **Příklad 5.24:** Maticový zápis délkového elementu

Následující zápis kvadrátu délkového elementu by vám mohl připadat jako formální hříčka milovníka algebraického formalismu. Ve skutečnosti však má značnou obsahovou hloubku. Podstatu problému a jeho těsnou souvislost s algebrou a geometrií zde sice vysvětlovat nemůžeme, ale zájemcům, kteří se v budoucnu při podrobnějším studiu algebraických a geometrických objektů s tímto zápisem setkají, může pomoci, že již na něj kdysi,

při zcela elementárních a názorných úvahách, narazili. Vztah (5.31) lze formálně zapsat pomocí maticového násobení:

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= (d\varrho \quad d\varphi) \begin{pmatrix} \vec{f}_\varrho \vec{f}_\varrho & \vec{f}_\varrho \vec{f}_\varphi \\ \vec{f}_\varphi \vec{f}_\varrho & \vec{f}_\varphi \vec{f}_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varrho \\ d\varphi \end{pmatrix} = (d\varrho \quad d\varphi) G \begin{pmatrix} d\varrho \\ d\varphi \end{pmatrix}, \\ (dl)^2 &= (d\varrho \quad d\varphi) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varrho \\ d\varphi \end{pmatrix} = (d\varrho \quad d\varphi) (D\alpha)(D\alpha)^T \begin{pmatrix} d\varrho \\ d\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matice  $G = (D\alpha)(D\alpha)^T$  má velkou důležitost i pro jiné výpočty než jen pro vyjádření délkového elementu, například pro výpočty ploch. Můžeme ji vyjádřit také pomocí Laméových koeficientů,

$$G = \begin{pmatrix} \vec{f}_\varrho \vec{f}_\varrho & \vec{f}_\varrho \vec{f}_\varphi \\ \vec{f}_\varphi \vec{f}_\varrho & \vec{f}_\varphi \vec{f}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_\varrho^2 & 0 \\ 0 & h_\varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Za chvíli ukážeme, že matice  $G$  utvořená ze skalárních součinů tečných vektorů souřadnicových křivek „funguje“ při vyjádření délkového elementu obecně v jakýchkoli souřadnicích, nejen v polárních, a že v případě ortogonálních souřadnic ji lze také sestavit z Laméových koeficientů.

Nyní již jistě budeme schopni zobecnit předchozí podrobné úvahy, které jsme vedli pro délkový element rovinné křivky zapsané v polárních souřadnicích, i na křivku prostorovou v souřadnicích válcových nebo kulových. Jednoduše přepíšeme vztahy (5.30) pro tyto případy.

### Příklad 5.25: Délkový element ve válcových souřadnicích

Pro případ prostorové křivky a válcových souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z} dz = \cos \varphi d\varrho - \varrho \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z} dz = \sin \varphi d\varrho + \varrho \cos \varphi d\varphi, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} dz = dz, \end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2 = \\ &= h_\varrho^2 (d\varrho)^2 + h_\varphi^2 (d\varphi)^2 + h_z^2 (dz)^2. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Zápis pomocí matice  $G$  je

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= (d\varrho \quad d\varphi \quad dz) \begin{pmatrix} \vec{f}_\varrho \vec{f}_\varrho & 0 & 0 \\ 0 & \vec{f}_\varphi \vec{f}_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \vec{f}_z \vec{f}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varrho \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix} = \\ &= (d\varrho \quad d\varphi \quad dz) \begin{pmatrix} h_\varrho^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varrho \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix} = (d\varrho \quad d\varphi \quad dz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varrho \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Příklad 5.26: Délkový element v kulových souřadnicích**

Pro případ prostorové křivky a kulových souřadnic dostaneme analogickým postupem jako v příkladu 5.25,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} (d\ell)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 = \\ &= h_r^2 (dr)^2 + h_\vartheta^2 (d\vartheta)^2 + h_\varphi^2 (d\varphi)^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Zápis pomocí matice  $G$  je

$$\begin{aligned} (d\ell)^2 &= (dr \ d\vartheta \ d\varphi) \begin{pmatrix} \vec{f}_r \vec{f}_r & 0 & 0 \\ 0 & \vec{f}_\vartheta \vec{f}_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \vec{f}_\varphi \vec{f}_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix} = \\ &= (dr \ d\vartheta \ d\varphi) \begin{pmatrix} h_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_\vartheta^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_\varphi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix} = (dr \ d\vartheta \ d\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Příklad 5.27: Praktický výpočet délky křivky**

