

Kapitola 9

Závislosti na více parametrech aneb funkce více proměnných

Skalárními funkcemi jedné reálné proměnné jsme se zabývali velmi podrobně v prvním dílu. Umíme počítat jejich limity v bodech vlastních i nevlastních, umíme je derivovat i integrovat. Totéž dokážeme provádět i s vektorovými funkcemi jedné proměnné. Každý vektor je totiž dán svými složkami, takže každá vektorová funkce je zadána tolika „obyčejnými“ skalárními funkcemi, kolik má daný vektor složek. S vektorovými funkcemi jedné proměnné jsme pracovali při zadávání trajektorií hmotných bodů a výpočtech jejich dalších charakteristik (rychlost, zrychlení, křivost trajektorie, apod.). Tou jedinou proměnnou byl obvykle čas. Veličiny popisující objekty a děje v přírodě, ať již jsou tyto veličiny skaláry či vektory, však většinou závisí na více proměnných než jedné. Kromě času bývají typicky závislé na poloze. Vezměme třeba takové gravitační pole Země. Na čase sice nezávisí, zato však klesá s druhou mocninou vzdálenosti od středu Země. Veličina, která je charakterizuje, je buď vektorová, nebo skalární. Tou vektorovou je *gravitační zrychlení* neboli *intenzita* gravitačního pole Země, tou skalární je *potenciál*,

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\kappa \frac{M_Z}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad V(\vec{r}) = -\kappa \frac{M_Z}{r}, \quad r \geq R_Z.$$

V předchozích vztazích jsou M_Z a R_Z hmotnost a poloměr Země, \vec{r} je polohový vektor místa, v němž pole zjišťujeme, vzhledem ke středu Země. Skalární i vektorové veličiny popisující elektrické a magnetické pole nábojů a proudů, rychlosti elementů proudící kapaliny nebo plynu a řada dalších fyzikálních veličin jsou nejen funkcemi času, ale také polohy bodu, v němž je počítáme nebo měříme. A stejně jako byly změny funkcí jedné proměnné vyjádřeny pomocí derivací, změny změn pomocí druhých derivací, atd., je třeba umět počítat i změny veličin závislejších na více proměnných. Mohou samozřejmě nastat situace, kdy se mění jen jedna z proměnných, zatímco ostatní zůstávají konstantní. Nejsnáze si takovou situaci představíme například tak, že měříme třeba elektrické pole stále ve stejném bodě prostoru, ale běží při tom čas. Pole se v daném bodě s časem mění. Nebo naopak v daném okamžiku sledujeme rozdílnost pole v bodech velmi blízkých danému bodu. Obecně se samozřejmě mění všechny proměnné a s nimi i hodnoty skalární funkce nebo složky vektorové funkce. Jak takové obecné změny co nejlépe popsat, uvidíme právě v této kapitole. Setkáme se v ní s parciální derivací, která vystihuje, jak

rychle se mění hodnota funkce se změnou jedné z proměnných. Dále poznáme obecnější, směrovou derivaci, která popisuje rychlost změny funkční hodnoty, mění-li se všechny proměnné, ale tak, že bod, který reprezentuje soubor jejich hodnot, se pohybuje v prostoru proměnných po libovolné přímce (nikoli jen po jedné souřadnicové ose, jako tomu je u parciálních derivací). A konečně zavedeme pojmy úplného diferenciálu a Jacobiho zobrazení, které popisují změnu hodnot skalární či vektorové funkce v lineární aproximaci, mění-li se hodnoty proměnných zcela obecně.

Stejně jako u funkcí jedné proměnné je základem pro definici veličin popisujících rychlost změny funkce pojem limity, který úzce souvisí s pojmem okolí bodů a obecně i s definičními obory funkcí. Pro případ funkcí více proměnných klade požadavek hlubšího pochopení pojmu limity větší nároky na soustředěnost a důkladné promýšlení různých situací, než tomu bylo u limit funkcí jedné proměnné. Proto se jím zabývá podstatná část poměrně rozsáhlého odstavce 9.2 poté, co je v odstavci 9.1 věnována značná pozornost různým typům definičních oborů funkcí. Čtenář, který se chce rychle propracovat k praktickým výpočtům a spokojí se zatím s intuitivním pochopením pojmu limity funkce více proměnných (založeným na dobré znalosti definice a vlastností limit funkcí jedné proměnné), může k nim v podstatě rovnou přejít s vědomím, že sice bude umět prakticky provádět různé standardní operace s funkcemi více proměnných, ale nebude si pravděpodobně vědět rady s netypickými případy. K důkladnému pročtení odstavců 9.1 a 9.2 se může samozřejmě vrátit kdykoli.

9.1 Podmnožiny euklidovských prostorů \mathbf{R}^n

S definičními obory funkcí jedné proměnné to bylo docela jednoduché. Byly to většinou intervaly — otevřené intervaly nebo jejich sjednocení, uzavřené intervaly, popřípadě intervaly uzavřené jen z jedné strany. Také zde figurovala okolí bodů, ať již ryzí, z nichž byl daný bod vyloučen, nebo taková, která daný bod obsahovala. Nic složitějšího tam nebylo. Aby bylo možné funkce derivovat, což byla nejčastější operace, kterou jsme prováděli s cílem zjistit, jak rychle se funkce mění, nemohly být definiční obory „moc divoké“. Vždy bylo třeba předpokládat, že bod, v němž jsme funkci nebo její změnu vyšetřovali, má okolí, ve kterém je funkce přinejmenším definována. Pro případ funkcí více proměnných je to podobné, ale bude třeba se definičním oborům věnovat trochu podrobněji. Dejme tomu, že nějaká fyzikální, nebo i nefyzikální veličina bude záviset na n proměnných. Každá z nich může nabývat nějakých hodnot. Funkční hodnota naší funkce bude tak jednoznačně určena souborem n hodnot jednotlivých proměnných. Tuto n -tici budeme považovat za bod v prostoru \mathbf{R}^n . S n -ticemi jsme již pracovali v algebře, takže takový popis známe. V algebře jsme však s nimi prováděli algebraické operace, sčítání a násobení číslem. Měli jsme tedy v \mathbf{R}^n zavedenou *algebraickou strukturu*. Pro práci s funkcemi a pro sledování jejich změn „bod od bodu“ potřebujeme v \mathbf{R}^n ještě jinou strukturu. Ta je tvořena okolími, podobně jako tomu bylo u funkcí jedné proměnné. Taková struktura se nazývá *topologická* a matematická disciplína, která se zabývá topologickými strukturami, se jmenuje *topologie*.

Topologickými strukturami se nebudeme zabývat v celé obecnosti, i když je to velmi zajímavé. Budeme pracovat pouze se speciálním typem, takzvanou *euklidovskou topologií v \mathbf{R}^n* .

9.1.1 Okolí bodů, otevřené a uzavřené množiny

S pojmem *okolí bodu* jsme se setkali hned v první části druhé kapitoly prvního dílu. Vzpomínáte? Šlo tehdy o okolí bodu a na reálné ose \mathbf{R} . Okolím jsme rozuměli otevřený interval $(a - \delta_1, a + \delta_2)$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, ryzím okolím pak množinu $(a - \delta_1, a + \delta_2) \setminus \{a\}$, tj. sjednocení otevřených intervalů $(a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_2)$. Sjednocení jakýchkoli otevřených intervalů jsme později nazývali otevřenou množinou, doplňky otevřených množin v \mathbf{R} byly uzavřené množiny. Vybudovali jsme tak na \mathbf{R} *euklidovskou topologii* (dodatek F prvního dílu). Podobná bude situace i ve vícerozměrném případě, tedy v \mathbf{R}^n .

Bod $a \in \mathbf{R}^n$ je uspořádaná n -tice reálných čísel $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Otevřeným kvádrem v \mathbf{R}^n , nebo též *n -rozměrným otevřeným kvádrem*, rozumíme množinu

$$K = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n), \quad a_i, b_i \in \mathbf{R}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (9.1)$$

Uzavřeným kvádrem v \mathbf{R}^n , nebo též *n -rozměrným uzavřeným kvádrem*, rozumíme množinu

$$\bar{K} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad a_i, b_i \in \mathbf{R}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (9.2)$$

Pomocí otevřených kvádrů vytvoříme na \mathbf{R}^n strukturu, která umožní pracovat s pojmem *okolí bodu*.

Libovolné sjednocení U otevřených kvádrů v \mathbf{R}^n se nazývá *otevřená množina*. Doplněk libovolné otevřené množiny U v \mathbf{R}^n , tj. $\mathbf{R}^n \setminus U$, se nazývá *uzavřená množina*. Za otevřenou množinu prohlásíme také \mathbf{R}^n a prázdnou množinu \emptyset . Každou otevřenou množinu U obsahující bod $a \in \mathbf{R}^n$ nazveme (otevřené) *okolí bodu a* , množina $U \setminus \{a\}$ je *ryzí okolí bodu a* .

Uměli byste dokázat, že ryzí okolí bodu je rovněž otevřená množina?

Typickými (otevřenými) okolími bodů jsou otevřené kvádry. Vyjmeme-li z takového kvádru bod samotný, dostaneme ryzí okolí tohoto bodu. Nechť $a \in \mathbf{R}^n$. Okolí, resp. ryzí okolí bodu a se často volí ve tvaru

$$\mathcal{O}(a) = (a_1 - \delta_{11}, a_1 + \delta_{12}) \times (a_2 - \delta_{21}, a_2 + \delta_{22}) \times \cdots \times (a_n - \delta_{n1}, a_n + \delta_{n2}), \quad (9.3)$$

resp.

$$\mathcal{O}(a) = (a_1 - \delta_{11}, a_1 + \delta_{12}) \times (a_2 - \delta_{21}, a_2 + \delta_{22}) \times \cdots \times (a_n - \delta_{n1}, a_n + \delta_{n2}) \setminus \{a\},$$

kde $\delta_{i1}, \delta_{i2} > 0, i \in \{1, \dots, n\}$.

Pozn.: V některých textech je pojem okolí přímo definován vztahem (9.3). Naše definice okolí je obecnější a otevřené kvádry jsou jejím speciálním případem. Libovolná otevřená množina obsahující bod a bude zároveň obsahovat i nějaký kvádr typu (9.3).

Označme τ systém všech otevřených množin v \mathbf{R}^n . Tento systém se nazývá *euklidovská* neboli *přirozená topologie v \mathbf{R}^n* . Všimněme si, že euklidovská topologie v \mathbf{R}^n má následující vlastnosti:

- $\emptyset \in \tau, \mathbf{R}^n \in \tau,$
- libovolné sjednocení množin systému τ je prvkem systému $\tau,$
- průnik dvou libovolných množin ze systému τ je prvkem systému $\tau.$

Pozn. 1: Pojem „libovolné sjednocení“ zahrnuje i možnost sjednocení nekonečně mnoha, dokonce i nespočetně mnoha množin systému τ .

Pozn. 2: Předchozí vlastnosti otevřených množin lze jednoduše dokázat na základě toho, jak jsme otevřené množiny v \mathbf{R}^n definovali. Tato definice je sice velmi obvyklá, ale dost speciální. Obecně se nazývá topologií na množině X jakýkoli systém jejích podmnožin, který právě splňuje výše uvedené vlastnosti. Na množině X , a tedy i pro $X = \mathbf{R}^n$, existuje takových systémů obecně více, třeba i nekonečně mnoho.

Příklad 9.1: Třetí vlastnost topologie

Všimněme si podrobněji třetí vlastnosti euklidovské topologie. Jistě bychom uměli dokázat, že také průnik libovolného *konečného* počtu otevřených množin je otevřená množina. Jak by to však bylo v případě průniku nekonečného počtu otevřených množin? Bylo by to stejné, nebo jiné, jako u druhé vlastnosti, kde sjednocení libovolného systému otevřených množin je rovněž otevřenou množinou? Zřejmě nikoli — v kladném případě by totiž jistě i třetí vlastnost byla pro libovolný průnik přímo formulována. Jestliže není, bude někde „zrada“. Skutečně. Uvažujme třeba o euklidovské topologii na \mathbf{R} . Otevřenými množinami jsou všechna možná sjednocení otevřených intervalů. Označme pro všechna $n \in \mathbf{N}$

$$I_n = (a_n, b_n), \quad \text{kde } I_n \subset I_{n+1} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbf{N} \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Průnikem všech intervalů I_n je množina obsahující jediný bod, a to není otevřený interval. Příkladem konkrétní volby intervalů I_n , při které průnik snadno identifikujeme, je třeba

$$I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Průnikem je množina $\{0\}$. Jak to zjistíme? To si zkuste sami.

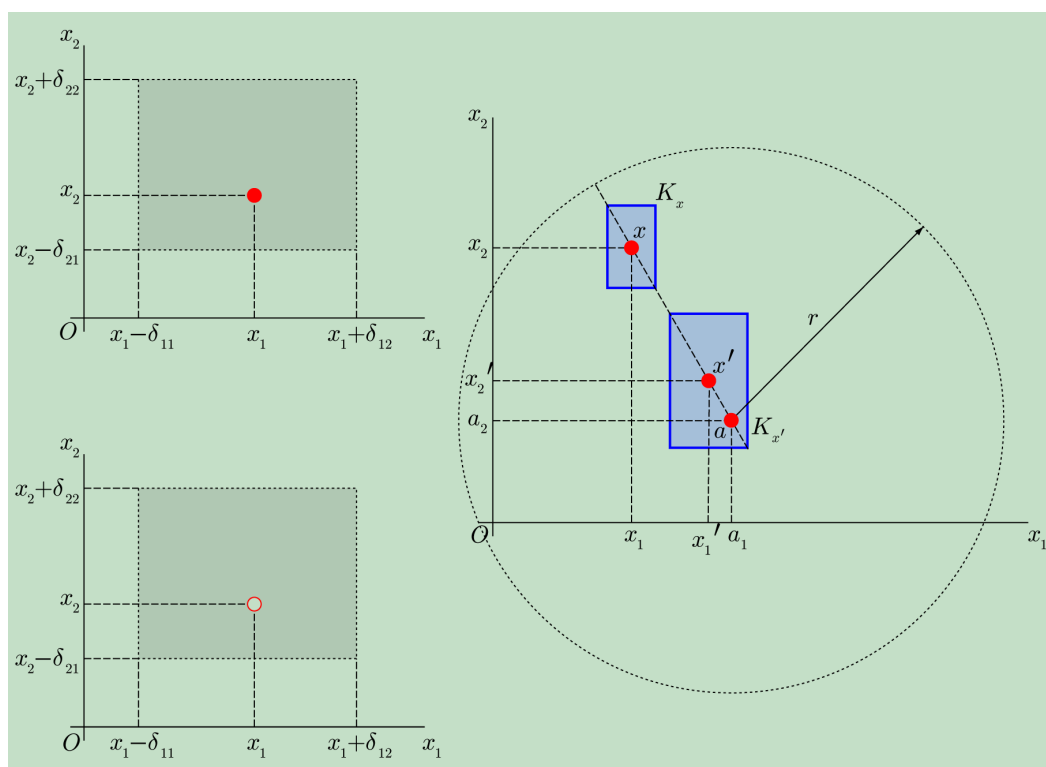
Vzhledem k tomu, že všechny otevřené množiny v \mathbf{R}^n můžeme, kromě prázdné množiny, získat sjednocováním otevřených kvádrů, nazýváme systém všech otevřených kvádrů doplněný o prázdnou množinu *báze euklidovské topologie v \mathbf{R}^n* . Obecně nazýváme bázi jakýkoli podsystém τ_0 systému τ , z něhož můžeme sjednocováním utvořit všechny otevřené množiny v \mathbf{R}^n .

Příklad 9.2: Jiná báze euklidovské topologie

Z předchozí obecnější definice báze euklidovské topologie se zdá, že báze zřejmě nebude určena jednoznačně. Také vskutku není. Takových bází můžeme najít i nekonečně mnoho — je to tak trochu podobné jako s bázemi ve vektorových prostorech, jichž také existuje nekonečně mnoho. Najdeme tedy nějakou jinou bázi euklidovské topologie, která by mohla být podobně jednoduchá jako báze tvořená otevřenými kvádry. Zvolme bod $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ a číslo $r > 0$. Množinu

$$B(a, r) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2 \right\}$$

nazýváme *otevřená koule v \mathbf{R}^n* . Uvědomme si, že pro $n = 2$ se jedná o kruh se středem v bodě a a poloměrem r , pro $n = 3$ o kouli se středem v bodě a a poloměrem r . Libovolné sjednocení otevřených koulí nazveme otevřenou množinou v \mathbf{R}^n . Dokážeme teď, že otevřená koule je otevřenou množinou ve smyslu sjednocení otevřených kvádrů. Je to jednoduché. Pro $n = 2$ ilustruje situaci obrázek 9.1. Na obrázku vlevo je znázorněno okolí a ryzí okolí bodu $x = (x_1, x_2)$ ve tvaru kvádrů. Obrázek vpravo ukazuje myšlenku postupu při konstrukci otevřené koule jako sjednocení otevřených kvádrů: S každým bodem ležícím v kouli lze spojit otevřený kvádr, který tento bod obsahuje a který se současně vejde do koule. V obrázku je s bodem x , resp. x' spojen kvádr K_x , resp. $K_{x'}$. Pro obecné n nyní ukážeme, jak se taková konstrukce zapíše matematicky. Vezměme libovolný bod $x \in B(a, r)$

Obr. 9.1 Otevřené kvádry a koule v \mathbf{R}^2 .

a označme $\delta = r - |x - a|$, kde výrazem

$$|x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$$

rozumíme *vzdálenost* bodů x a a , tj. vzdálenost bodu x od středu koule. Sestrojíme otevřený kvádr

$$K_x = \left(x_1 - \frac{\delta}{2\sqrt{n}}, x_1 + \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \right) \times \cdots \times \left(x_n - \frac{\delta}{2\sqrt{n}}, x_n + \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \right).$$

Je to vlastně n -rozměrná krychle o straně δ/\sqrt{n} . Polovina její tělesové úhlopříčky je

$$\frac{t}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Z předchozího výpočtu plyne, že $K_x \subset B(a, r)$, takže kvádr K_x se vejde do koule $B(a, r)$. Sjednocením kvádrů K_x pro všechna $x \in B(a, r)$ je právě koule $B(a, r)$. Koule $B(a, r)$ je tedy otevřená množina. Sjednocení libovolných koulí také musí být otevřená množina. Podobně můžeme ukázat, že každý otevřený kvádr lze vyjádřit jako sjednocení otevřených koulí. Myšlenka důkazu je stejná — musíme dokázat otevřený kvádr „vycpat“ otevřenými koulemi. Zkusíte to? Návod máte ve cvičení 9.1.5 (úloha 3).