Použití délkového elementu u křivočarých souřadnic pro výpočet délky oblouku křivky ukážeme na jednoduchém příkladu, u kterého víme, jak musí výsledek dopadnout. Tak třeba půlkružnice — každý ví, že její délka je  $\pi R$ , je-li  $R$  její poloměr. Jak se ale k tomuto výsledku dopracujeme? Jednoduše „sečteme“ délkové elementy integrálem. Zkusme to nejprve v kartézských souřadnicích. Rovnice půlkružnice v horní polorovině roviny  $\mathbf{R}^2$  je

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \implies y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad x \in (-R, R).$$

Můžeme to považovat i za parametrické vyjádření půlkružnice s tím, že proměnnou  $x$  bereme jako parametr. Vyjádříme délkový element a vypočteme délku křivky pomocí křivkového integrálu prvního druhu (viz odstavec 2.3.5).

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} d\ell = \int_{-R}^R \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_{-R}^R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = \int_{-R}^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx.$$

Substituce  $x = R \cos u$  vede k očekávanému výsledku

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_{\pi}^0 \frac{R}{R|\sin u|} (-R \sin u) du = \pi R.$$

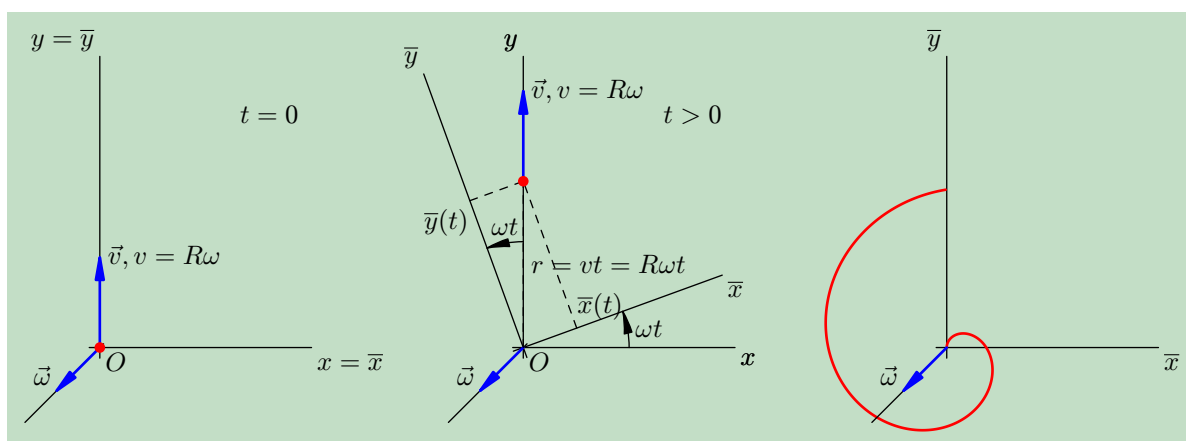
Rychleji však tento výsledek získáme, použijeme-li souřadnice, které lépe vystihují tvar křivky, jejíž délku počítáme — jde samozřejmě o souřadnice polární. Polární rovnice kružnice (nebo její části) o poloměru  $R$  je

$\varrho = R$ , tj.  $d\varrho = 0$ . Dosadíme-li do výrazu pro délkový element (5.29) a integrujeme přes proměnnou  $\varphi$  v mezích  $[0, \pi]$ , dostaneme okamžitě

$$\ell = \int_0^{\pi} R d\varphi = \pi R.$$

### Příklad 5.28: Délka trajektorie částice na točně

A nebo jiný příklad, jehož výsledek není na první pohled jasný. Křivka  $\mathcal{C}$  s parametrickým vyjádřením  $\bar{x}(t) = R\omega t \sin \omega t$ ,  $\bar{y}(t) = R\omega t \cos \omega t$  představuje docela zajímavou trajektorii částice. Takovou stopu by totiž na točně rotující rovnoměrně úhlovou rychlostí  $\omega$  „nakreslila“ částice, která by se pohybovala rovnoměrně podél osy  $y$  v pevné soustavě souřadnic rychlostí o velikosti  $v = R\omega$  (obrázek 5.13). Přesvědčme se, že tomu tak