Řešením příkladu 9.2 jsme zjistili, že také otevřené koule

$$B(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x - a| < r\}, \quad |x - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}, \quad (9.4)$$

tvoří, samozřejmě po doplnění prázdnou množinou, bázi euklidovské topologie. Je tedy jedno, zda otevřenou množinu U vyjádříme jako sjednocení otevřených kvádrů, nebo otevřených koulí. Také pro \mathbf{R}^n lze ukázat, podobně jako jsme to provedli pro \mathbf{R} v dodatku F prvního dílu, že z otevřených kvádrů, resp. otevřených koulí lze vybrat takovou bázi euklidovské topologie, která je spočetná.

Příklad 9.3: Musí být množina v \mathbf{R}^n otevřená, nebo uzavřená?

Podle naší definice otevřené a uzavřené množiny je například otevřený kvádr v \mathbf{R}^2 (otevřený obdélník) $K = (-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2)$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, otevřenou množinou. Jeho doplněk v \mathbf{R}^2 , $\mathbf{R}^2 \setminus K$, je podle definice množinou uzavřenou. Obdélník $\bar{K} = [-\delta_1, \delta_1] \times [-\delta_2, \delta_2]$ má za doplněk množinu $U = \mathbf{R}^2 \setminus \bar{K}$. Jistě očekáváme, že \bar{K} je uzavřená množina. Abychom to ověřili, musíme ukázat, že U je otevřená, že ji dokážeme zapsat jako sjednocení otevřených kvádrů. Praktičtější definici otevřené a uzavřené množiny totiž zatím nemáme. Pokusme se o potřebné vyjádření množiny U . Pro představu použijme obrázek 9.2. Uvažme množinu $U_1 = \mathbf{R} \setminus [-\delta_1, \delta_1]$. Vezměme její libovolný bod $x > \delta_1$. Tento bod nepochybně leží například v otevřeném intervalu

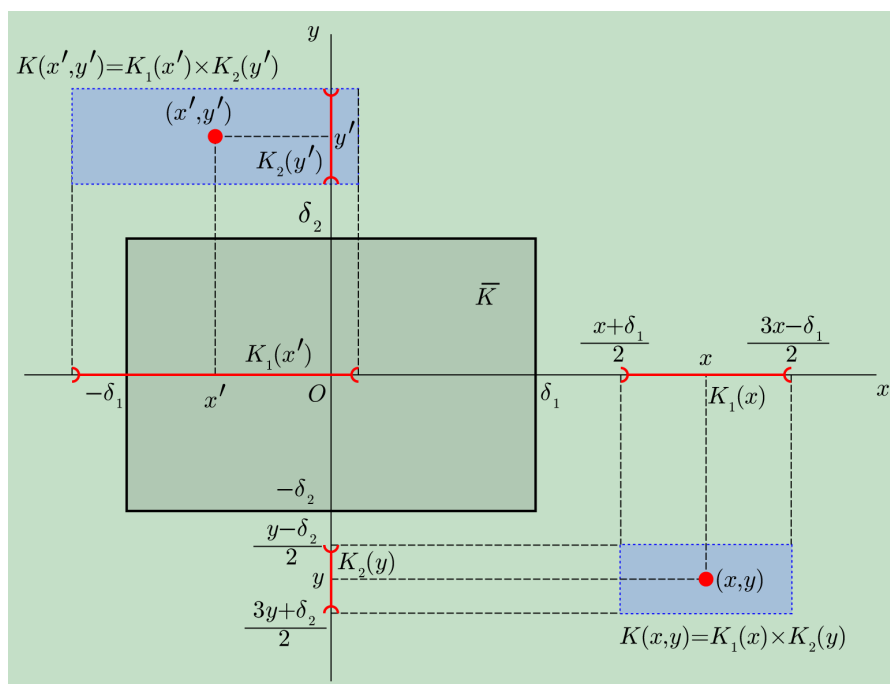
$$K_1(x) = \left(\frac{x + \delta_1}{2}, \frac{3x - \delta_1}{2} \right) \quad \text{a platí} \quad K_1(x) \subset U_1.$$

Tato konkrétní situace je znázorněna na obrázku 9.2. Pro bod $x \in U_1$, $x < -\delta_1$, zvolme

$$K_1(x) = \left(\frac{3x + \delta_1}{2}, \frac{x - \delta_1}{2} \right), \quad \text{přičemž opět platí} \quad K_1(x) \subset U_1.$$

Pro $x \in [-\delta_1, \delta_1]$ zvolme libovolný otevřený interval $K_1(x)$ obsahující bod x . Pro množinu $U_2 = \mathbf{R} \setminus [-\delta_2, \delta_2]$ a její libovolný bod $y > \delta_2$ dostaneme

$$y \in K_2(y), \quad K_2(y) = \left(\frac{y + \delta_2}{2}, \frac{3y - \delta_2}{2} \right), \quad \text{přičemž} \quad K_2(y) \subset U_2,$$

Obr. 9.2 Otevřené a uzavřené množiny v \mathbf{R}^2 .

pro $y < -\delta_2$ pak

$$y \in K_2(y), \quad K_2(y) = \left(\frac{3y + \delta_2}{2}, \frac{y - \delta_2}{2} \right) \quad \text{a platí} \quad K_2(y) \subset U_2.$$

Pro $y \in [-\delta_2, \delta_2]$ volíme otevřený interval $K_2(y)$ zase libovolně, ale tak, aby obsahoval bod y . V obrázku je pro ilustraci zachycena situace, kdy $y < \delta_2$. (Pro jiný bod (x', y') , pro který je $x' \in [-\delta_1, \delta_1]$ a $y' > \delta_2$, jsou v obrázku zakresleny jednorozměrné otevřené kvádry (otevřené intervaly) $K_1(x')$ a $K_2(y')$ a dvojrozměrný otevřený kvádr (otevřený obdélník) $K(x', y') = K_1(x') \times K_2(y')$.) Množinu U pak lze vyjádřit jako následující sjednocení otevřených kvádrů,

$$U = \bigcup_{(x,y) \in U} K_1(x) \times K_2(y),$$

takže je otevřená. Její doplněk v \mathbf{R}^2 , $\bar{K} = \mathbf{R}^2 \setminus U$, je proto množina uzavřená. Sami vidíte, že konstrukce je sice snadná, ale přece jen trochu krkolomná. Proto v dalším odstavci najdeme praktičtější způsoby.

Zatím jsme si ukázali typické otevřené a uzavřené podmnožiny prostoru \mathbf{R}^2 (se zavedenou euklidovskou topologií). Ale co třeba množina

$$A = [-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2] \subset \mathbf{R}^2 ?$$

Tu nedokážeme zapsat jako sjednocení otevřených obdélníků a její doplněk v \mathbf{R}^2 také ne. Potíže v případě množiny A dělají některé body na obvodu obdélníku, konkrétně body množiny

$$\{-\delta_1\} \times (-\delta_2, \delta_2] \cup [-\delta_1, \delta_1) \times \{\delta_2\}.$$

V případě doplňku $\mathbf{R}^2 \setminus A$ zase „zlobí“ body množiny

$$[-\delta_1, \delta_1] \times \{-\delta_2\} \cup \{\delta_1\} \times [-\delta_2, \delta_2].$$

Množina A tedy není ani otevřená, ani uzavřená.

Příklad 9.4: Dvě podivné množiny

Možná jste si už všimli, že dvě podmnožiny \mathbf{R}^n mají z hlediska definice otevřené a uzavřené množiny jakési „rozdvojené“ chování. Jsou to množiny \emptyset a samotná \mathbf{R}^n , které splňují obě definice. Jsou jak otevřené, tak uzavřené, neboť jsou v \mathbf{R}^n navzájem doplňkové. Doplňkem prázdné množiny v \mathbf{R}^n je sama \mathbf{R}^n , doplňkem množiny \mathbf{R}^n je množina prázdná. Pro praktické zacházení s otevřenými a uzavřenými množinami to ale nijak nevadí.

Příklad 9.5: Jiné topologie

Jak jsme si již řekli, lze topologii τ na \mathbf{R}^n , a obecně na jakékoli *nosné množině* X , zavést pomocí tří pře-depsaných vlastností systému τ podmnožin nosné množiny. Dvojice (X, τ) je *topologickým prostorem*. Dvojice s toutéž nosnou množinou, ale jinou topologií τ , jsou různé topologické prostory. Prvky systému τ se vždy nazývají otevřenými množinami. Definice topologických pojmů jsou i v obecném případě formálně stejné jako při volbě topologie euklidovské, konkrétní „provedení“ jednotlivých typů množin se však liší. Protože v „běžné“ matematické analýze i v běžném životě jsme navyklí na topologii euklidovskou, připadají nám situace odpovídající jiným topologiím přinejmenším neobvyklé, často i paradoxní. Jako ukázkou jiných topologií uvedme několik příkladů, třeba jen pro reálnou osu $X = \mathbf{R}$. Samozřejmě i na ní pracujeme nejčastěji s euklidovskou topologií. Tomu odpovídá celá klasická matematická analýza funkcí jedné proměnné, s níž jsme se seznámili v druhé kapitole prvního dílu.

Zvolíme-li systém τ tak, že bude obsahovat jen \emptyset a \mathbf{R} , bude splňovat požadované tři vlastnosti topologie. Snadno to sami prověříte, uvědomíte-li si, jak vypadají sjednocení a průniky množin \emptyset a \mathbf{R} . Taková topologie se nazývá *triviální* — jak jinak? Je vidět, že množiny \emptyset a $X = \mathbf{R}$ jsou v triviální topologii, stejně jako v euklidovské, současně otevřené i uzavřené. (Pro tyto dvě množiny je tomu tak při každé volbě topologie). Ostatní množiny nejsou ani otevřené, ani uzavřené.

Jistým „protipólem“ triviální topologie je topologie *diskrétní*, kde systém τ obsahuje všechny podmnožiny \mathbf{R} , τ je tedy takzvaná *potenční množina množiny* $X = \mathbf{R}$. Značíme ji $\tau = 2^X$ a snadno ověříme, že tři základní požadavky opravdu splňuje. Tato topologie je svým způsobem také tak trochu „podivná“. Všechny podmnožiny nosné množiny jsou totiž vzhledem k ní současně otevřené i uzavřené.

Příklad 9.5 naznačuje, že topologie je velmi zajímavou matematickou disciplínou. Na druhé straně vyvolává otázku, zda jiné topologie než euklidovská vůbec mohou být k něčemu dobré. Jistěže ty dvě extrémní, které v příkladu byly rozebrány, moc praktické nejsou. V řadě fyzikálních disciplín však jiné topologie než euklidovské skutečně potřebujeme — například v obecné teorii relativity se pracuje se zakřivenými prostory, do nichž se obecnější topologie velice hodí. Škoda, že se topologií v její obecné podobě v této knize nemůžeme zabývat. V dalších odstavcích budeme již stále pracovat s prostorem \mathbf{R}^n se zavedenou euklidovskou topologií, tj. s *euklidovským topologickým prostorem*.

9.1.2 Vnitřky, vnějšky a hranice podmnožin \mathbf{R}^n

V tomto odstavci si řekneme, jak snadno poznat otevřenou, resp. uzavřenou podmnožinu euklidovského prostoru \mathbf{R}^n , aniž bychom museli ji, resp. její doplněk konstruovat jako sjednocení otevřených kvádrů. Nejprve jeden jednoduchý, ale důležitý pojem.

Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *omezená*, nebo též *ohraničená*, jestliže existuje otevřený kvádr $K \subset \mathbf{R}^n$ tak, že $A \subset K$.

Dále zvolme libovolnou podmnožinu $A \subset \mathbf{R}^n$ a libovolný bod $x \in \mathbf{R}^n$. Jakou „polohu“ může mít bod x vůči množině A ? Možné situace shrneme do tabulky.

(1)	$x \in A$	existuje	otevřený kvádr K tak, že $x \in K, K \subset A$
(2)	$x \in A$	neexistuje	otevřený kvádr K tak, že $x \in K, K \subset A$
(3)	$x \in \mathbf{R}^n \setminus A$	existuje	otevřený kvádr K tak, že $x \in K, K \subset \mathbf{R}^n \setminus A$
(4)	$x \in \mathbf{R}^n \setminus A$	neexistuje	otevřený kvádr K tak, že $x \in K, K \subset \mathbf{R}^n \setminus A$

Pro situace (2) a (4) je společné toto: Ať už je bod x prvkem množiny A , nebo ne, platí pro každý otevřený kvádr, který jej obsahuje, že má neprázdný průnik jak s množinou A , tak s jejím doplňkem $\mathbf{R}^n \setminus A$. Získané závěry shrneme ve větě.

Věta 9.1: *Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$ je množina a $x \in \mathbf{R}^n$ bod. Pak nastane právě jedna z možností:*

[int] *Existuje otevřený kvádr K tak, že $x \in K, K \subset A$.*

[ext] *Existuje otevřený kvádr K tak, že $x \in K, K \subset \mathbf{R}^n \setminus A$.*

[h] *Pro každý otevřený kvádr K , pro který je $x \in K$, platí $K \cap A \neq \emptyset$ a současně $K \cap (\mathbf{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.*

V souvislosti s větou 9.1 se prostor \mathbf{R}^n „rozpadá“ na tři po dvou disjunktní podmnožiny — vnitřek, vnějšek a hranici množiny A . Zavedeme je v následující definici a přidáme ještě další dva pojmy.

Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Množina $\text{int } A$ všech bodů z \mathbf{R}^n s vlastností [int] se nazývá *vnitřek* množiny A , množina $\text{ext } A$ všech bodů z \mathbf{R}^n s vlastností [ext] je *vnějšek* množiny A a množina $\text{h}A$ všech bodů z \mathbf{R}^n s vlastností [h] je *hranice* množiny A . Množina $\overline{A} = A \cup \text{h}A = \text{int } A \cup \text{h}A$ je *uzávěr* množiny A . Množina A se nazývá *kompaktní*, jestliže je omezená a uzavřená.

Přímo z věty 9.1 a z předchozí definice také hned plyne, že vnitřek a vnějšek jakékoli množiny A jsou množiny otevřené (cvičení 9.1.5, úloha 9), zatímco její uzávěr a hranice, jakožto doplňky otevřených množin, jsou množiny uzavřené. Platí totiž

$$\begin{aligned} \text{int } A \cup \text{ext } A \cup \text{h}A &= \mathbf{R}^n \implies \text{h}A = \mathbf{R}^n \setminus (\text{int } A \cup \text{ext } A), \\ \overline{A} \cup \text{ext } A &= \mathbf{R}^n \implies \overline{A} = \mathbf{R}^n \setminus \text{ext } A. \end{aligned}$$

Dále platí, že množina A a její doplněk v \mathbf{R}^n mají společnou hranici, vnitřek množiny A je vnějškem jejího doplňku a vnějšek množiny A je vnitřkem jejího doplňku, tj.

$$\text{h}A = \text{h}(\mathbf{R}^n \setminus A), \quad \text{int } A = \text{ext}(\mathbf{R}^n \setminus A), \quad \text{ext } A = \text{int}(\mathbf{R}^n \setminus A).$$

Zamyslete se nad uvedenými množinovými rovnostmi. Dále se zamyslete nad zdůvodněním těchto tvrzení:

Množina A je otevřená právě tehdy, je-li rovna svému vnitřku. Množina A je uzavřená právě tehdy, je-li rovna svému uzávěru.

Nejde o žádné velké dokazování. Plyne to jednoduše z definic vnitřku a uzávěru množiny.