Obr. 5.13 Částice na točně.

opravdu je. Dejme tomu, že v okamžiku  $t = 0$  částice právě prošla počátkem soustavy souřadnic a že v tomto okamžiku souřadnicové osy na točně  $\bar{x}$ , resp.  $\bar{y}$  splývaly se souřadnicovými osami pevné soustavy  $x$ , resp.  $y$ . V okamžiku  $t$  je částice na ose  $y$  ve vzdálenosti  $vt = R\omega t$  od počátku. Promítnutím jejího polohového vektoru  $\vec{r}(t)$  do os  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$  zjistíme jeho složky vzhledem k rotující soustavě souřadnic pevně spojené s točnou. Jsou skutečně rovny  $\bar{x}(t) = R\omega t \sin \omega t$  a  $\bar{y}(t) = R\omega t \cos \omega t$ . Označíme-li  $\varrho(t) = R\omega t$  a  $\varphi(t) = \omega t$ , máme parametrické vyjádření trajektorie v polárních souřadnicích. Platí

$$\begin{aligned} \bar{x} &= R\varphi \sin \varphi, & \bar{y} &= R\varphi \cos \varphi \implies \\ \implies \varrho^2 &= \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = R^2\varphi^2 \implies \varrho = R\varphi. \end{aligned}$$

A to je polární rovnice trajektorie, nazývané Archimédova spirála. Element délky je podle vztahu (5.29) roven

$$d\ell = \sqrt{(d\varrho)^2 + \varrho^2(d\varphi)^2} = \sqrt{R^2(d\varphi)^2 + R^2\varphi^2(d\varphi)^2} = R\sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi.$$

Odtud pro otočení točny například o  $360^\circ$  vyjde, při substituci  $\varphi = \sinh u$ ,

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = R \int_0^U \cosh^2 u du = R \int_0^U \frac{1 + \cosh 2u}{2} du = R \left[ \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sinh 2u \right]_0^U,$$

kde  $U = \ln \left( 2\pi + \sqrt{(2\pi)^2 + 1} \right)$ .



## 5.2.6 Cvičení

1. Bod  $P \in \mathbf{R}^2$  je zadán svými kartézskými souřadnicemi. Určete jeho souřadnice polární. Určete složky tečných vektorů  $\vec{f}_{\rho,P}$ ,  $\vec{f}_{\varphi,P}$  v bodě  $P$  vzhledem k bázi  $\vec{e}_{x,P}$ ,  $\vec{e}_{y,P}$  a vyjádřete polární plošný element v bodě  $P$ :
  - a)  $P = (x_P, y_P) = (4, 3)$ ,
  - b)  $P = (x_P, y_P) = (5, -12)$ .
2. Bod  $P \in \mathbf{R}^2$  je zadán svými polárními souřadnicemi. Určete jeho souřadnice kartézské:
  - a)  $P = (\rho_P, \varphi_P) = (8, \frac{7\pi}{6})$ ,
  - b)  $P = (\rho_P, \varphi_P) = (13, \frac{5\pi}{3})$ .
3. Zapište kartézské rovnice souřadnicových křivek  $C_{\rho,P}$  a  $C_{\varphi,P}$  procházejících bodem  $P$  pro každý z bodů  $P$  v úlohách 1 a 2.
4. Zapište kartézské rovnice souřadnicových ploch  $S_{\rho,P}$ ,  $S_{\varphi,P}$ ,  $S_{z,P}$  a kartézské rovnice souřadnicových křivek  $C_{\rho,P}$ ,  $C_{\varphi,P}$ ,  $C_{z,P}$  procházejících bodem  $P = (\rho_P, \varphi_P, z_P) = (2, \pi, -1)$  ve válcových souřadnicích.
5. Zapište polární i kartézskou rovnici elipsy, pro niž  $a = 5$  cm,  $\epsilon = 0,8$  a jejíž pravé ohnisko  $F$  leží v počátku soustavy souřadnic. Osy elipsy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic.
- \*6. a) Odvoďte polární rovnici paraboly, jejíž ohnisko  $F$  leží v počátku soustavy souřadnic a jejíž osa splývá s osou  $x$ . Zapište i její kartézskou rovnici.
  - b) Odvoďte polární rovnici hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic a hlavní osou rovnoběžnou s osou  $x$ . Zapište její kartézskou rovnici.
7. Určete inverzní matice k Jacobiho maticím přechodu od polárních souřadnic ke kartézským, od válcových ke kartézským a od kulových ke kartézským. Určete také obor jejich existence.
8. Zobecněné polární souřadnice  $\rho$ ,  $\varphi$  v  $\mathbf{R}^2$  jsou definovány vztahy  $x = a\rho \cos \varphi$ ,  $y = b\rho \sin \varphi$ , kde  $a, b$  jsou kladné konstanty,  $\rho \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Určete  $\rho$  a  $\varphi$  jako funkce  $x$  a  $y$ . Zapište souřadnicové křivky (kartézské rovnice), Jacobiho matici a jakobián. Určete Jacobiho matici a jakobián inverzní transformace. Zdůvodněte, proč je interval proměnné  $\rho$  otevřený.
9. Zobecněné kulové souřadnice  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$  v  $\mathbf{R}^3$  jsou definovány vztahy  $x = ar \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $y = br \sin \varphi \sin \vartheta$ ,  $z = cr \cos \vartheta$ , kde  $a, b, c$  jsou kladné konstanty,  $r \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $\vartheta \in (0, \pi)$ . Určete  $r$ ,  $\varphi$  a  $\vartheta$  jako funkce  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Zapište souřadnicové křivky a souřadnicové plochy (kartézské rovnice), Jacobiho matici a jakobián. Určete Jacobiho matici a jakobián inverzní transformace. Zdůvodněte, proč jsou intervaly proměnných  $r$  a  $\vartheta$  otevřené.
10. Vypočtete parciální derivace  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$  a  $f_{xy}$  pro následující funkce:
  - a)  $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,
  - b)  $f = (y^2 + 1)^x$ ,
  - c)  $f = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{x}}$ ,
  - d)  $f = \ln(x^2 + y^2)$ ,
  - e)  $f = x \sin y + y \sin x$ ,
  - f)  $f = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ .
11. Uvažujme o složené funkci  $Z(x, y) = z(t(x, y), s(x, y))$ . Převedte následující výraz  $R$ , obsahující proměnné  $x$  a  $y$ , do nových proměnných  $t$  a  $s$ :
  - a)  $R = 2xZ_{xx} - 2Z_{yy} + Z_x$ , kde  $t = y + 2\sqrt{x}$ ,  $s = y - 2\sqrt{x}$ ,
  - b)  $R = Z_{xx} + Z_{yy}$ , kde  $x = t \cos s$ ,  $y = t \sin s$ ,
  - c)  $R = xZ_{xx} - yZ_{yy}$ , kde  $t = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ ,  $s = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ,
  - d)  $R = x^2(Z_{xx} - Z_{xy}) + y^2(Z_{yy} - Z_{xy})$ , kde  $t = x + y$ ,  $s = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

12. Je dána funkce  $f(x, y) = F[\varrho(x, y), \varphi(x, y)]$ , kde  $\varrho(x, y)$  a  $\varphi(x, y)$  jsou dány vztahy (5.6) (převod z kartézských do polárních souřadnic). Vypočtěte  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  v proměnných  $\varrho$  a  $\varphi$ .
- \*13. Pro funkci  $f(x, y, z)$  vyjádřete výraz  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  ve válcových souřadnicích a v kulových souřadnicích.

## 5.3 Obecné souřadnice

V předchozích odstavcích jsme na podrobně rozebraných příkladech nepoužívanějších typů křivočarých souřadnic fakticky již ukázali, jaký bude postup při práci s obecnými křivočarými souřadnicemi v rovině či prostoru. Tento postup nyní jen použijeme — už skoro bez práce.