Příklad 9.6: Vnitřky, vnějšky, hranice, ... I

Definujme množinu A takto:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Je jasné, že se jedná o množinu všech bodů vyplňujících trojrozměrnou jednotkovou kouli se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic, ale bez jejího povrchu, tj. $A = B(0, 1)$. Víme již, že tato koule je otevřená a je tedy rovna svému vnitřku. Pro její vnějšek, hranici a uzávěr platí

$$\begin{aligned} \text{ext } A &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}, \\ \text{h}A &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ \overline{A} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

Příklad 9.7: Vnitřky, vnějšky, hranice, ... II

A teď něco méně jednoduchého než v předchozím příkladu. Vzpomínáte na Riemannovu funkci z dodatku K prvního dílu? Uvedeme nyní její definici pro dvojrozměrný případ — vznikne tak funkce dvou proměnných. Že v tuto chvíli trochu předbíháme událostem, nevádí, půjde nám totiž pouze o vlastnosti definičního oboru funkce. Definujme tedy zobrazení

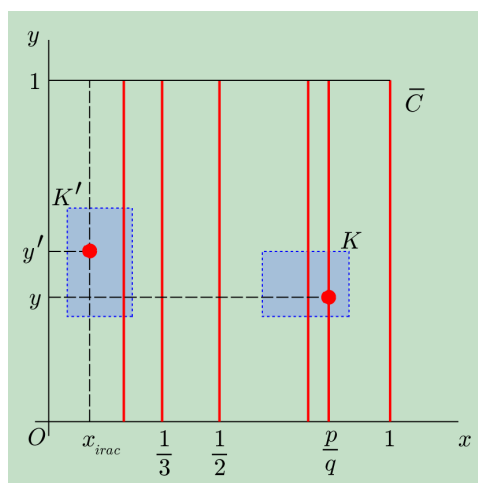
$$\begin{aligned} f_R &: \overline{C} = [0, 1] \times [0, 1] \ni (x, y) \longrightarrow f_R(x, y) \in \mathbf{R}, \\ f_R(x, y) &= 1 - \frac{1}{q} \quad \text{pro } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbf{N} \text{ nesoudělná, } y \in \mathbf{Q}, \\ f_R(x, y) &= 1 \quad \text{v ostatních případech.} \end{aligned} \tag{9.5}$$

9.1. PODMNOŽINY EUKLIDOVSKÝCH PROSTORŮ \mathbf{R}^N 743

Tato „dvojměrná“ Riemannova funkce je definována na uzavřeném kvádru (čtverci) $\overline{C} = [0, 1] \times [0, 1]$. O Riemannově funkci z dodatku K (příklad K.2) víte, že množinou bodů její nespojitosti byla množina $A = \{x \in [0, 1] \mid x \in \mathbf{Q}\}$, tj. množina všech racionálních čísel z intervalu $[0, 1]$. V případě Riemannovy funkce definované na \overline{C} má množina bodů nespojitosti tvar

$$A = \{(x, y) \in \overline{C} \mid x \in \mathbf{Q}, y \in [0, 1]\}.$$

Body nespojitosti funkce $f_R(x, y)$ tedy vyplní úsečky vztyčené kolmo k ose x v bodech o racionálních souřadnicích (viz obrázek 9.3). Zvolme libovolný bod množiny A , tj. $(p/q, y)$, kde čísla $p, q \in \mathbf{N}$ jsou nesoudělná,



Obr. 9.3 Množina bodů nespojitosti Riemannovy funkce.

a libovolný otevřený kvádr (obdélník) K , který tento bod obsahuje. Vzhledem k tomu, že v libovolně malém okolí racionálního čísla leží jak čísla racionální, tak iracionální (a obojího druhu je v každém okolí nekonečně mnoho), je zřejmé, že kvádrem K procházejí jak úsečky, jejichž body mají x -ovou souřadnici racionální, tak úsečky tvořené body s x -ovou souřadnicí iracionální. Kvádr K má vždy neprázdný průnik jak s množinou A , tak s jejím doplňkem v \mathbf{R}^2 . Vnitřek množiny A je prázdný. Vezmeme-li jakýkoli bod $(x_{irac}, y') \in \overline{C} \setminus A$ a libovolný kvádr K' , který jej obsahuje, opět bude mít K' neprázdný průnik jak s A , tak s jejím doplňkem. Je vidět, že všechny body čtverce \overline{C} jsou body hranice množiny A . Další je už snadné. Můžeme shrnout

$$\text{int } A = \emptyset, \quad \text{h}A = \overline{A} = \overline{C}, \quad \text{ext } A = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{A} = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{C}.$$

Množina A není ani otevřená, ani uzavřená. Není proto ani kompaktní. Je tak trochu „divná“. Není ale zas tak „rozsáhlá“, aby pro některé výpočty byla nespojitost Riemannovy funkce v jejích bodech na závalu. Například pro poněkud neobvyklé těleso T s podstavou \overline{C} definované jako množina bodů

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \overline{C}, 0 \leq z \leq f_R(x, y)\}$$

lze dokonce definovat objem jako integrál z Riemannovy funkce na čtverci \overline{C} . Tento objem je jednotkový. (Vzpomeňte si, že i Riemannova funkce z příkladu K.2 nebyla dost nespojitá na to, aby to znemožnilo ji integrovat. Říkali jsme tehdy, že je spojitá skoro všude.)

Následující příklad si blíže všímá velmi zajímavé topologické vlastnosti množin, jejich kompaktnosti. Je možná trochu obtížnější a spíše teoretičtější. Úsporný čtenář jej proto může při prvním čtení vynechat bez ztráty souvislosti.

Příklad 9.8: Jak je to s definicí kompaktnosti množiny?

Před chvílí jsme definovali kompaktní množinu velmi jednoduše, jako omezenou a uzavřenou. Jak to ale jde dohromady s definicí kompaktnosti, kterou jsme uváděli v dodatku F prvního dílu? Definice uvedená v dodatku byla přímo odvozena z obecné definice kompaktnosti. Obecná definice vychází z pojmu pokrytí množiny. *Otevřeným pokrytím množiny* $A \subset X$, kde (X, τ) je topologický prostor, rozumíme takový soubor otevřených množin, tj. prvků dané topologie τ , jejichž sjednocení obsahuje množinu A . Množina A se nazývá *kompaktní*, jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Znamená to, že ať a priori pokryjeme kompaktní množinu A otevřenými množinami jakkoli, vždy lze z pokrývajících množin vybrat jen konečný počet takových, které budou k pokrytí množiny A stačit. V případě, že studovaným topologickým prostorem je množina $X = \mathbf{R}^n$ s euklidovskou topologií, je obecná definice kompaktnosti ekvivalentní naší definici zjednodušené. Tuto skutečnost bychom mohli formulovat ve tvaru tvrzení: Podmnožina A euklidovského prostoru \mathbf{R}^n je kompaktní právě tehdy, je-li uzavřená a omezená. Platnost tohoto tvrzení právě umožňuje použít ekvivalentní, mnohem praktičtější definici kompaktnosti. Uzavřenost a omezenost množiny se totiž dá v konkrétních případech snadno prověřit, zatímco přímé ověřování kompaktnosti z definice je většinou obtížné.

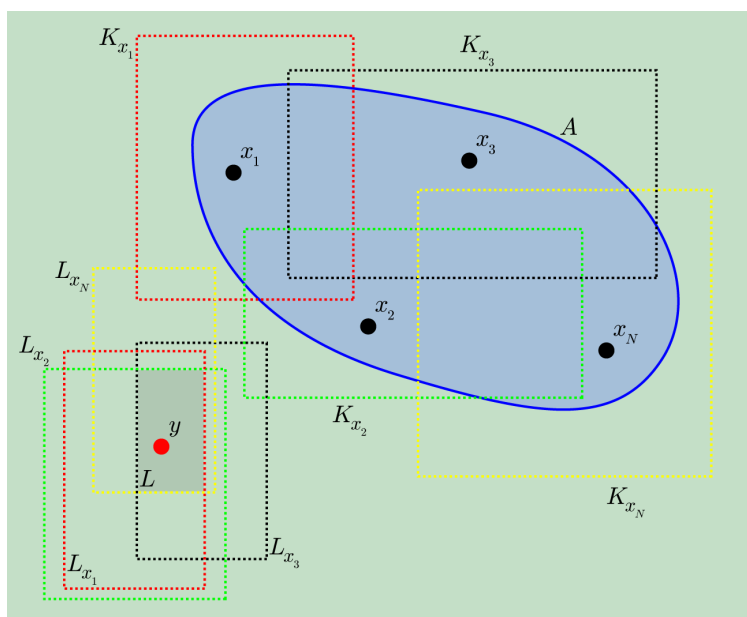
Pokusíme se právě vyslovené tvrzení dokázat. Předpokládejme, že množina A je kompaktní. Zvolme libovolné její pokrytí otevřenými množinami. Každá z nich je ale sjednocením otevřených kvádrů. Stačí proto uvažovat pouze o pokrytí množiny A otevřenými kvádry. Z každého pokrytí kompaktní množiny otevřenými kvádry lze vybrat konečně mnoho kvádrů, které ji také pokrývají. Označme je K_1, K_2, \dots, K_M . M krabic se ale určitě vejde do jedné dostatečně velké krabice. Proto jistě existuje otevřený kvádr K tak, že platí

$$A \subset K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_M \subset K.$$

Množina A je tedy omezená. Teď přijde těžší část důkazu. Musíme ukázat, že je uzavřená. Pokud tomu tak je, znamená to, že doplněk $\mathbf{R}^n \setminus A$ je množina otevřená. A to budeme dokazovat. Nejprve může vzniknout otázka, zda množina $\mathbf{R}^n \setminus A$ třeba není prázdná. To ale nemůže. Množina A je totiž omezená, takže se vejde do nějakého kvádru. A doplněk toho kvádru v \mathbf{R}^n je dokonce podmnožinou množiny $\mathbf{R}^n \setminus A$. Zvolme libovolný, ale pevný bod $y \in \mathbf{R}^n \setminus A$. Potřebujeme najít otevřený kvádr L tak, aby platilo $y \in L \subset \mathbf{R}^n \setminus A$. Zkonstruujeme ho a využijeme při tom kompaktnosti množiny A . Zvolme libovolný bod $x \in A$. Samozřejmě je $x \neq y$. Mezi body x a y je tedy nenulová vzdálenost $|x - y| > 0$. Ať je ale tato vzdálenost jakkoli malá, můžeme sestavit otevřené kvádríčky K_x a L_x , které tyto dva body od sebe oddělí. Tedy $x \in K_x, y \in L_x, K_x \cap L_x = \emptyset$ (obrázek 9.4 ukazuje konstrukci pro několik bodů x_1, x_2, \dots). Bude-li bod x probíhat množinu A , pak ji všechny kvádry $K_x, x \in A$, pokryjí. Protože je ale množina A kompaktní, stačí k jejímu pokrytí pouze konečný počet kvádrů typu K_x , označme je třeba $K_{x_1}, K_{x_2}, \dots, K_{x_N}$. Uvědomte si: Bod x „procestuje“ množinu A , bod $y \in \mathbf{R}^n \setminus A$ je stále pevný. Je obsažen ve všech kvádrech $L_x, x \in A$, a tedy i v kvádrech $L_{x_1}, L_{x_2}, \dots, L_{x_N}$, které jsme konstruovali tak, aby vždy platilo $K_{x_j} \cap L_{x_j} = \emptyset$. Označme $L = L_{x_1} \cap L_{x_2} \cap \dots \cap L_{x_N}$. Je jasné, že kvádr L je otevřený, obsahuje bod y a má prázdný průnik se všemi kvádry $K_{x_j}, j = 1, 2, \dots, N$. Má proto i prázdný průnik s množinou A . K libovolnému bodu y z množiny $\mathbf{R}^n \setminus A$ jsme tím našli otevřený kvádr L , který bod y obsahuje a vejde se do množiny $\mathbf{R}^n \setminus A$. Ta je tedy otevřená a množině A pak už nezbývá, než být uzavřená.

Zbývá ještě dokázat opačné tvrzení, že totiž každá omezená a uzavřená množina je kompaktní. Tento důkaz je ale lehčí než ten předchozí, a tak jej ponecháme do cvičení.

Na závěr odstavce přidejme ještě jeden důležitý pojem, se kterým jsme se již v několika podobách setkali, podstata je však stále stejná. Jde o známý pojem hromadného bodu, který se však tentokrát váže k podmnožinám prostoru \mathbf{R}^n .



Obr. 9.4 K problému kompaktnosti.

Bod x se nazývá *hromadným bodem* množiny $A \subset \mathbf{R}^n$, jestliže každé jeho ryzí okolí obsahuje alespoň jeden bod množiny A . Bod y se nazývá *izolovaným bodem* množiny $A \subset \mathbf{R}^n$, jestliže existuje jeho okolí U tak, že $A \cap U = \{y\}$.

Zkuste se sami přesvědčit o tom, že každé ryzí okolí hromadného bodu dané množiny obsahuje dokonce nekonečně mnoho bodů této množiny. A zkuste také dokázat: Nemá-li množina A žádné izolované body, pak množina všech hromadných bodů množiny A je její uzávěr \bar{A} . Ve cvičení najdete k důkazu návod.

9.1.3 Nevlastní body a jejich okolí

V druhé kapitole prvního dílu, v níž jsme se zabývali funkcemi jedné proměnné, $y = f(x)$, jsme hovořili o *nevlastních limitách* funkcí a *limitách v nevlastních bodech*, tedy o „nekonečnách“. Značili jsme je $\pm\infty$. „Nekonečnům“ jsme se věnovali i v dodatku E prvního dílu, a také v kapitole 8, konkrétně v odstavci 8.1, kde jsme s nekonečny i prováděli některé algebraické operace (příklad 8.7). Jak tomu bude s nevlastními body v případě funkcí více proměnných, tj. budou-li „nekonečna vícerozměrná“? Jak vůbec definujeme nevlastní body prostoru \mathbf{R}^n ? A jak mohou vypadat jejich okolí? Na reálné ose byly dva „nevlastní body“, $+\infty$ a $-\infty$, které byly „libovolně daleko“ od jejího počátku vpravo, resp. vlevo. Jejich okolími jsme rozuměli intervaly (a, ∞) , resp. $(-\infty, b)$ při libovolných hodnotách $a, b \in \mathbf{R}$. Uvědomme si, že nešlo o okolí podle definice, kterou jsme používali pro vlastní body reálné osy. Spíše měly tyto intervaly charakter ryzích okolí, i když ani tato terminologie není přesná — $-\infty$ a $+\infty$ nejsou totiž

„body“ v pravém významu tohoto slova. Sice jsme o nich jako o *bodech* mluvili, ale definovali jsme je pouze ve smyslu limit, nikoli jako nějaké „regulární“ doplnění reálné osy. Také počítání s nekonečny v kapitole 8, třeba zrovna v citovaném příkladu 8.7, bylo míněno ve smyslu limit. Například rovnost $(+\infty) + (+\infty)$ znamenala, že divergují-li posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ k $+\infty$, diverguje posloupnost $\{(a_n + b_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ rovněž k $+\infty$. Abychom $+\infty$ a $-\infty$ přidali k reálné ose jako opravdové body, musíme to udělat tak, že je jako body definujeme. Použijeme k tomu divergentních posloupností. Řekneme, že divergentní posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ jsou *ekvivalentní*, jestliže mají stejnou (nevlastní) limitu. Je samozřejmé, že tato limita může být pouze $+\infty$, nebo $-\infty$. Všechny divergentní posloupnosti se tak roztřídí do dvou disjunktních skupin, zvaných *třídy ekvivalence*. (Vybavujete si pojem faktorizace z odstavce 4.1?) V první třídě jsou posloupnosti s limitou $+\infty$, druhou třídu tvoří posloupnosti s limitou $-\infty$. Tyto třídy nazveme nevlastními body $+\infty$, resp. $-\infty$ reálné osy. Reálnou osu doplněnou nevlastními body značíme $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, jako v dodatku E prvního dílu, nebo \mathbf{R}^+ . Pomocí tabulek z příkladu 8.7 rozšíříme algebraické operace s reálnými čísly také na nevlastní body (některé z operací samozřejmě zůstanou nedefinovány). Nové body musíme „zařadit“ také z hlediska uspořádání: Pro libovolné číslo $a \in \mathbf{R}$ platí $-\infty < a < +\infty$.

Pomocí kartézského součinu vytvoříme n -rozměrný prostor doplněný o nevlastní body. Označíme

$$(\mathbf{R}^n)^+ = \mathbf{R}^+ \times \cdots \times \mathbf{R}^+ \quad (n \text{ faktorů kartézského součinu}).$$

Nevlastním bodem prostoru \mathbf{R}^n rozumíme každý takový bod $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}^n)^+$, kde alespoň jeden prvek x_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je nevlastním bodem reálné osy. Jestliže jsme doplnili prostor \mathbf{R}^n o nevlastní body, měli bychom také odpovídajícím způsobem rozšířit pojem okolí. Rozšíření se bude týkat pouze ryzích okolí. Kompletní zavedení pojmu okolí by vyžadovalo i rozšíření definice topologie na prostor $(\mathbf{R}^n)^+$ a další důslednější úvahy, bez nichž se v dalším textu obejdeme. Ryzí okolí nevlastních bodů však potřebovat budeme. Pro $n = 2$ jsou některá z těch, která jsou obdobou otevřených kvádrů v \mathbf{R}^2 , tj. otevřených obdélníků, popsána v následujícím příkladu a znázorněna na obrázku 9.5.

Příklad 9.9: (Ryzí) okolí nevlastních bodů v $(\mathbf{R}^2)^+$

Zvolme například nevlastní bod $(a, +\infty) \in (\mathbf{R}^2)^+$, $a \in \mathbf{R}$. Speciálním případem ryzího okolí tohoto bodu budeme rozumět množinu

$$\mathcal{K}(a, +\infty) = (a - \delta_1, a + \delta_2) \times (b, +\infty), \quad b \in \mathbf{R},$$

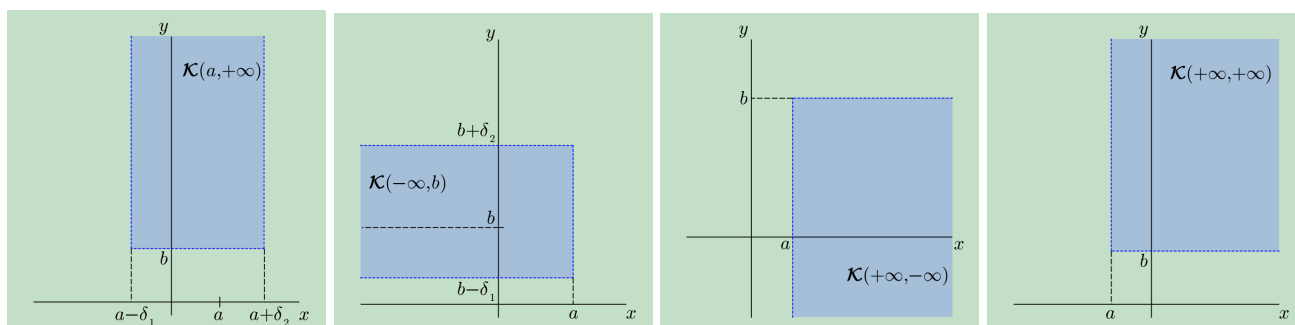
kde δ_1 a δ_2 jsou libovolná kladná čísla a b je libovolné. Podobně zavedeme speciální ryzí okolí dalších nevlastních bodů v $(\mathbf{R}^2)^+$. V souhrnu dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(a, +\infty) &= (a - \delta_1, a + \delta_2) \times (b, +\infty), & \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, b \in \mathbf{R}, \\ \mathcal{K}(a, -\infty) &= (a - \delta_1, a + \delta_2) \times (-\infty, b), & \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, b \in \mathbf{R}, \\ \mathcal{K}(-\infty, b) &= (-\infty, a) \times (b - \delta_1, b + \delta_2), & \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, a \in \mathbf{R}, \\ \mathcal{K}(+\infty, b) &= (a, +\infty) \times (b - \delta_1, b + \delta_2), & \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, a \in \mathbf{R}, \\ \mathcal{K}(-\infty, -\infty) &= (-\infty, a) \times (-\infty, b), & a, b \in \mathbf{R}, \\ \mathcal{K}(-\infty, +\infty) &= (-\infty, a) \times (b, +\infty), & a, b \in \mathbf{R}, \end{aligned} \tag{9.6}$$

$$\mathcal{K}(+\infty, -\infty) = (a, +\infty) \times (-\infty, b), \quad a, b \in \mathbf{R},$$

$$\mathcal{K}(+\infty, +\infty) = (a, +\infty) \times (b, +\infty), \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Jsou takto definovaná okolí otevřenými množinami ve smyslu definice uvedené v odstavci 9.1? Pokud ano, musí být možné vyjádřit je jako sjednocení otevřených kvádrů. Zkusme to například pro případ nevlastního bodu



Obr. 9.5 (Ryzí) okolí nevlastních bodů.