### 5.3.1 Souřadnicové křivky a plochy

Budeme vycházet z předpokladu, že na nějakém definičním oboru  $D_\alpha \subset \mathbf{R}^2$ , resp.  $D_\alpha \subset \mathbf{R}^3$ , obvykle kartézském součinu dvou, resp. tří otevřených, nebo uzavřených intervalů, je zadána *transformace souřadnic*

$$\begin{aligned} \alpha : D_\alpha \ni (u, v) &\longrightarrow (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbf{R}^2, \quad \text{resp.} \\ \alpha : D_\alpha \ni (u, v, w) &\longrightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbf{R}^3, \end{aligned} \quad (5.36)$$

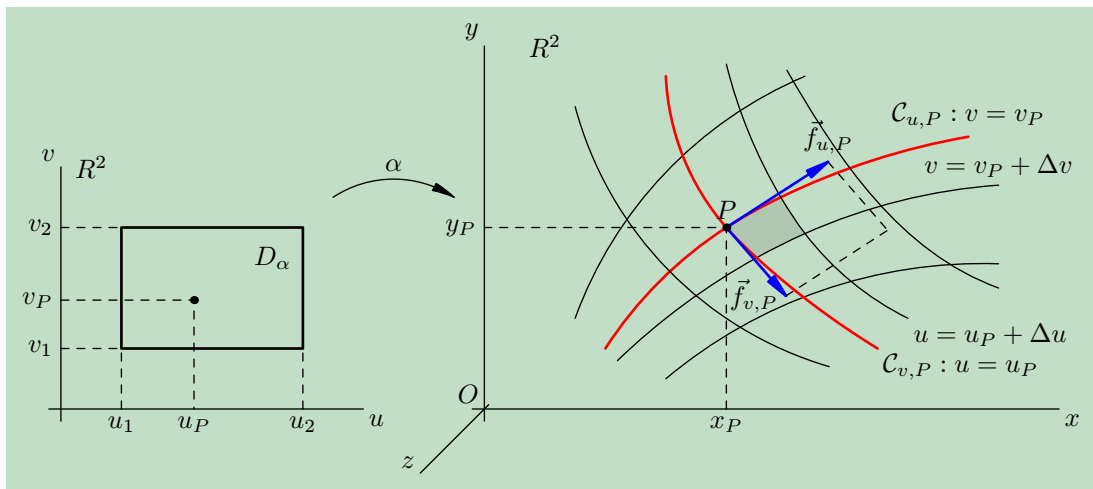
kteřá je prostým zobrazením, tj. každý obraz  $(x, y)$ , resp.  $(x, y, z) \in H_\alpha$  z oboru hodnot zobrazení  $\alpha$  má právě jeden vzor  $(u, v)$ , resp.  $(u, v, w) \in D_\alpha$ . Tento předpoklad zajistí, že se nedostaneme do problémů popsanych v příkladu 5.22. Dále předpokládejme, že existují spojité parciální derivace všech funkcí  $x, y$ , resp.  $z$  podle všech proměnných  $u, v$ , resp.  $w$ . Obdobně jako u polárních, válcových a kulových souřadnic můžeme i v takovém obecném případě vyslovit následující definici.

*Jacobiho maticí zobrazení  $\alpha$  nazveme matici*

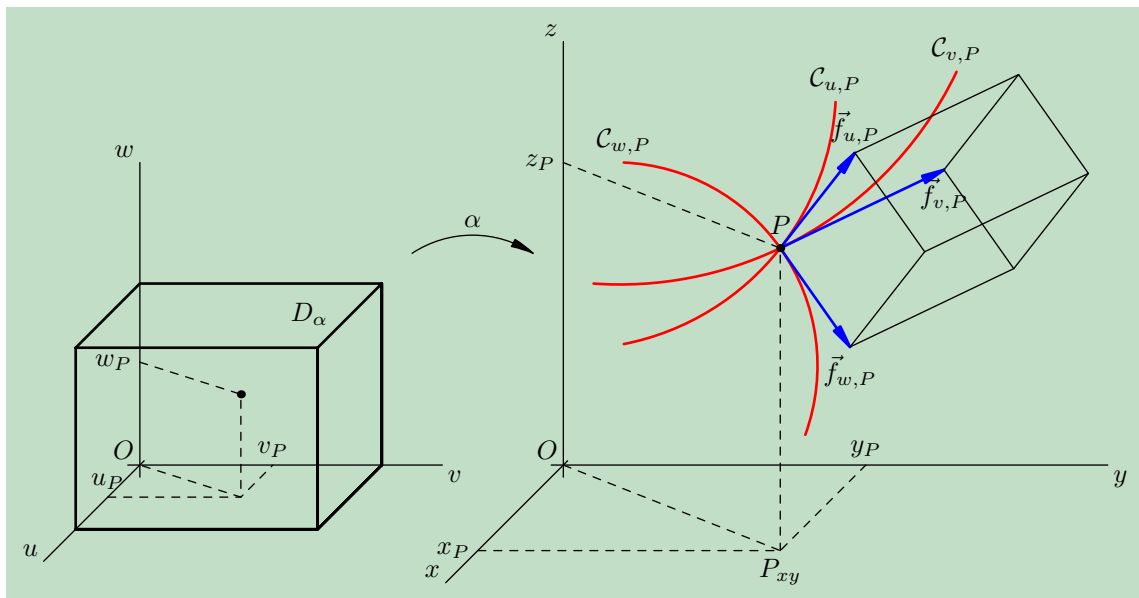
$$D\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad D\alpha(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Tato matice je regulární. (Víte, který z předpokladů o zobrazení  $\alpha$  to zaručuje?) Absolutní hodnota jejího determinantu je *jakobián*. Proměnné  $u, v$ , resp.  $w$  se nazývají *křivočaré souřadnice*.