$(a, +\infty)$. Zvolme čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ a číslo b libovolně. Platí například

$$\mathcal{K}(a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (a - \delta_1, a + \delta_2) \times (b, b + n).$$

Zapsali jsme tak okolí $\mathcal{K}(a, +\infty)$ jako sjednocení otevřených kvádrů. Nevadí, že jich musí být nekonečně mnoho, definice jejich počet nijak neomezuje. Okolí $\mathcal{K}(a, +\infty)$ je tedy skutečně otevřenou množinou. Pokuste se podobně zapsat i ostatní okolí zavedená vztahy (9.6). Obecně nazveme *ryzíím okolím* $\mathcal{O}(x)$ *nevlastního bodu* $x \in (\mathbf{R}^2)^+$ každou otevřenou množinu, která obsahuje nějaké jeho okolí typu (9.6).

Pojem (ryzího) okolí nevlastního bodu z příkladu 9.9 snadno zobecníme na případ $(\mathbf{R}^n)^+$. Nechtě $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$, jsou přirozená čísla. Předpokládejme, že $x = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}^n)^+$ je nevlastní bod, přičemž na pozicích s indexy i_1, \dots, i_k je $+\infty$, resp. $-\infty$, ostatní souřadnice jsou reálná čísla. Analogicky se vztahy (9.6) zavedeme speciální typ (ryzího) okolí takového bodu jako kartézský součin n otevřených intervalů

$$\mathcal{K}(a) = K_1 \times \dots \times K_{i_1} \times \dots \times K_{i_k} \times \dots \times K_n, \quad (9.7)$$

kde $K_{i_s} = (-\infty, b_{i_s})$, resp. $(b_{i_s}, +\infty)$, $1 \leq s \leq k$, je-li na pozici i_s $-\infty$, resp. $+\infty$, $K_j = (a_j - \delta_{j1}, a_j + \delta_{j2})$ pro $j \neq i_1, \dots, i_k$. Podobně jako v příkladu 9.9 se snadno ukáže, že okolí (9.7) jsou otevřené množiny. (Ryzíím) okolím $\mathcal{O}(a)$ *nevlastního bodu* $a \in (\mathbf{R}^n)^+$ nazveme každou otevřenou množinu, která obsahuje jisté jeho okolí typu (9.7). (Ryzí) okolí nevlastních bodů jsou neomezené množiny.

Nyní můžeme zobecnit i pojem hromadného bodu tak, aby zahrnoval i případ nevlastních bodů. Bod $a \in (\mathbf{R}^n)^+$ nazýváme *hromadným bodem množiny* $A \subset (\mathbf{R}^n)^+$, jestliže v každém jeho ryzím okolí leží alespoň jeden bod množiny A . Důsledkem této definice je opět skutečnost, že v každém ryzím okolí hromadného bodu dané množiny je dokonce nekonečně mnoho jejích bodů.

9.1.4 Oblasti — rozumné definiční obory

Přestaňme tak trochu teoretizovat, i když je to zajímavé a užitečné, a soustředme se na vymezení takových podmnožin v \mathbf{R}^n (samozřejmě s euklidovskou topologií), které bývají častými definičními obory rozumně se chovajících funkcí. Jsou to *oblasti*.

Pro jejich definici musíme vybudovat ještě jeden pojem. Umíte si intuitivně představit, co by to mohla být *souvislá množina*? No, jistě je to taková, která je jen „z jednoho kusu“, není tedy „potrhaná“. Samozřejmě, že to, co je názorné, musíme ještě vyjádřit jazykem matematiky.

Předpokládejme, že neprázdné množiny A a B v \mathbf{R}^n mají tuto vlastnost: $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$. Pak je nazýváme *oddělené*. Samy množiny jsou tedy nejen disjunktní, ale zůstanou disjunktní, i když jednu z nich „uzavřeme“, ale druhou ne. Jejich uzávěry již však disjunktní být nemusí.

Příklad 9.10: Oddělené kruhy

Příkladem oddělených množin v \mathbf{R}^2 jsou třeba

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 < 1\}.$$

Jejich uzávěry jsou

$$\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \bar{B} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Průniky $\bar{A} \cap B$ a $A \cap \bar{B}$ jsou ještě prázdné, avšak průnikem $\bar{A} \cap \bar{B}$ je množina obsahující jediný bod $\{(1, 0)\}$. Pozor! Množiny \bar{A} a B , nebo A a \bar{B} již oddělené nejsou.

Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Množina A se nazývá *souvislá*, jestliže ji nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Množina A se nazývá *oblast*, je-li otevřená a souvislá. Uzávěr oblasti A , tj. \bar{A} , se nazývá *kontinuum* nebo též (nepříliš vhodně) *uzavřená oblast*.

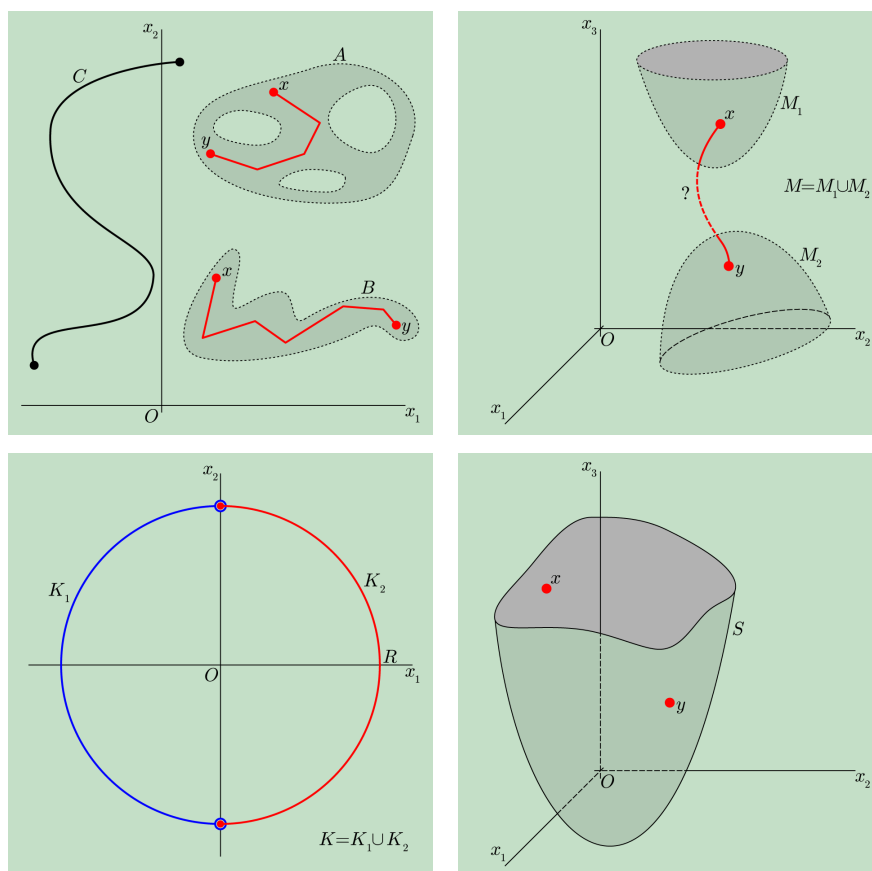
A zapřemýšlejte ještě nad touto definicí: Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *souvislá*, jestliže ji nelze pokrýt dvěma disjunktními otevřenými množinami, které s množinou A mají neprázdný průnik. Myslíte si, že tato definice je ekvivalentní s předchozí? K tomuto problému se vrátíme ještě ve cvičení.

Příklady souvislých i nesouvislých množin jsou na obrázku 9.6.

Příklad 9.11: Souvislé a nesouvislé množiny

Posuďme množiny na obrázku 9.6 z hlediska předchozí obecné definice. Podle ní je důležité, zda množina „je z jednoho kusu, nebo ne“. Množiny A , B a C na obrázku jsou souvislé, stejně jako množiny M_1 , M_2 , K_1 a K_2 . A také povrch S tělesa na posledním z obrázků je souvislá množina. Množina $M = M_1 \cup M_2$ však již na první pohled souvislá není. Je sjednocením dvou oddělených množin M_1 a M_2 . Jak je to však se souvislostí množiny $K = K_1 \cup K_2$? Zapišme ji přesně.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_1 < 0\}, \\ K_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_1 \geq 0\}, \\ K &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2\}. \end{aligned}$$



Obr. 9.6 Souvislé a nesouvislé množiny.

Množina K_1 (půlkružnice o poloměru R bez krajních bodů, v levé polorovině souřadnicové roviny) je souvislá, není otevřená ani uzavřená (zdůvodněte). Množina K_2 (půlkružnice o poloměru R včetně krajních bodů, v pravé polorovině souřadnicové roviny) je také souvislá, navíc uzavřená (opět zdůvodněte). Tyto množiny jsou sice disjunktí, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, ale nejsou oddělené, neboť $\bar{K}_1 \cap K_2 = \{(0, -R)\} \cup \{(0, R)\}$. Množina K (kruh o poloměru R) je souvislá a uzavřená.

Možná praktičtější je tato definice souvislé množiny: Otevřená množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá souvislá, lze-li každé dva její body spojit lomenou čarou, která celá leží v A . Množina A může být i děravá, může mít tvar hodně zatočené žížaly, ale stále může být souvislá (stejně jako skutečná žížala). Vrátime-li se k obrázku 9.6, vidíme, že množiny A , B , M_1 a M_2 jsou souvislé i podle této „praktické“ definice. Za chvíli však poznáme, že tuto definici nelze bohužel použít obecně.

Příklad 9.12: Souvislá množina praktičtěji

Můžeme podle definice souvislé množiny, založené na možnosti spojení dvou libovolných bodů lomenou čarou, která celá v množině leží, posoudit i souvislost množin C , K_1 , K_2 , K a S ? V předchozích úvahách v příkladu 9.11 jsme je za souvislé prohlásili, ale teď vidíme, že jejich body nejde pospojovat lomenými čarami,

kteřé by vždy celé ležely v posuzované množině. Čím je tento nesoulad způsoben? Je to tím, že praktická definice pomocí lomených čar se omezuje na *otevřené* množiny, jimiž množiny C , K_1 , K_2 , K a S nejsou. Obecná a praktická definice tedy nejsou ekvivalentní.

A další otázka je na světě: Jsou uvedené dvě definice ekvivalentní pro otevřenou množinu? Zde je odpověď kladná. Jak to ale dokázat? Zkusíme naznačit alespoň myšlenku důkazu. Předpokládejme, že otevřená množina A je souvislá podle „hlavní“ definice, tj. nelze ji zapsat jako sjednocení dvou oddělených množin. Další úvahu povedeme sporem. Předpokládejme, že existují alespoň dva body x a z této množiny, které nelze spojit lomenou čarou ležící v A . Znamená to, že ať spojíme body x a z lomenou čarou jakkoli, vždy bude nějaký její bod ležet mimo množinu A . Spor, ke kterému bychom na základě tohoto předpokladu měli dojít, spočívá v závěru, že množina A je sjednocením oddělených množin. Pomocí „šikovného triku“ roztřídíme body množiny A . Body x a y prohlásíme za ekvivalentní, $x \sim y$, je-li možné je spojit lomenou čarou, která celá leží v A . Označme $A_x = \{y \in A \mid y \sim x\}$. Pro každé dva body $x, z \in A$ platí buď $A_x = A_z$, nebo $A_x \cap A_z = \emptyset$. Množina A je tedy sjednocením disjunktčních množin typu A_x . Ukážeme, že tyto množiny jsou otevřené. Vezměme třeba libovolný bod $y \in A_x$. Protože $A_x \subset A$ a množina A je otevřená, existuje otevřené okolí K bodu y tak, že $K \subset A$. Protože je K souvislá množina, lze každý její bod spojit s bodem y lomenou čarou, která leží v K . Dokonce je možné provést spojení úsečkou. Libovolný bod okolí K lze tedy spojit lomenou čarou ležící v A s bodem x . Proto je $K \subset A_x$, množina A_x je otevřená. Zvolme bod z , který neleží v A_x . Z toho, že množiny A_x a A_z jsou disjunktční a otevřené, plyne $\overline{A_x} \cap A_z = A_x \cap \overline{A_z} = \emptyset$. Jsou tedy dokonce oddělené. A to je očekávaný spor. V případě, že by v A existovaly body, které nelze spojit lomenou čarou ležící v A , byla by množina A sjednocením oddělených množin.

Důkaz musí mít ještě druhou část. Z předpokladu, že každé dva body otevřené množiny A lze spojit lomenou čarou ležící v A , musíme umět vyvodit, že množinu A nelze zapsat jako sjednocení oddělených množin. Tato část důkazu je ale tak jednoduchá, že ji čtenář jistě zvládne sám.

Poznatky z tohoto příkladu můžeme shrnout takto: Posuzujeme-li souvislost otevřené množiny, můžeme pracovat s definicí využívající lomených čar. Samozřejmě, existují i množiny, které nejsou otevřené, a přitom s každými svými dvěma body obsahují i nějakou jejich lomenou spojnicí. Příkladem je třeba uzavřený kruh $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. A jistě vymyslíte i další příklady. A dokážete najít nějakou společnou charakteristiku množin, pro které se definice s lomenými čarami hodí?

Pozn.: Viděli jsme, že definice souvislé množiny využívající lomených čar není univerzální. Je proto vhodnější vycházet z obecné definice a „pomůcku“ založenou na lomených čarách formulovat jako tvrzení: Otevřená množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je souvislá právě tehdy, lze-li její libovolné dva body $x \neq y$ spojit lomenou čarou, která leží v A .

Příklad 9.13: Divné množiny

Proč nestačí v definici oddělených množin požadavek $A \cap B = \emptyset$? Je to jednoduché. Tak třeba množina $A = \mathbf{Q}$ všech racionálních čísel a množina $B = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ všech iracionálních čísel jsou disjunktční. Jejich sjednocením je reálná osa. Pokud bychom jako oddělené definovali disjunktční množiny a nepožadovali nic silnějšího, byla by reálná osa sjednocením dvou oddělených množin a tedy nesouvislá. A taková definice by odporovala zkušenosti a praktickému počítání.

Uvažujme o následujících dvou podmnožinách prostoru \mathbf{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x, y \in \mathbf{Q}\}, \quad B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x, y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}.$$

Jednoduše jde o množinu bodů v uzavřeném jednotkovém čtverci $\overline{K} = [0, 1]^2$, které mají obě souřadnice racionální, a o množinu bodů v tomtéž čtverci, jenže s oběma souřadnicemi iracionálními. Jsou tyto množiny

oddělené, nebo ne? Na to snadno přijdeme, uděláme-li si uzávěry množin A a B . Platí $\overline{A} = \overline{B} = \overline{K}$. Že to je divné? Ale není. Vždyť se skutečností, že v libovolně malém intervalu obsahujícím racionální číslo leží nekonečně mnoho čísel iracionálních a opačně, jsme se setkali již víckrát. Zde sice pracujeme s body o dvou souřadnicích a místo intervalů zde vystupují otevřené dvojrozměrné kvádry, ale podstata je stejná. Vidíme, že $\overline{A} \cap B = B$ a $A \cap \overline{B} = A$. Množiny A a B jsou sice disjunktní ($A \cap B = \emptyset$) ale nejsou oddělené.

Uvažujme o obecné množině $A \subset \mathbf{R}^n$. Nemusí být souvislá. Nechť její podmnožina $B \subset A$ je souvislá. Nazýváme ji *komponenta* množiny A , jestliže pro každou souvislou množinu C , pro kterou je $B \subset C$, je $C = B$. Komponenty jsou tedy jakési „největší souvislé části“ množin.

Vrátíme-li se k obrázku 9.6, můžeme si všimnout, že některé souvislé množiny (na obrázku jsou oblasti, nebo kontinua) se podobají ementálu, jiné vypadají jako jitrnice. I z topologického hlediska je mezi nimi rozdíl podle takzvané násobnosti jejich souvislosti. Tento pojem je aplikován na oblasti a kontinua.

Množina $A \subset \mathbf{R}^n$, která je oblastí, resp. kontinuem, se nazývá *n -násobně souvislá*, jestliže její doplněk v \mathbf{R}^n , tj. množina $\mathbf{R}^n \setminus A$, má právě n komponent.

V prvním obrázku 9.6 jsou oblastmi množiny A a B . Množina B je jednonásobně souvislá, množina A je čtyřnásobně souvislá. Obecně máme třídění oblastí na jednonásobně souvislé, tedy „jitrnice“, a vícenásobně souvislé, „ementály“. Oblasti bývají častými definičními obory funkcí více proměnných. Nejjednodušší jednonásobně souvislé oblasti jsou otevřené kvádry a otevřené koule.

9.1.5 Cvičení

1. Nechť U je otevřená množina v \mathbf{R}^n s euklidovskou (přirozenou) topologií a $a \in U$ bod. Dokažte, že $U \setminus \{a\}$ je otevřená množina.
2. Dokažte vlastnosti systému τ otevřených množin v \mathbf{R}^n s euklidovskou topologií.
Návod: Při důkazu třetí vlastnosti si uvědomte, že průnik dvou otevřených kvádrů je buď otevřený kvádr, nebo prázdná množina.
3. Ukažte, že každý otevřený kvádr K lze vyjádřit jako sjednocení otevřených koulí.
Návod: Zvolte libovolný bod $x \in K$ a sestrojte jakoukoli otevřenou kouli $B(x, r)$ tak, aby $B(x, r) \subset K$. Poloměr r můžete zvolit například jako minimum vzdáleností bodu x od stěn kvádru. Pro to si musíte uvědomit, jak je definována stěna n -rozměrného kvádru. Nechcete-li se trápit s obecným n -rozměrným případem, řešte úlohu jen pro $n = 2$ a $n = 3$.
4. Dokažte, že průnikem všech intervalů

$$I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), \quad n \in \mathbf{N},$$

je množina $\{0\}$ (příklad 9.1).