Obdobně jako u polárních, resp. válcových a kulových souřadnic můžeme i u obecných křivočarých souřadnic proložit každým bodem  $P$  v rovině, resp. prostoru *souřadnicové plochy*



Obr. 5.14 Souřadnicové křivky v rovině.



Obr. 5.15 Souřadnicové křivky v prostoru.

a *souřadnicové křivky*. Podél souřadnicových křivek v  $\mathbf{R}^2$  a souřadnicových ploch v  $\mathbf{R}^3$  zůstává konstantní jedna z křivočarých souřadnic, podél souřadnicových křivek v  $\mathbf{R}^3$  dvě.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{u,P} &= \{\alpha(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid v = v_P, (u, v_P) \in D_\alpha\}, \\ \mathcal{C}_{v,P} &= \{\alpha(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u = u_P, (u_P, v) \in D_\alpha\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

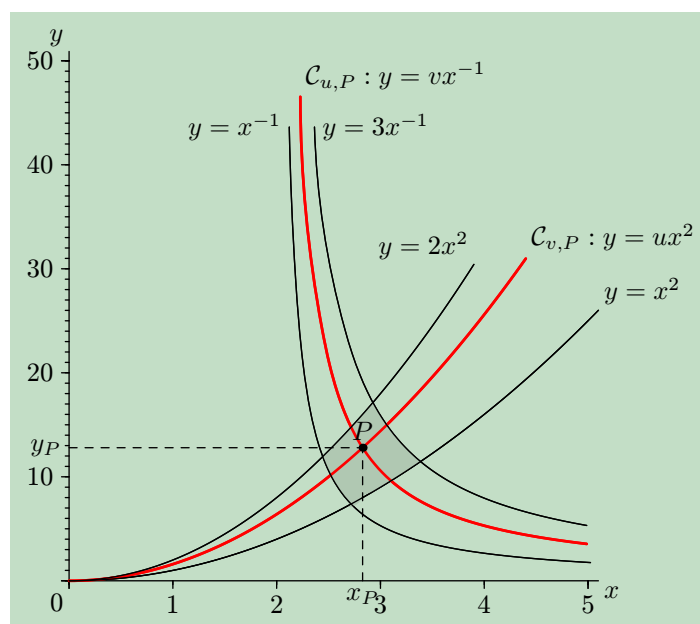
$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{u,P} &= \{\alpha(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid u = u_P, (u_P, v, w) \in D_\alpha\}, \\
\mathcal{S}_{v,P} &= \{\alpha(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid v = v_P, (u, v_P, w) \in D_\alpha\}, \\
\mathcal{S}_{w,P} &= \{\alpha(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid w = w_P, (u, v, w_P) \in D_\alpha\}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\mathcal{C}_{u,P} = \mathcal{S}_{v,P} \cap \mathcal{S}_{w,P}, \quad \mathcal{C}_{v,P} = \mathcal{S}_{u,P} \cap \mathcal{S}_{w,P}, \quad \mathcal{C}_{w,P} = \mathcal{S}_{u,P} \cap \mathcal{S}_{v,P}. \tag{5.40}$$

Případ souřadnicových křivek v rovině, resp. v prostoru je schematicky znázorněn na obrázku 5.14, resp. 5.15.

### Příklad 5.29: Paraboly a hyperboly jako souřadnicové křivky

Představme si rovinný útvar omezený parabolami  $y = x^2$  a  $y = 2x^2$  a hyperbolami  $y = x^{-1}$  a  $y = 3x^{-1}$  (obrázek 5.16). Každým bodem tohoto útvaru můžeme proložit jednu parabolu  $y = ux^2$ ,  $u \in [1, 2]$ , a jednu



Obr. 5.16 K příkladu 5.29.

hyperbolu  $y = vx^{-1}$ ,  $v \in [1, 3]$ . Jsou to „budoucí“ souřadnicové křivky transformace souřadnic

$$\alpha : D_\alpha = [1, 2] \times [1, 3] \ni (u, v) \longrightarrow \alpha(u, v) = (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Rovnice zobrazení  $\alpha$  získáme z rovnice paraboly a hyperboly procházejících obecným bodem,

$$y = ux^2, \quad y = vx^{-1} \implies x(u, v) = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \quad y(u, v) = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$

Jacobiho matice a jakobián tohoto zobrazení jsou

$$D\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha| = \frac{1}{3}u^{-1}.$$

A ještě bychom měli vypočítat tečné vektory k souřadnicovým křivkám. Budeme je potřebovat pro získání plošného elementu. A musíme vůbec něco počítat? Z úvah o polárních souřadnicích víme, že složky tečných vektorů  $\vec{f}_\rho$  a  $\vec{f}_\varphi$  umístěných v obecném bodě tvořily řádky Jacobiho matice. Tak tomu samozřejmě je i v obecném případě. Je tedy

$$\begin{aligned} \vec{f}_u &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right), \quad \vec{f}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right), \quad \text{tj.} \\ \vec{f}_u &= \left( -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} \right), \quad \vec{f}_v = \left( \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \right). \end{aligned}$$

Přidáme-li jim nulovou  $z$ -ovou složku, můžeme spočítat jejich vektorový součin. Jeho velikost je  $\frac{1}{3}u^{-1}$ , je tedy rovna jakobiánu transformace. To nás ale jistě nijak nepřekvapuje.

### 5.3.2 Elementární plocha a objem

Elementární plochu a elementární objem vyjádříme pomocí tečných vektorů k souřadnicovým křivkám, stejně jako u polárních, válcových a kulových souřadnic:

$$\vec{f}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right), \quad \vec{f}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right), \quad (5.41)$$

$$\vec{f}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \vec{f}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right), \quad \vec{f}_w = \left( \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w} \right). \quad (5.42)$$

Elementární plocha a elementární objem jsou

$$\begin{aligned} dS_\alpha &= |\vec{f}_u \times \vec{f}_v| du dv = |\det D\alpha| du dv, \\ dV_\alpha &= |[\vec{f}_u, \vec{f}_v, \vec{f}_w]| du dv dw = |\det D\alpha| du dv dw. \end{aligned} \quad (5.43)$$

#### Příklad 5.30: Výpočet obsahu rovinné plochy

Pomocí plošného elementu vypočteme obsah útvaru z příkladu 5.29. Integrálem musíme „sečíst“ plošné elementy, které jsou pro náš případ tvaru  $\frac{1}{3}u^{-1} du dv$ . Provedeme to obdobně jako v příkladu 5.15.

$$S = \int_1^3 \left[ \int_1^2 \frac{1}{3u} du \right] dv = \int_1^3 \left[ \frac{1}{3} \ln u \right]_1^2 dv = \frac{\ln 2}{3} \int_1^3 dv = \frac{2}{3} \ln 2.$$

Jak je to vlastně jednoduché! V prvním dílu jsme se podobné příklady učili počítat pomocí jednoduchého integrálu (jako plochu pod grafem funkce — v tomto případě bychom museli útvar rozdělit na více částí, aby se to podařilo). Zkuste to sami a porovnejte výsledek.