Návod: Je zřejmé, že bod $a = 0$ patří do intervalu I_n pro libovolné n . Dále ukažte, že pro libovolný bod $x \neq 0$ existuje n tak, že x do intervalu I_n nenáleží.

5. Ukažte, že v \mathbf{R}^n existuje taková báze euklidovské topologie tvořená otevřenými kvádry, která je spočetná. Totéž ukažte pro otevřené koule.

Návod: Tvrzení vyplývá ze skutečnosti, že každý otevřený kvádr $K \subset \mathbf{R}^n$ je kartézským součinem otevřených intervalů. Každý otevřený interval je podmnožinou prostoru \mathbf{R} , na němž je také zadána euklidovská topologie. Na základě úvah v dodatku F víme, že pro euklidovskou topologii na \mathbf{R} existuje spočetná báze.

6. Dokončete druhý směr důkazu z příkladu 9.8. Dokažte, že každá omezená a uzavřená podmnožina prostoru \mathbf{R}^n s euklidovskou topologií je kompaktní.

Návod: Vyjděte z předpokladu, že množina A je uzavřená a omezená. Z omezenosti plyne, že se vejde do otevřeného kvádru K . Platí $A \subset K \subset \overline{K}$. Zvolte libovolné otevřené pokrytí \mathcal{P} množiny A a přidejte množinu $\mathbf{R}^n \setminus A$. Je tato přidaná množina otevřená, uzavřená, nebo „ani taková, ani maková“? Pokrývají množiny pokrytí \mathcal{P} s doplněnou množinou $\mathbf{R}^n \setminus A$ kvádr \overline{K} ? Využijte kompaktnosti kvádru \overline{K} a důkaz dokončete.

7. Dokažte, že množina všech hromadných bodů množiny A sjednocená s množinou všech izolovaných bodů množiny A je jejím uzávěrem.

Návod: Ukažte, že každý bod vnitřku dané množiny je jejím hromadným bodem a každý bod hranice je buď hromadným, nebo izolovaným bodem. Opačně, sporem ukažte, že hromadný ani izolovaný bod množiny A nemůže být bodem jejího vnějšku.

8. Ukažte, že pro libovolné množiny $A, B \subset X$ obecného topologického prostoru (X, τ) platí:

- | | |
|---|--|
| a) $A \subset \overline{A}$, | d) $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$, |
| b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, | |
| c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, | e) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. |

9. Ukažte, že pro libovolnou podmnožinu $A \subset X$ obecného topologického prostoru (X, τ) platí:

- Ukažte, že vnitřek a vnějšek množiny A jsou otevřené množiny (vyjádřete je jako sjednocení vhodně zvolených otevřených kvádrů).
- Množina A je otevřená právě tehdy, je-li rovna svému vnitřku.
- Množina A je uzavřená právě tehdy, je-li rovna svému uzávěru.
- Hranice množiny A je rovna hranici množiny $X \setminus A$.
- Pro každou otevřenou množinu $B \subset A$ platí $B \subset \text{int}A$ (tj. vnitřek je největší otevřená podmnožina A).
- Pro každou uzavřenou množinu B obsahující A (tj. $A \subset B$) platí $\overline{A} \subset B$ (tj. uzávěr je nejmenší uzavřená množina obsahující A).

10. Rozhodněte, zda následující množiny jsou kompaktní, otevřené, uzavřené, souvislé, jednoduše souvislé, omezené v \mathbf{R}^n s euklidovskou topologií. Určete jejich vnitřek, vnějšek a hranici.

- | | |
|--|--|
| a) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, \text{ kde } r > 0, (x, y) \neq (0, 0)\}$, | d) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}\}$, |
| b) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0\}$, | e) $A_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}\}$, |
| c) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in (0, 1], y = \frac{1}{x}\}$, | f) $A_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, |
| | g) $A_7 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{N}, y \in [0, 1]\}$. |

11. Určete vnitřek, vnějšek, hranici a uzávěr množin $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = [0, 1)$, $A_3 = (0, 1]$, $A_4 = [0, 1]$, $A_5 = \mathbf{N}$, $A_6 = \mathbf{Q}$ v topologickém prostoru \mathbf{R} s přirozenou topologií. O těchto množinách také rozhodněte, zda jsou otevřené, uzavřené, souvislé, kompaktní nebo omezené. Nalezněte všechny jejich hromadné a izolované body.

12. Přeformulujte definici topologických pojmů vnitřek, vnějšek, hranice, uzávěr, hromadný bod a izolovaný bod pro případ obecné topologie (viz příklad 9.5). Zopakujte si definici kompaktnosti množiny uvedenou v dodatku F prvního dílu (viz příklad 9.8).
Návod: Nahraďte v definicích pojem „otevřený kvádr“ pojmem „otevřená množina“.
- *13. Řešte úlohu 11 pro případ, kdy je na \mathbf{R} zadána triviální topologie $\tau = \{\emptyset, \mathbf{R}\}$ (viz příklad 9.5).
- *14. Řešte úlohu 11 pro případ, kdy je na \mathbf{R} zadána diskretní topologie $\tau = 2^{\mathbf{R}}$ (viz příklad 9.5).
- *15. Vraťte se k definicím souvislé množiny před příkladem 9.11 a ukažte, že v topologickém prostoru \mathbf{R}^n s Euklidovskou topologií jsou obě definice ekvivalentní.
Návod: Uvažujme, že množina A je nesouvislá. Předpokládejte (podle druhé definice), že existují disjunktní otevřené množiny U a V tak, že $A \subset U \cup V$ a $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$. Ukažte, že množiny $B = A \cap U$ a $C = A \cap V$ jsou oddělené a platí $A = B \cup C$ (množina A je tedy nesouvislá také podle první definice). Naopak ukažte, že lze-li množinu zapsat jako sjednocení dvou oddělených množin, tj. $A = B \cup C$, $\overline{B} \cap C = B \cap \overline{C} = \emptyset$, pak existují disjunktní otevřené množiny U a V tak, že $A \subset U \cup V$ a $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$. Využijte následující vlastnosti Euklidovských prostorů: Nechť A je uzavřená množina a x bod, který v ní neleží. Pak existují disjunktní otevřené množiny R a S , pro které $x \in R$ a $A \subset S$.
16. Na vhodném příkladu ukažte, že oddělenost množin nelze definovat pouze jedním ze vztahů $\overline{B} \cap C = \emptyset$, resp. $B \cap \overline{C} = \emptyset$, ale je potřeba uvést v definici oba. Tj. nalezněte takové množiny B a C , pro které $\overline{B} \cap C = \emptyset$, ale $B \cap \overline{C} \neq \emptyset$.

9.2 Skalární funkce více proměnných

V předchozím odstavci jsme si vcelku důkladně připravili pojmy týkající se vhodných definičních oborů funkcí více proměnných. Nyní budeme tyto funkce definovat a studovat jejich vlastnosti. Obdobně jako u funkcí jedné proměnné půjde o limity, spojitost a derivace. Výhoda důkladné přípravy pojmů v předchozím odstavci se ukáže již při budování pojmu limity, zejména v nevlastním bodě. Samotnému pojmu limity a s ním úzce spjatého pojmu spojitosti bude věnována velká pozornost. Někdo se nad tím může pozastavit: Vždyť jak často se s potřebou výpočtu limit setkáváme v praktických příkladech? Málo. Potřebujeme spíše derivovat, integrovat, řešit diferenciální rovnice. S příklady na limity se setkáváme ponejvíce v matematických sbírkách, kde slouží k procvičení naučené látky. Taková úvaha by byla poněkud krátkozraká. Řada vlastností funkcí, a vůbec možnost s nimi rozumně operovat při běžných výpočtech, je založena na spojitosti. A spojitost je těsně spjata s pojmem limity. Opět by mohla vzniknout námitka, že spojitost přece intuitivně dobře chápeme — spojitá funkce nemá „zprětrhaný“ graf. Umíte si však představit graf funkce tří proměnných? Není to dost dobře možné ani u funkce dvou proměnných, je-li složitější, nebo chová-li se v okolí některého bodu „podezřele“. Limitě tedy *potřebujeme* porozumět, i když její výpočet v praktických příkladech skutečně nebude na „dením pořádku“. Abychom porozumění podpořili, budeme se vedle teoretických úvah věnovat i řadě praktických příkladů.

9.2.1 Funkce, limity, spojitost

V kapitole 2 prvního dílu, konkrétně v odstavci 2.1.1, jsme zavedli (reálnou) funkci jedné (reálné) proměnné pomocí jakéhosi pravidla či předpisu, jímž jsme každé hodnotě (bodu) x z definičního oboru funkce $D \in \mathbf{R}$ přisoudili právě jednu reálnou hodnotu $f(x)$. Takovému předpisu říkáme také *zobrazení*. V odstavci 2.1.1 jsme toto zobrazení prakticky realizovali tabulkou, nebo grafem, popřípadě vzorcem. Nebyl-li v případě vzorce definiční obor funkce zadán, stanovili jsme takzvaný přirozený definiční obor jako množinu všech takových bodů $x \in \mathbf{R}$, pro něž měl vzorec smysl, šel vyčíslit. V případě funkce více proměnných budeme funkční předpis v praxi zadávat již takřka výhradně vzorcem. O grafech funkcí budeme sice také hovořit, ty však budeme dostávat právě pomocí definičních vzorců.

Reálnou skalární funkcí, neboli (reálnou) funkcí n (reálných) proměnných, budeme rozumět předpis či pravidlo, jímž uspořádané n -tici reálných čísel, tj. bodu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, kde $D \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná množina, přiřadíme reálné číslo $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}$. Jedná se tedy o zobrazení

$$f : D \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}.$$

Množina D je *definičním oborem* funkce f , množina

$$H = \{y \in \mathbf{R} \mid \text{existuje } x \in D \text{ tak, že } y = f(x)\}$$

je *obor hodnot* funkce f . *Grafem funkce f* je množina

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\}.$$

Příklad 9.14: Přirozený definiční obor funkce

Řekli jsme, že zadáme-li funkční předpis vzorcem bez uvedení definičního oboru, musíme se zajímat o to, pro které body $x \in \mathbf{R}^n$ lze vzorec vyčíslit. Všechny takové body potom tvoří *přirozený definiční obor* funkce. Předpokládejme, že je funkce zadána vzorcem

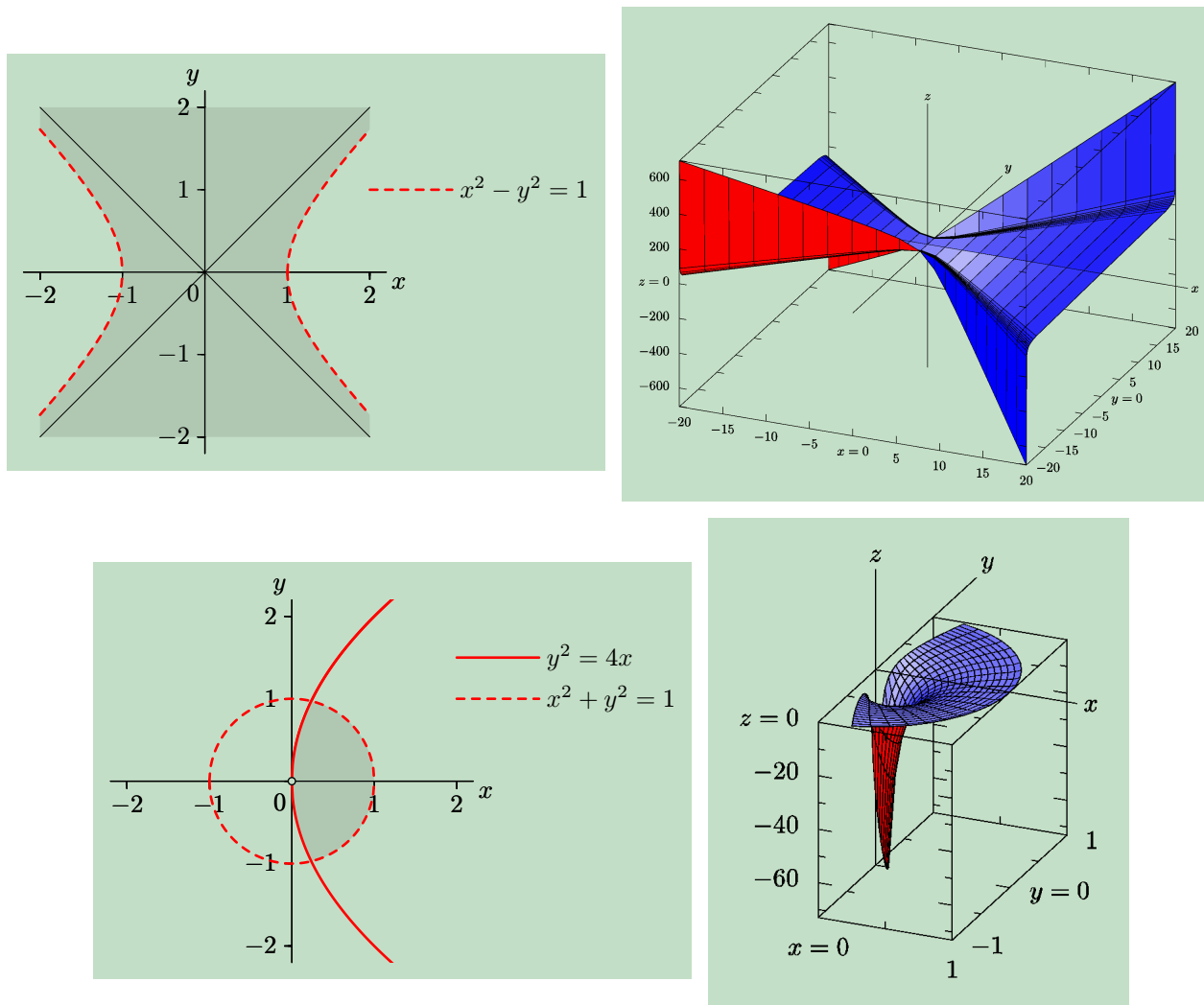
$$z = f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}, \quad \text{kde jsme označili } (x_1, x_2) = (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Aby bylo možné vzorec vyčíslit, musí být výraz pod odmocninou ve jmenovateli kladný, tedy

$$1 - x^2 + y^2 > 0 \implies x^2 - y^2 < 1.$$

Této nerovnosti vyhovují všechny body (x, y) v rovině, které leží na levém horním obrázku 9.7 v tmavší části omezené hyperbolou. Na hyperbole již ležet nemohou, neboť v takovém případě by ve jmenovateli vzorce byla nula. V pravé horní části obrázku je znázorněn graf funkce na množině $([-20, 20] \times [-20, 20]) \cap D$, která je pouze částí jejího (neomezeného) definičního oboru. (Toho, že v některých částech se zdá, že graf není hladký, si

nevšímejte. Počítačové programy umožňující kreslení grafů mají omezenou přesnost výpočtu a nemohou vykreslit prudké změny grafu jako hladké. Proto na grafu vidíme v oblasti prudkých změn blízko hranice definičního oboru zlomy.)



Obr. 9.7 Přirozený definiční obor funkcí.

Jiný příklad funkce, trochu složitější, je dán vztahem

$$z = f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}.$$

Přirozený definiční obor (dolní levá část obrázku 9.7) určíme z podmínek, že pod odmocninou v čitateli zlomku musí být nezáporný výraz, argument logaritmu musí být kladný a ve jmenovateli nesmí být nula. Odtud

$$\begin{aligned} 4x - y^2 \geq 0, \quad 1 - x^2 - y^2 > 0, \quad \ln(1 - x^2 - y^2) \neq 0 &\implies \\ \implies D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 \leq 4x\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

756 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Přirozený definiční obor funkce f je tedy průnikem dvou podmnožin roviny, z nichž jedna je vymezena parabolou o rovnici $y^2 = 4x$ a druhá je vnitřkem jednotkového kruhu se středem v počátku, přičemž počátek musíme z množiny vyjmout. Graf funkce je na pravém dolním obrázku.

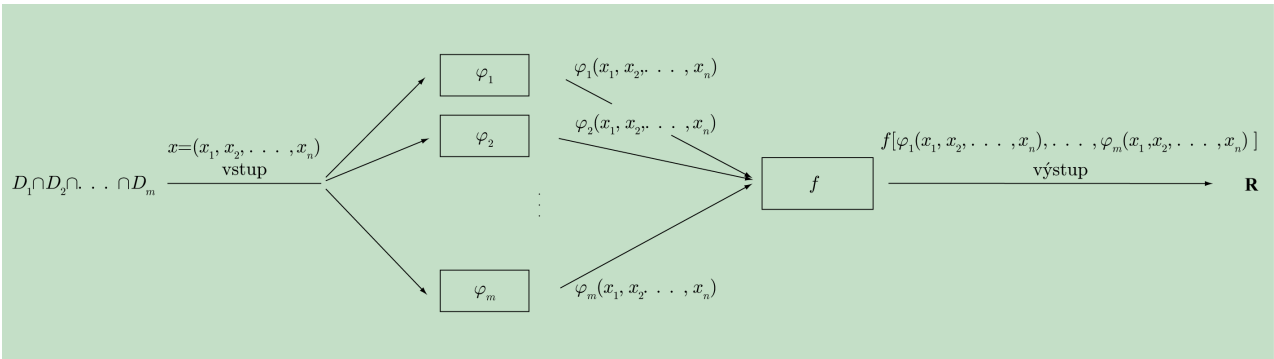
Obdobně jako jsme v odstavci 2.1.3 definovali skládání funkcí pro funkce jedné proměnné, lze pojem *složené funkce* zavést i v případě funkcí více proměnných. Názorně jej ukazuje obrázek 9.8. Předpokládejme, že je dáno m funkcí n proměnných

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: D_1 \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow y_1 = \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}, \\ \varphi_2 &: D_2 \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow y_2 = \varphi_2(x) = \varphi_2(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}, \\ &\dots \dots, \\ \varphi_m &: D_m \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow y_m = \varphi_m(x) = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

jejichž definiční obory $D_1, \dots, D_m \subset \mathbf{R}^n$ mají neprázdný průnik $D = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_m$. Dále je dána funkce m proměnných

$$f : D_f \ni y = (y_1, \dots, y_m) \longrightarrow z = f(y) = f(y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{R}.$$

Pokud pro obory hodnot funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ platí $H = H_1 \times \dots \times H_m \subset D_f$, můžeme pro



Obr. 9.8 Skládání funkcí.