### 5.3.3 Elementární délka

Poslední věc, která nám zbývá, je element délky. Opět použijeme postup jeho vyjádření, který jsme si odvodili pro polární, válcové a kulové souřadnice. Nejjednodušší zápis je maticový, pomocí matice  $G$ .

$$(d\ell)^2 = (du \quad dv \quad dw) \begin{pmatrix} \vec{f}_u \vec{f}_u & \vec{f}_u \vec{f}_v & \vec{f}_u \vec{f}_w \\ \vec{f}_u \vec{f}_v & \vec{f}_v \vec{f}_v & \vec{f}_v \vec{f}_w \\ \vec{f}_u \vec{f}_w & \vec{f}_v \vec{f}_w & \vec{f}_w \vec{f}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = (du \quad dv \quad dw) G \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}.$$

Pokud jsou křivočaré souřadnice ortogonální, je matice  $G$  diagonální a prvky v diagonále jsou kvadráty Laméových koeficientů.

### 5.3.4 Cvičení

1. Křivkami  $y = x$ ,  $y = \frac{x}{3}$ ,  $y = \sqrt{x}$  a  $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$  je vymezena oblast v  $\mathbf{R}^2$ , v níž může ležet bod  $P$ . Popište bod  $P \in \mathbf{R}^2$  dvojicí vhodně zvolených křivočarých souřadnic, najděte transformační vztahy mezi kartézskými souřadnicemi  $(x, y)$  a křivočarými souřadnicemi  $(u, v)$ , určete souřadnicové křivky, jejich tečné vektory v bodě  $P$ , obecný tvar Jacobiho matice a hodnotu jakobiánu v bodě  $P$ . Vypočítejte obsah plochy pomocí transformace do nových souřadnic. Správnost výsledku zkontrolujte výpočtem obsahu v kartézských souřadnicích.

**Návod:** Při výpočtu v kartézských souřadnicích je nutno obrazec „rozřezat“ (viz příklad 2.78 v prvním dílu).

2. Rovinný útvar v rovině  $xy$  je omezen křivkami  $y = 4x^3$ ,  $y = 8x^3$ ,  $y = x^{-2}$ ,  $y = 6x^{-2}$  a má plošnou hustotu  $\sigma(x, y) = kx$ ,  $k > 0$  je konstanta. Vypočítejte jeho hmotnost. Zvolte vhodné křivočaré souřadnice  $(u, v)$ ,  $\alpha^{-1} : u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , určete Jacobiho matici a jakobián zobrazení  $\alpha$ ,  $m = \int \sigma(u, v) D\alpha(u, v) du dv$ , jaké budou meze integrálu? Správnost výsledku si můžete ověřit výpočtem v kartézských souřadnicích.
3. Pojem *Jacobiho matice* lze definovat i pro zobrazení  $F : M \rightarrow \mathbf{R}^m$ , kde  $M \subset \mathbf{R}^n$ , které obecně není transformací souřadnic. Formulujte definici Jacobiho matice pro tento obecný případ a vyřešte následující úlohy:

- a) Jsou zadány funkce  $F, G : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $M \subset \mathbf{R}^2$ , určete jejich Jacobiho matice, pokuste se o geometrickou interpretaci řádků matice:

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v),$$

$$G(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u \cos v, u \sin v, u^2).$$

- b) Plocha v  $\mathbf{R}^3$  má kartézskou rovnici  $\frac{(x^2+y^2)}{R^2} = \frac{z^2}{h^2}$ ,  $z \geq 0$ . Najděte vhodné zobrazení  $F : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ , kde  $M \subset \mathbf{R}^2$ , které určuje tuto plochu (tj. parametrizaci plochy), a spočítejte jeho Jacobiho matici.
- c) Najděte zobrazení  $F : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $M \subset \mathbf{R}$ , které je parametrizací šroubovice, a určete jeho Jacobiho matici.
- d) Najděte zobrazení  $F : M \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $M \subset \mathbf{R}$ , které je parametrizací elipsy, a určete jeho Jacobiho matici.
4. Je dáno zobrazení  $\alpha : M \ni (u, v) \rightarrow (x, y) = \alpha(u, v) \in \mathbf{R}^2$ ,  $M \subset \mathbf{R}^2$ . V následujících příkladech určete definiční obor  $M$ , pro který je zobrazení transformací souřadnic. Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky  $C_u$ ,  $C_v$ . Určete Jacobiho matici a jakobián původní i inverzní transformace. Určete délkový element.
- a)  $\alpha : x = uv, y = \frac{u}{v}$ ,
- b)  $\alpha : x = u + v, y = u - v$ ,
- c)  $\alpha : x = u \sin(v/2), y = u \cos(v/2) + 1$ .