$x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ dosadit do funkčního předpisu f m -tici

$$(y_1, \dots, y_m) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Vzniká *složená funkce*

$$\begin{aligned} F : D \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow F(x) = F(x_1, \dots, x_n) = & \qquad (9.8) \\ & = f[\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

s *vnitřními složkami* $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ a *vnější složkou* f . Do každého funkčního předpisu φ_j vstupuje bod $x \in D \subset D_j$, tj. n -tice proměnných $x = (x_1, \dots, x_n)$, dílčím výstupem je hodnota $y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$, a pokud je m -tice $y = (y_1, \dots, y_m)$ prvkem definičního oboru funkce f , může být vstupem do funkčního předpisu f . Výstupem je hodnota $f(y_1, \dots, y_m) = F(x_1, \dots, x_n)$.

Jak je to s pojmem limity funkce více proměnných? Základní myšlenka je sice stejná jako u funkce jedné proměnné, ale situace, které mohou u funkcí více proměnných nastat, „přibližuje-li se“ proměnná k nějakému bodu, se vyznačují větší variabilitou, a to především ze dvou důvodů.

- V odstavci 2.1.5 jsme viděli, že pro existenci limity funkce ve vlastním bodě je důležité, „z které strany“ se k tomuto bodu blížíme. Hovořili jsme tak o limitě funkce v daném bodě zleva a zprava. Limita existovala právě tehdy, když existovaly jednostranné limity a byly stejné. K danému bodu n -rozměrného prostoru se můžeme blížit z různých stran a různými způsoby. Jistě tušíte, že limita funkce v daném bodě bude existovat právě tehdy, jestliže výsledek všech těchto rozmanitých způsobů přibližování bude stejný. Jak ale způsoby přibližování popsat tak, aby se matematikové nezlobili?
- U funkce jedné proměnné jsme se často setkávali se situací, že definičním oborem byl uzavřený interval $[a, b]$. Pak bylo možné zajímat se o to, jak se funkce chová, přibližujeme-li se k bodu a zprava, nebo k bodu b zleva, tj. zjišťovat v bodě a limitu, spojitost, derivaci, apod., zprava, v bodě b pak totéž zleva. U funkcí více proměnných je i tento problém složitější. Vezměme třeba funkci dvou proměnných $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Jejím přirozeným definičním oborem je množina všech takových bodů $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, pro něž je výraz pod odmocninou nezáporný, tj. $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. D je uzavřený kruh o poloměru $r = 1$. Jak je to ale s limitou, spojitostí, či parciálními derivacemi funkce $f(x, y)$ na hranici množiny D ? Intuitivně samozřejmě tušíme, že limita funkce $f(x, y)$ v bodech hranice oboru D existuje a je nulová, a že funkce je v těchto bodech spojitá. Definicí limity však pro takový případ nemáme.

Pozn.: Ještě terminologická poznámka, která nám umožní formulovat definice limity „univerzálně“, tj. společně pro vlastní i nevlastní body prostoru \mathbf{R}^n a vlastní i nevlastní limity. Hovoříme-li o okolích nevlastních bodů, jde vždy jen o okolí ryzí. Proto jsme také v odstavci 9.1.3 psali slovo „ryzí“ do závorky — jiná okolí nevlastních bodů totiž nemáme. Budeme-li proto v následujícím textu hovořit o „okolích“ či „ryzích okolích“, pak v případě nevlastních bodů znamenají tato vyjádření totéž, totiž jejich okolí zavedená v odstavci 9.1.3. Pro vlastní body budeme pojmy „okolí“ a „ryzí okolí“ používat samozřejmě tak, jak jsme je definovali v odstavci 9.1.1. Okolím vlastního bodu je jakákoli otevřená množina, která jej obsahuje, ryzí okolí vlastního bodu vznikne z jeho okolí vyjmutím tohoto bodu.

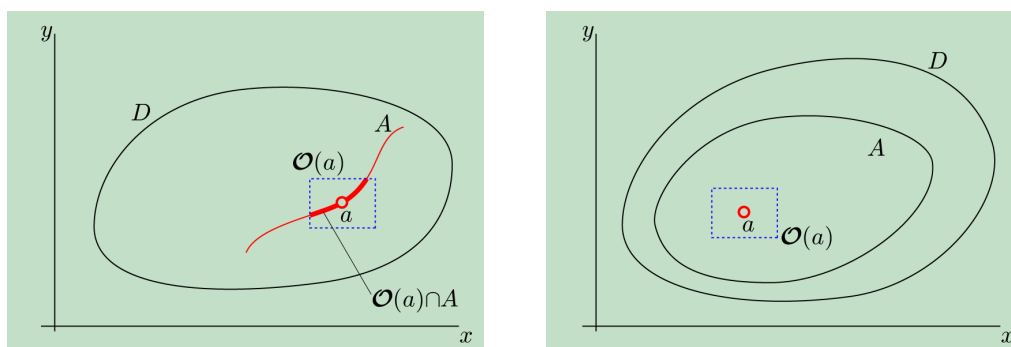
Nyní se už věnujme formulaci definic samotných. První z problémů, které jsme naznačili, vyřešíme poměrně snadno. Zavedeme k tomu pojem limity funkce v bodě *vzhledem k množině*. Definujeme jej pro situaci, která sice není zcela obecná, je však velmi názorná a vystačíme si s

ní ve většině praktických příkladů. Vychází z předpokladu, že definiční obor D obsahuje jisté ryzí okolí bodu a , v němž limitu zkoumáme.

Předpokládejme, že $D \subset \mathbf{R}^n$ obsahuje jisté ryzí okolí bodu $a \in (\mathbf{R}^n)^+$, a nechť a je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbf{R}^n$. Bod $L \in \mathbf{R}^+$ se nazývá *limitou funkce* $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ v bodě a vzhledem k množině A , jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje takové ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a , že pro všechny body $x \in \mathcal{O}(a) \cap A$ je funkce $f(x)$ definována a platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Pro limitu funkce v bodě vzhledem k množině používáme zápis

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = L.$$

Závěr definice se dá zapsat také tak, že $f(\mathcal{O}(a) \cap A) \subset \mathcal{O}(L)$. Množina $\mathcal{O}(a) \cap A$ se tedy pomocí funkce f zobrazí dovnitř okolí $\mathcal{O}(L)$. Definicí limity v bodě vzhledem k množině ilustruje levý obrázek 9.9.



Obr. 9.9 K definici limity.

Pozn. 1: V definici se požaduje, aby bod a , v němž posuzujeme limitu funkce vzhledem k množině A , byl hromadným bodem této množiny. Smysl tohoto požadavku je jasný. Definice limity by totiž pro případ, kdy by bod a nebyl hromadným bodem množiny A , nedávala žádný smysl (nebylo by možné se k bodu a po množině A „neomezeně blížit“). Proč ale také nepožadujeme, aby bod a byl hromadným bodem definičního oboru D ? Jednoduše proto, že tento požadavek je automaticky zajištěn předpokladem, že definiční obor obsahuje nějaké ryzí okolí bodu a . Z definice ryzího okolí plyne, že bod a je jeho hromadným bodem. Je tedy i hromadným bodem množiny D , která toto okolí obsahuje.

Pozn. 2: Může se stát, že by množina A byla prázdná? V definici požadavek $A \neq \emptyset$ nebyl, a přitom by pro prázdnou množinu definice zjevně neměla smysl. To, že množina A prázdná není, plyne přímo z předpokladu, že bod a je jejím hromadným bodem. Prázdná množina totiž žádné hromadné body nemá. Víte proč?

Předpokládejme, že $D \subset \mathbf{R}^n$ obsahuje jisté ryzí okolí bodu $a \in (\mathbf{R}^n)^+$. Bod $L \in \mathbf{R}^+$ se nazývá *limitou funkce* $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ v bodě a , jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje takové ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a , že pro všechny body $x \in \mathcal{O}(a)$ je funkce $f(x)$ definována a platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Zapisujeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Příklad 9.15: Souvislost definic limity

Souvisejí spolu nějak obě předchozí definice? Předpokládejme, že bod L je limitou funkce $f(x)$ v bodě a vzhledem k množině A a že množina A obsahuje jisté ryzí okolí bodu a . Pak je také bod L limitou funkce $f(x)$ v bodě a . Situaci ukazuje obrázek 9.9 vpravo. Skutečně, označme $\mathcal{O}_1(a)$ ryzí okolí bodu a , které je obsaženo v množině A . Je-li bod L limitou dané funkce v bodě a vzhledem k množině A , pak ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_2(a)$ bodu a takové, že $f(x)$ je na něm definována a platí $f(\mathcal{O}_2(a) \cap A) \subset \mathcal{O}(L)$. Označme $\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}_1(a) \cap \mathcal{O}_2(a)$. Pak také $f(\mathcal{O}(a)) \subset \mathcal{O}(L)$. K libovolnému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L jsme tedy našli ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$, které splňuje definici limity.

Dále je jasné, že jsou-li limity funkce $f(x)$ v daném bodě a vzhledem ke dvěma různým množinám A a B různé, pak funkce $f(x)$ v bodě a nemá limitu. Kdyby totiž měla v bodě a limitu L , pak by pro libovolné okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existovalo ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že by funkce na $\mathcal{O}(a)$ byla definována a platilo by $f(\mathcal{O}(a)) \subset \mathcal{O}(L)$. Pro libovolnou množinu A , jejímž hromadným bodem by byl bod a , by samozřejmě platilo $f(\mathcal{O}(a) \cap A) \subset \mathcal{O}(L)$. Číslo L by tak bylo limitou funkce $f(x)$ v bodě a vzhledem ke každé množině, jejímž hromadným bodem by byl bod a .

Definici limity bychom mohli vyslovit také v následující ekvivalentní podobě: Číslo L se nazývá *limitou funkce* $f(x)$ v bodě a , jestliže existuje taková množina A obsahující nějaké ryzí okolí bodu a , že platí

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = L.$$

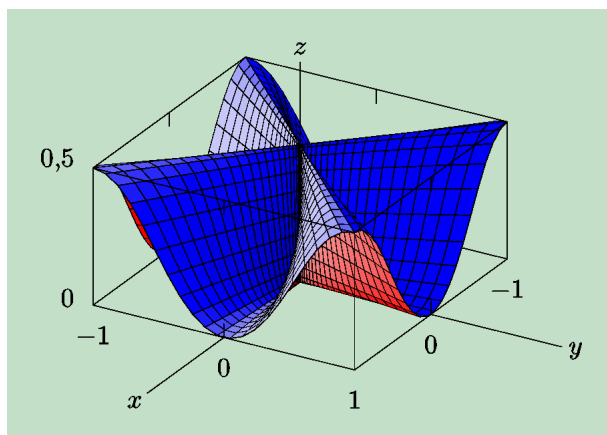
Několik následujících příkladů slouží k pochopení pojmu limity vzhledem v množině i pojmu limity.

Příklad 9.16: Různé limity téže funkce v daném bodě vzhledem k různým množinám

Přirozeným definičním oborem funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

je celá rovina \mathbf{R}^2 s výjimkou počátku soustavy souřadnic, tj. $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Graf funkce $f(x, y)$ na podmnožině definičního oboru $[-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\}$ je na obrázku 9.10. Blížíme-li se k bodu $(0, 0)$ jakýmkoli způsobem, blíží se čísel i jmenovatel zlomku k nule. V blízkosti počátku soustavy souřadnic se funkce chová jako neurčitý výraz „ $\frac{0}{0}$ “. Jak je to s limitou funkce v bodě $a = (0, 0)$? Vyzkoušejme, zda budou existovat a čemu budou rovny limity funkce v tomto bodě vzhledem k různým množinám. Nejjednodušší je blížit se k bodu $a = (0, 0)$ třeba po ose x , nebo po ose y . V prvním případě jde o limitu vzhledem k množině $A = \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$. Pro body $(x, y) \in A$ je $f(x, y) = 0$. Je-li $\mathcal{O}(a)$ libovolné ryzí okolí bodu $a = (0, 0)$, pak pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(a) \cap A$ je $f(x, y) = 0$. Limitou funkce v bodě $a = (0, 0)$ vzhledem k množině A je tedy číslo 0. Skutečně, ať zvolíme jakékoli okolí $\mathcal{O}(0)$ bodu $L = 0$, pak dokonce pro *libovolné ryzí*



Obr. 9.10 K příkladu 9.16.

okolí $\mathcal{O}(a)$ platí $f(\mathcal{O}(a) \cap A) = \{0\} \subset \mathcal{O}(0)$. Obdobnou úvahou zjistíme že také limita funkce $f(x, y)$ v bodě $a = (0, 0)$ vzhledem k množině $B = \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$ je nulová. Znamená to, že limita funkce $f(x, y)$ v bodě $a = (0, 0)$ existuje a je nulová? Zdaleka ne! Zvolme jako množinu A libovolnou přímku procházející bodem a . Po ní se nyní budeme k bodu a blížit. Rovnice přímky (kromě osy y) je $y = kx$, kde $k \in \mathbf{R}$ je její směrnice. Na této přímce, s výjimkou bodu $a = (0, 0)$, v němž není definována, nabývá naše funkce hodnot

$$f(x, y) = f(x, kx) = \frac{x^2 \cdot k^2 x^2}{x^4 + k^4 x^4} = \frac{k^2}{1 + k^4},$$

nezávisle na poloze bodu (x, kx) na dané přímce. Týchž hodnot nabývá na průniku libovolného ryzího okolí bodu a s přímkou. Limity funkce v bodě $a = (0, 0)$ vzhledem k různým přímkám $y = kx$ existují, jsou však závislé na jejich směrnici. Limita jako taková proto neexistuje. Ověřte ještě, že pro $k = 0$ a $k \rightarrow \infty$ dostaneme limitu nulovou, jak nám vyšla, když jsme se blížili k počátku soustavy souřadnic po ose x , resp. po ose y .

A co kdybychom se k bodu $a = (0, 0)$ blížili třeba po parabolách o rovnicích $y = kx^2$? S výjimkou bodu a samotného na nich funkce nabývá hodnot

$$f(x, y) = f(x, kx^2) = \frac{x^2 \cdot k^2 x^4}{x^4 + k^4 x^8} = \frac{k^2 x^2}{1 + k^4 x^4}.$$

Pro $x \rightarrow 0$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^2}{1 + k^4 x^4} = 0.$$

Překvapuje vás tento výsledek? Neměl by. Je docela názorný. Všechny paraboly o rovnicích $y = kx^2$, $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, mají totiž v bodě $a = (0, 0)$ společnou tečnu — osu x . Limita funkce v bodě a vzhledem k ose x nám vyšla nulová. A každá z parabol $y = kx^2$ se v dostatečné blízkosti počátku soustavy souřadnic „dostatečně přesně přimyká“ k ose x . Abychom toto nepřesné, ale názorné představení blízké vyjádření postavili na korektní základ, dokážeme podle definice, že limita funkce $f(x, y)$ v bodě $a = (0, 0)$ vzhledem k libovolné z množin $A_k = \{(x, kx^2) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$ je nulová. Zvolme libovolné okolí $\mathcal{O}(0)$ bodu $L = 0$, například $\mathcal{O}(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a hledejme, zda pro nějaký obor $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ proměnné x bude splněna nerovnost

$$|f(x, kx^2) - 0| < \varepsilon \implies \left| \frac{k^2 x^2}{1 + k^4 x^4} \right| < \varepsilon.$$

Například pro všechna $|x| < k^{-1}\sqrt{\varepsilon}$ je již tato nerovnost splněna, neboť

$$\left| \frac{k^2 x^2}{1 + k^4 x^4} \right| < \left| \frac{k^2 \cdot k^{-2} \varepsilon}{1 + k^4 x^4} \right| < \left| \frac{k^2 \cdot k^{-2} \varepsilon}{1} \right| = \varepsilon.$$

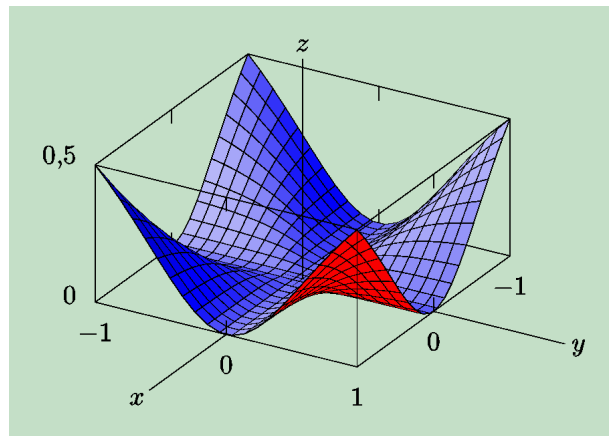
Zvolíme-li tedy ryzí okolí bodu a například ve tvaru $\mathcal{O}_k(a) = (-k^{-1}\sqrt{\varepsilon}, k^{-1}\sqrt{\varepsilon}) \times (-b, b) \setminus \{(0, 0)\}$, pak platí $f(\mathcal{O}_k(a) \cap A_k) \subset \mathcal{O}(0)$. Tím jsme podle definice ověřili, že číslo 0 je limitou funkce $f(x, y)$ vzhledem ke každé z množin A_k .

Příklad 9.17: Stejná limita vzhledem ke všem množinám — limita

Nyní uvažujme o funkci, která bude, podobně jako v předchozím příkladu, definována na množině $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Je zadána předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

a její graf na podmnožině definičního oboru $[-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\}$ je na obrázku 9.11. Položme si stejnou



Obr. 9.11 K příkladu 9.17.

otázku jako v předchozím příkladu. Jak je to s limitou funkce v bodě $a = (0, 0)$? V porovnání s předchozím příkladem, kde při $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ byla „největší mocnina nuly“ v čitateli i jmenovateli stejná, tedy čtvrtá, takže bychom příslušný neurčitý výraz mohli zapsat jako „ $\frac{0^4}{0^4}$ “, je v tomto příkladu neurčitý výraz typu „ $\frac{0^4}{0^2}$ “. Zdá se, že by nula v čitateli mohla „převážit“ a funkce by v bodě $a = (0, 0)$ mohla mít nulovou limitu. Napovídá to i graf funkce na obrázku 9.11. Každé takové „podezření“ je však třeba dokázat, nebo vyvrátit solidním matematickým postupem. Zvolme tedy okolí $\mathcal{O}(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ bodu $L = 0$ a hledejme, zda pro nějaké ryzí okolí bodu a bude splněna nerovnost

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Označme

$$\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(0, 0) = (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}) \times (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}) \setminus \{(0, 0)\}$$

ryzí okolí bodu $a = (0, 0)$. Pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(a)$ je $0 < |x|, |y| < \sqrt{\varepsilon}$. Pro hodnoty funkce $f(x, y)$ na tomto okolí platí

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 y^2}{x^2(1 + \frac{y^2}{x^2})} < y^2 < \varepsilon.$$

Číslo $L = 0$ je tedy skutečně limitou funkce $f(x, y)$ v bodě $a = (0, 0)$.

Příklad 9.18: „Finta“ s polárními souřadnicemi

Funkce $f(x, y)$ z příkladu 9.17 se také mimořádně hodí k tomu, abychom si na ní ukázali užitečný „trik“ pro výpočet některých limit. Převedme bod (x, y) do polárních souřadnic, tj. $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$. Pak

$$f(x, y) = f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) = \frac{\varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\varrho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \varrho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi.$$

Vzhledem k tomu, že je $0 \leq \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \leq 1$, platí bez ohledu na hodnotu úhlu φ nerovnost $0 \leq f(x, y) \leq \varrho^2$. Při limitním přechodu $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ po jakékoli cestě je $\varrho \rightarrow 0$, a tedy, podle věty o sevření, platí $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. (Větu o sevření známe již z prvního dílu pro funkce jedné proměnné — předposlední vlastnost ve větě 2.1. Pro funkce více proměnných se s ní setkáme ve větě 9.2.)

Příklad 9.19: Ještě jedna limita pomocí polárních souřadnic

Máme-li počítat limitu funkce dvou proměnných v obecném bodě (a, b) , můžeme zavést polární souřadnice obecného bodu (x, y) vzhledem k bodu (a, b) , tj. $x = a + \varrho \cos \varphi$, $y = b + \varrho \sin \varphi$. Pro danou hodnotu φ odpovídá limitní přechod $\varrho \rightarrow 0$ limitě funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) vzhledem k přímce $p(\varphi)$, jejíž parametrické rovnice jsou $x = a + \varrho \cos \varphi$, $y = b + \varrho \sin \varphi$, parametrem je právě proměnná ϱ . Počítáme tedy limitu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b), (x,y) \in p(\varphi)} f(x, y) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} f(a + \varrho \cos \varphi, b + \varrho \sin \varphi).$$

Pokud limita na pravé straně závisí na φ , funkce v daném bodě limitu nemá. Pozor, nezávislost na φ však existenci limity nezaručuje. Zaručuje pouze to, že limita funkce v daném bodě je vzhledem ke všem přímkám $p(\varphi)$ shodná. Ukažme si využití předchozího postupu na konkrétní funkci

$$f(x, y) = \frac{x(x+2)^2 - 2y(y-1)^2}{(x+2)^2 + (y-1)^2},$$

jejíž limitu počítáme v bodě, v němž není definována, tj. $(a, b) = (-2, 1)$. V polárních souřadnicích je

$$x = -2 + \varrho \cos \varphi, \quad y = 1 + \varrho \sin \varphi.$$

Pak

$$\begin{aligned} f(-2 + \varrho \cos \varphi, 1 + \varrho \sin \varphi) &= \frac{(-2 + \varrho \cos \varphi)\varrho^2 \cos^2 \varphi - 2(1 + \varrho \sin \varphi)\varrho^2 \sin^2 \varphi}{\varrho^2} = \\ &= [-2 + \varrho(\cos^3 \varphi - 2\sin^3 \varphi)] \implies \lim_{\varrho \rightarrow 0} f(-2 + \varrho \cos \varphi, 1 + \varrho \sin \varphi) = -2. \end{aligned}$$

Limita funkce $f(x, y)$ v bodě $(-2, 1)$ vzhledem k přímkám $p(\varphi)$ nezávisí na jejich směrovém úhlu φ a je rovna $L = -2$. Je ale toto číslo opravdu limitou funkce v daném bodě, máme-li na mysli limitu jako takovou? Samozřejmě nemůžeme vyzkoušet, k jakému číslu se blíží hodnoty funkce $f(x, y)$, blíží-li se bod (x, y) k bodu $(-2, 1)$ po všech možných cestách. Použijeme proto definice limity. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně a hledejme ryzí okolí bodu $(-2, 1)$, v němž platí

$$\left| \frac{x(x+2)^2 - 2y(y-1)^2}{(x+2)^2 + (y-1)^2} - (-2) \right| < \varepsilon.$$

Počítejme:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(x+2)^2 - 2y(y-1)^2}{(x+2)^2 + (y-1)^2} - (-2) \right| &= \left| \frac{(x+2)^3 - 2(y-1)^3}{(x+2)^2 + (y-1)^2} \right| \leq \frac{|(x+2)|^3}{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \frac{2|(y-1)|^3}{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \\ &= \frac{|x+2|}{1 + \left(\frac{y-1}{x+2}\right)^2} + \frac{2|y-1|}{1 + \left(\frac{x+2}{y-1}\right)^2} < |x+2| + 2|y-1|. \end{aligned}$$

Zvolíme-li ryzí okolí bodu $(-2, 1)$ ve tvaru

$$\mathcal{O}(-2, 1) = \left(-2 - \frac{\varepsilon}{3}, -2 + \frac{\varepsilon}{3}\right) \times \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) \setminus \{(-2, 1)\},$$

platí pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(-2, 1)$ nerovnosti $|x+2| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y-1| < \frac{\varepsilon}{3}$, z nichž plyne nerovnost $|x+2| + 2|y-1| < \varepsilon$. Platí tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{x(x+2)^2 - 2y(y-1)^2}{(x+2)^2 + (y-1)^2} = -2.$$

Příklad 9.20: Nevlastní limity

Pro změnu vyzkoušejme funkci, která bude opět definována na množině $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ a v počátku soustavy souřadnic $a = (0, 0)$ bude dávat neurčitý výraz typu „ $\frac{0^m}{0^n}$ “, kde však $n > m$. Uvažujme souběžně o dvou takových funkcích,

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \quad \text{a} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4},$$

a ptejme se na limitu v bodě $a = (0, 0)$. Nejprve vezměme na pomoc intuici a zkušenost. U funkce $f(x, y)$, kde je čitatel i jmenovatel vždy kladný, očekáváme, že funkce bude mít v bodě a nevlastní limitu $+\infty$. Funkce $g(x, y)$, která se od $f(x, y)$ liší znaménkem v čitateli, čekáme, že limita v bodě a nebude existovat. Jmenovatel zlomku je totiž stále kladný, zatímco čitatel mění znaménko podle znaménka výrazu $(x^2 - y^2)$. Grafy obou funkcí jsou na obrázku 9.12. Graf funkce $f(x, y)$ je vlevo, graf funkce $g(x, y)$ vpravo. Symboly nekonečen se šipkami znamenají, že hodnoty proměnné $z = f(x, y)$, resp. $z = g(x, y)$ „ubíhají“ do nekonečna. Stupnice na ose z není úmyslně zakreslena, hodnoty by z ní stejně nebylo dobře možné odečítat.

Obrázky názorně naznačují, že naše „podezření“ bude asi správné. Opět je však musíme dokázat. Tvrdíme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $a = (0, 0)$ nevlastní limitu $+\infty$. Zvolme libovolné okolí $\mathcal{O}(+\infty) = (K, \infty)$ nevlastního bodu $L = +\infty$ a hledejme ryzí okolí bodu a tak, aby v něm platilo

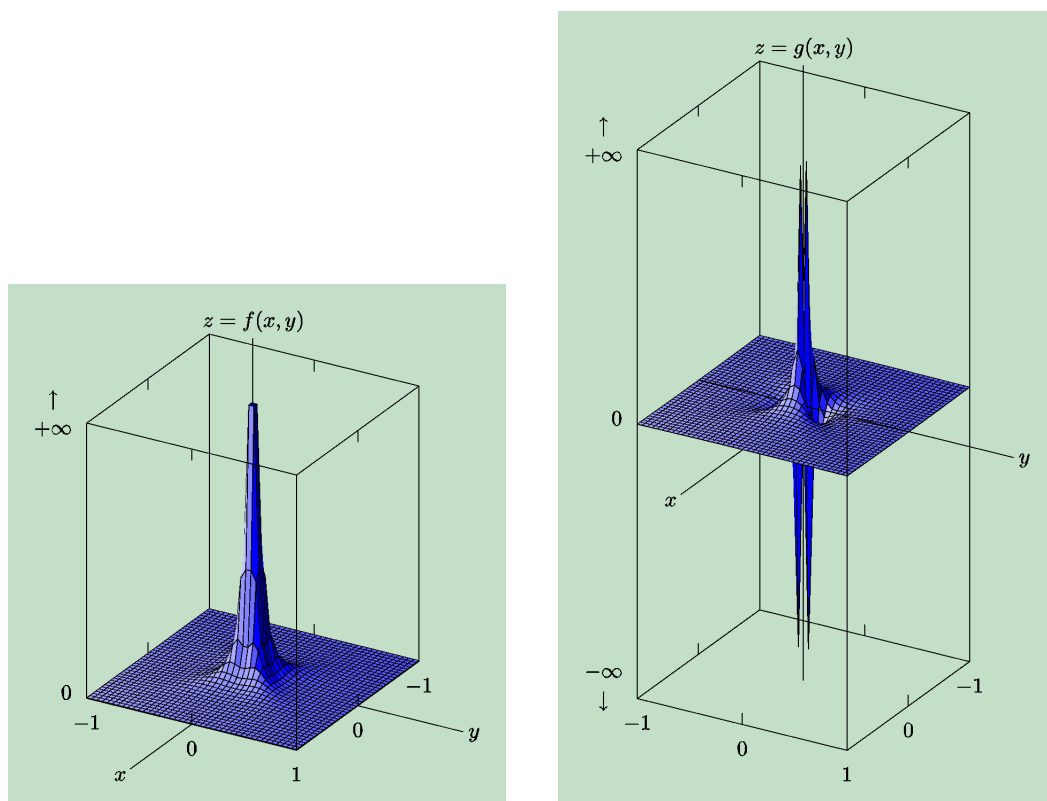
$$f(x, y) > K, \quad \text{tj.} \quad \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} > K.$$

Hodnoty funkce $f(x, y)$ jsou kladné pro všechna $x \in D$, takže pro $K \leq 0$ je předchozí nerovnost splněna na D . Sám definiční obor D je ovšem ryzím okolím bodu $a = (0, 0)$. Uvažujme proto dále jen o případě $K > 0$. Platí

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} > \frac{x^2 + y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Zvolíme-li ryzí okolí bodu $a = (0, 0)$ ve tvaru

$$\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(0, 0) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2K}}, \sqrt{\frac{1}{2K}}\right) \times \left(-\sqrt{\frac{1}{2K}}, \sqrt{\frac{1}{2K}}\right) \setminus \{(0, 0)\},$$

Obr. 9.12 K příkladu 9.20, vlevo $f(x, y)$, vpravo $g(x, y)$.

bude pro všechny body (x, y) z tohoto okolí platit

$$f(x, y) > \frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{1}{\frac{1}{2K} + \frac{1}{2K}} = K.$$

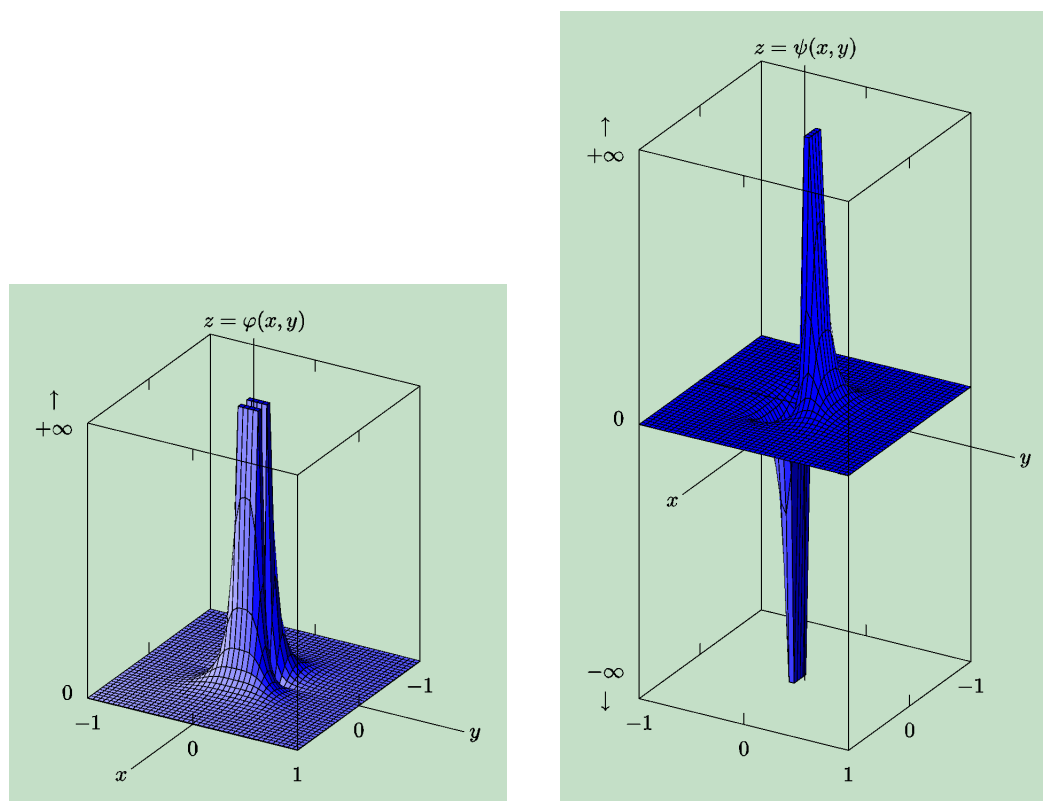
Dokázali jsme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $a = (0, 0)$ nevlastní limitu $+\infty$. Funkce $g(x, y)$ naproti tomu limitu nemá, neboť v libovolném ryzím okolí bodu $a = (0, 0)$ existují body, pro které je $g(x, y) < K$. Skutečně, zvolíme-li například jakkoli malé ryzí okolí bodu a ve tvaru $\mathcal{O}(a) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < r\}$, pak toto okolí spolu s každým bodem (x_0, y_0) , pro který je $g(x_0, y_0) > K$, obsahuje i bod (y_0, x_0) , a pro ten je naopak $g(y_0, x_0) < -K$.

Pro zajímavost si všimněme ještě funkcí

$$\varphi(x, y) = \frac{|x|}{x^4 + y^4} \quad \text{a} \quad \psi(x, y) = \frac{x}{x^4 + y^4},$$

rovněž definovaných na $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Jejich grafy jsou na obrázku 9.13. U funkce $\psi(x, y)$ je jak z grafu, tak ze skutečnosti, že v libovolně malém ryzím okolí bodu $a = (0, 0)$ nabývá jak kladných, tak záporných hodnot, zřejmé, že v tomto bodě limitu nemá. Funkce $\varphi(x, y)$ by nás mohla zmást. Ve všech bodech svého definičního oboru je nezáporná a vypadá to, že by mohla mít nevlastní limitu $+\infty$. Spočteme-li však její limity vzhledem k množinám A a B , kde A je přímka o rovnici $y = x$ a B je osa y , dostaneme

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0), y=x} \varphi(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2x^4} = +\infty, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0), x=0} \varphi(x, y) = 0.$$

Obr. 9.13 K příkladu 9.20, vlevo $\varphi(x, y)$, vpravo $\psi(x, y)$.

Limita tedy neexistuje. (Všimněte si v grafu funkce $\varphi(x, y)$, že mezi dvěma „rourami“ mířícími k nekonečnu je „proláklina“ podél osy y .)

Pozn.: Zápis $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0), y=x} \varphi(x, y)$ je často užívanou alternativou zápisu

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0), (x, y) \in A} \varphi(x, y), \quad \text{kde } A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = x\}.$$

Příklad 9.21: Limity v nevlastních bodech

Přehledku různých limit, resp. neexistujících limit funkcí dvou proměnných zakončíme alespoň jedním příkladem limity v nevlastním bodě. Funkce

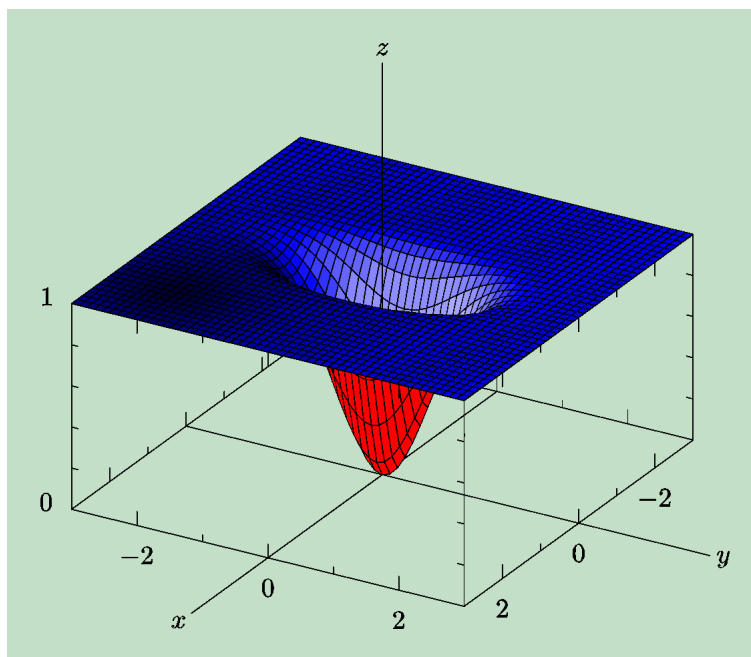
$$f(x, y) = 1 - e^{-(4x^2 + y^2)}$$

je definována v \mathbf{R}^2 . Její graf je na obrázku 9.14. Funkce $f(x, y)$ má limitu rovnou jedné ve všech nevlastních bodech. Zvolíme-li totiž libovolné okolí $\mathcal{O}(1) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$, bodu $L = 1$, platí pro všechny body $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, pro které je $4x^2 + y^2 > \ln \varepsilon^{-1}$, tj. vně elipsy \mathcal{E} se středem v počátku o poloosách

$$a = \frac{\sqrt{\ln \varepsilon^{-1}}}{2}, \quad b = \sqrt{\ln \varepsilon^{-1}},$$

nerovnost

$$|f(x, y) - 1| = e^{-(4x^2 + y^2)} < \varepsilon.$$



Obr. 9.14 K příkladu 9.21.

Vnějšek elipsy \mathcal{E} je neomezenou otevřenou množinou, která je (ryzím) okolím všech nevlastních bodů prostoru $(\mathbf{R}^2)^+$.

Poté, co jsme věnovali dostatek pozornosti pochopení definice limity, vyvstává otázka, jak se s limitami počítá. Jednoduše. Platí pro ně zcela analogická pravidla, jaká jsme formulovali ve větě 2.1 (odstavec 2.1.5 prvního dílu). Mohli bychom v podstatě jen říci, že ve větě 2.1 stačí zaměnit funkce jedné proměnné za funkce více proměnných. Pro pořádek a připomenutí však přece jen pravidla zopakujeme a něco málo přidáme. Pravidla opět napíšeme ve zkrácené podobě.

Nejprve ještě dohoda: V následující větě, shrnující pravidla pro počítání s limitami, budeme, stejně jako v definici limity, předpokládat, že definiční obory funkcí obsahují jisté ryzí okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_n)$. Bod a může být i nevlastní. Okolími bodu a , o nichž bude ve větě řeč, jsou myšlena okolí ryzí. Limity mohou být vlastní i nevlastní, nebude-li řečeno jinak. Tvrzení, v nichž se s limitami provádějí nějaké algebraické operace, platí jen pro takové typy limit, pro něž je daná operace definována (nejsou například definovány operace $+\infty + (-\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$, apod.).

Věta 9.2 (Vlastnosti limit):

<i>Nechť (předpoklady)</i>	<i>Pak (tvrzení)</i>
$f(x)$ má v bodě a limitu	\implies tato limita je jediná
$f(x)$ má v bodě a vlastní limitu	\implies $f(x)$ je na jistém $\mathcal{O}(a)$ ohraničená
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$	$\implies \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L + L'$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$	$\implies \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LL'$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0,$ ex. $\mathcal{O}(a) : g(x)$ je ohraničená na $\mathcal{O}(a)$	$\implies \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L' \neq 0,$ ex. $\mathcal{O}(a) : g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(a)$	$\implies \lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = L/L'$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L,$ ex. $\mathcal{O}(a) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(a)$	$\implies \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$
$\lim_{x \rightarrow a} \varphi_j(x) = \ell_j, \lim_{y \rightarrow \ell} f(y) = L,$ $j \in \{1, \dots, m\}, \ell = (\ell_1, \dots, \ell_m),$ ex. $\mathcal{O}(a) : \varphi_j(x) \neq \ell_j$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(a)$	$\implies \lim_{x \rightarrow a} f[\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)] = L$

Pozn.: Podobně jako ve větě 2.1 v prvním dílu jsme i zde shrnuli pravidla pro limity funkcí do stručné tabulky. Musíme je však umět správně číst. Připomeňme si to třeba u třetího pravidla. Například takto: „Nechť funkce $f(x)$, resp. $g(x)$ mají v bodě a limitu L , resp. L' . Pak také funkce $f(x) + g(x)$ má v bodě a limitu a ta je rovna $L + L'$.“ Obrátit větu nelze. Nejjednodušším protipříkladem je situace, kdy $f(x)$ v bodě a limitu nemá a pro $g(x)$ platí $g(x) = -f(x)$. Funkce

$f(x) + g(x)$ je pak identicky nulová a má tedy v bodě a nulovou limitu. A když už rozebíráme třetí pravidlo, dodejme, že je nemůžeme pro součet $f(x) + g(x)$ použít v případě, že by jedna z limit byla $+\infty$ a druhá $-\infty$. Rozmyslete si, pro jaké L a L' je pravidlo nepoužitelné pro rozdíl $f(x) - g(x)$.

Pravidla ve větě 9.2 byla formulována pro limitu funkce jako takovou. Zkuste se zamyslet nad tím, zda některé z nich platí také pro limitu funkce v daném bodě a vzhledem k dané množině A a pokuste se je pro tento případ přeformulovat. Nebude to složité. Jen je třeba zaměnit požadavek platnosti vztahů na ryzím okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a za slabší požadavek jejich platnosti na průniku $\mathcal{O}(a) \cap A$.

A ještě si uvědomme jednu důležitou a praktickou vlastnost limity, která přímo vyplývá z definice limity a limity vzhledem k množině. Jestliže má funkce $f(x)$ v bodě $a \in (\mathbf{R}^n)^+$ limitu $L \in \mathbf{R}^+$, pak limity této funkce v bodě a vzhledem ke všem množinám A (jejichž je a hromadným bodem) musí být stejné. Je proto jedno, jakým způsobem se k limitě L „dopočítáme“. Platí například tvrzení

Má-li funkce $f(x)$ v bodě a limitu, pak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right), \quad (9.9)$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \left[\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \left(\dots \lim_{x_n \rightarrow a_n} f(x_1, \dots, x_n) \right) \right],$$

přičemž pořadí výpočtu dílčích limit v druhém vztahu lze rovněž libovolně zaměňovat.

Způsob výpočtu vyplývající z předchozího tvrzení je sice praktický, je však založen na znalosti faktu, že funkce má v daném bodě limitu. Není tedy vždy použitelný, i když případy, kdy jej s výhodou využít lze, existují — s jedním takovým se setkáme v odstavci 9.2.3. Způsoby výpočtu limit funkcí více proměnných jsou mnohem rozmanitější než u funkcí jedné proměnné a nelze je vtěsnat do nějakých univerzálních rutinních postupů. Spíše je třeba posuzovat situaci případ po případu a získat zkušenost praktickým počítáním. Některé způsoby výpočtu si budete moci vyzkoušet v rámci cvičení s návody.

K limitám přece jen uvedeme ještě jedno doplnění. Vzpomínáte si ještě na druhý z problémů, který jsme formulovali na začátku úvah o limitách? Týkal se funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, jejímž definičním oborem je množina $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Tato množina je uzavřený kruh o jednotkovém poloměru. Z hlediska množinové terminologie je uzavřenou oblastí a je kompaktní. Na hranici kruhu $x^2 + y^2 = 1$ je funkce $f(x, y)$ definována a nabývá na ní nulové hodnoty. Jistě by bylo přirozené konstatovat, že limita funkce $f(x, y)$ v bodech hranice definičního oboru je nulová. Toto konstatování si však zatím nemůžeme dovolit, neboť definici limity pro takové body nemáme. Proč? Protože hraniční body nemají ryzí okolí, která by ležela

v definičním oboru. Předpokladem existence takových okolí jsme ovšem naši dosavadní definici limity omezili. Definici limity proto zobecníme. Základní požadavek na bod a , v němž limitu určujeme, oslabíme tak, že budeme předpokládat to, že a je hromadným bodem definičního oboru.

Předpokládejme, že bod $a \in (\mathbf{R}^n)^+$ je hromadným bodem definičního oboru D funkce $f(x)$ a zároveň hromadným bodem množiny $A \subset (\mathbf{R}^n)^+$. Bod $L \in \mathbf{R}^+$ se nazývá *limitou funkce $f(x)$ v bodě a vzhledem k množině A* , jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že $f(\mathcal{O}(a) \cap D \cap A) \subset \mathcal{O}(L)$.

Předpokládejme, že bod $a \in (\mathbf{R}^n)^+$ je hromadným bodem definičního oboru D funkce $f(x)$. Bod $L \in \mathbf{R}^+$ se nazývá *limitou funkce $f(x)$ v bodě a* , jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že $f(\mathcal{O}(a) \cap D) \subset \mathcal{O}(L)$.

Že jsou to stejné definice jako ty, se kterými jsme dosud pracovali? Nejsou. Rozdíl je podstatný. UVědomíme si jej na následujících příkladech.

Příklad 9.22: Limita v hraničních bodech

Obrázek 9.15 ukazuje graf funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a ilustruje použití zobecněné definice limity na případ hraničních bodů jejího definičního oboru. Pomocí zobecněné definice ukážeme, že limita funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ v libovolném bodě a na hranici definičního oboru je nulová. Zvolme bod $a = (a_1, a_2)$, $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Zvolme okolí $\mathcal{O}(0)$ bodu $L = 0$ ve tvaru $\mathcal{O}(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Hledáme ryzí okolí bodu a tak, aby na jeho průniku s definičním oborem funkce platila nerovnost

$$|f(x, y) - 0| = \sqrt{1 - x^2 - y^2} < \varepsilon \implies x^2 + y^2 > 1 - \varepsilon^2.$$

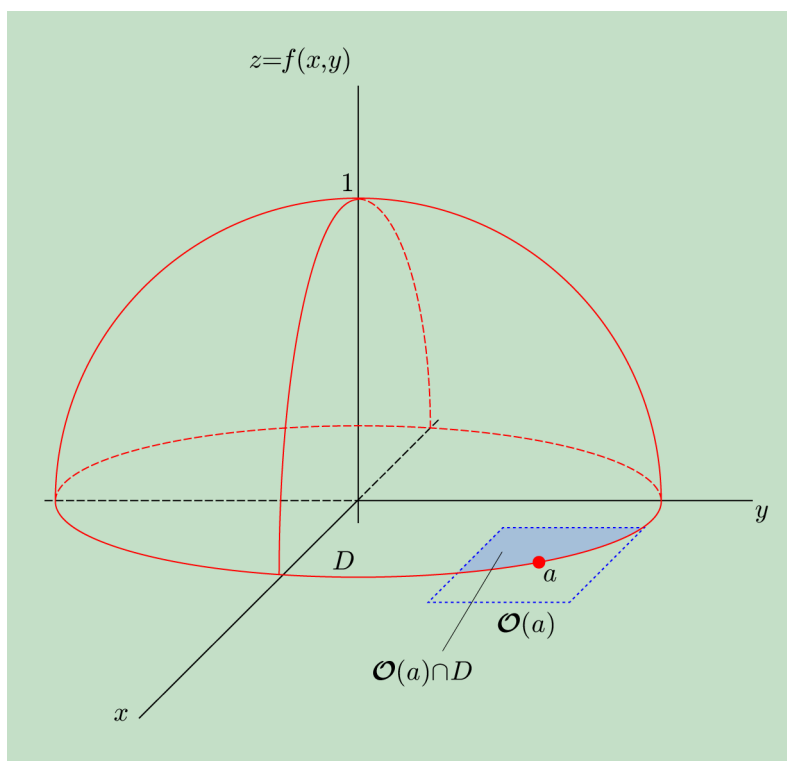
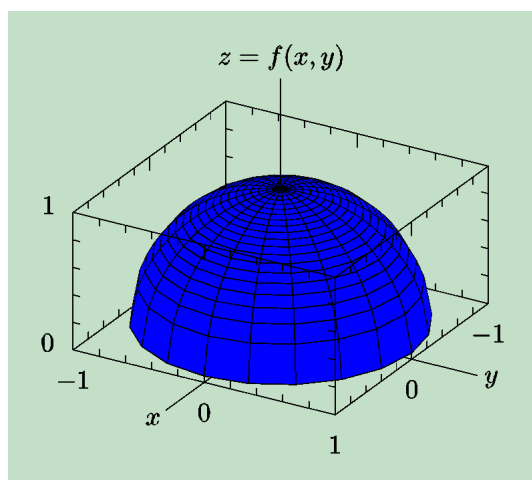
Pro $\varepsilon > 1$ platí tato nerovnost na průniku D s jakýmkoli ryzím okolím bodu a , pro $\varepsilon \leq 1$ stačí volit okolí $\mathcal{O}(a) = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \setminus \{(a_1, a_2)\}$ tak, aby se průnik $\mathcal{O}(a) \cap D$ vešel do mezikruží $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 - \varepsilon^2 < x^2 + y^2 < 1\}$. Dodejme, že v tomto konkrétním případě nemusí být okolí bodu a ani ryzí. Víte proč?

Příklad 9.23: Limita funkce se „zpřetrhaným“ grafem

Na tomto příkladu osvětlíme další významnou odlišnost zobecněné definice limity od definice speciální. Označme $D = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ (\mathbf{Q} je množina všech racionálních čísel). Uvažujme o funkci

$$f : D \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) = 1.$$

Všechny body reálné roviny \mathbf{R}^2 jsou hromadnými body definičního oboru dané funkce. Můžeme se tedy zabývat otázkou, zda v nich funkce má limitu a jakou. Zvolme libovolně číslo $\varepsilon > 0$. Zvolme dále libovolný bod $a \in \mathbf{R}^2$ a jeho libovolné ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$. Ve všech bodech průniku $D \cap \mathcal{O}(a)$ nabývá funkce hodnoty 1, a proto v nich platí $|f(x, y) - 1| = 0 < \varepsilon$, tj. $f(\mathcal{O}(a) \cap D) \subset \mathcal{O}(1)$ pro $\mathcal{O}(1) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Číslo 1 je tedy limitou dané funkce ve všech bodech reálné roviny. V bodech definičního oboru funkce je tato limita dokonce rovna funkční hodnotě, a



Obr. 9.15 K zobecnění limity.

funkce je tedy na D ve smyslu zobecněné definice limity spojitá! (To uvidíme za chvíli, až formulujeme definici spojitosti.) Divná limita a divná spojitost? Tuto „podivnost“ bychom lépe pochopili, kdybychom měli více znalostí z topologie a znali pojem *indukované topologie*. Ačkoli jde o velmi zajímavé věci, nemůžeme se jimi v tomto textu podrobně zabývat.

„Podivná“ limita a „podivná“ spojitost z příkladu 9.23 nám naštěstí nemusí dělat starosti. V praktických příkladech budou nejčastěji vystupovat funkce, jejichž definičními obory jsou otevřené množiny, oblasti, popřípadě uzavřené oblasti neboli kontinua. Pro body ležící uvnitř těchto definičních oborů vystačíme se speciálnější definicí limity (a jí odpovídající definicí spojitosti), neboť pro tyto body vždy existuje ryzí okolí, které v dané množině leží. Pro body na hranicích je sice třeba pracovat se zobecněnou definicí limity a spojitosti, ale ta nepovede k takovým neobvyklým závěrům jako v příkladu 9.23.

S pojmem limity úzce souvisí definice spojitosti funkce. V případě speciálnější definice limity půjde i o „speciálnější“ spojitost, obecnějšímu pojmu limity odpovídá obecnější představa o spojitosti.

Funkce $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$, kde $D \subset \mathbf{R}^n$, se nazývá *spojitá v bodě* $a \in D$ *vzhledem k množině* A , jestliže má v tomto bodě vzhledem k množině A vlastní limitu a platí $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a)$.

Funkce $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$, kde $D \subset \mathbf{R}^n$, se nazývá *spojitá v bodě* $a \in D$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Uvědomte si, že spojitost funkce více proměnných vzhledem k množině je v podstatě analogií spojitosti zprava a zleva u funkce jedné proměnné.

Příklad 9.24: Spojitost „dílčích“ funkcí

Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a , pak to znamená, že je v něm spojitá vzhledem ke všem množinám A , jejichž je bod a hromadným bodem. Ať se tedy blížíme k bodu a jakoukoli cestou, vždy dospějeme k funkční hodnotě $f(a)$. Speciálním případem takového „přibližování“ je zafixování některých proměnných na odpovídajících hodnotách souřadnic bodu a . Například pro spojitou funkci n proměnných $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ můžeme dostat postupně spojitě funkce jedné, dvou, tří, atd., proměnných

$$\begin{aligned} g_1(x_1) &= f(x_1, a_2, \dots, a_n), \\ g_2(x_2) &= f(a_1, x_2, \dots, a_n), \\ &\dots \dots \dots \\ g_n(x_n) &= f(a_1, a_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{12}(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2, a_3, \dots, a_n), \\ &\dots \dots \dots \\ h_{ij}(x_i, x_j) &= f(a_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, a_n), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Vraťme se například k funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

z příkladu 9.16. V bodě $(0, 0)$, který nepatří do jejího přirozeného definičního oboru, ji dodefinujeme hodnotou $f(0, 0) = 0$. Utvořme funkce jedné proměnné podle předchozích vztahů:

$$g_1(x) = f(x, 0) = 0, \quad g_2(y) = f(0, y) = 0.$$

Obě tyto funkce jsou spojitě v bodě 0, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_1(x) = g_1(0) = f(0, 0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} g_2(y) = g_2(0) = f(0, 0) = 0.$$

Co myslíte? Plyne z toho spojitost funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$? Pokud na tuto otázku nedokážete hned odpovědět, vraťte se k příkladu 9.16 a znovu se zamyslete nad tím, jak je to s limitou dané funkce v bodě $(0, 0)$. Uvidíte, že dodefinování na existenci či neexistenci limity nic nemění.

Příklad 9.25: Spojitost a kompaktnost

Pojem spojitosti funkce je definován pomocí limity. Proto úzce souvisí s pojmem okolí, a tedy s topologií. V tomto příkladu ukážeme, že je-li $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ funkce spojitá na *kompaktní* množině D , je množina $H = f(D)$ také kompaktní. Zvolme libovolné pokrytí \mathcal{P}_H množiny H otevřenými množinami. Je třeba ukázat, že z tohoto pokrytí dokážeme vybrat konečné podpokrytí (definice kompaktnosti množiny). Zvolme libovolný bod $y \in H$ a označme $V(y)$ kteroukoli z množin pokrytí \mathcal{P}_H , do které bod y náleží. Protože H je obor hodnot funkce f definované na D , existuje v D alespoň jeden vzor x takový, že $y = f(x)$. Označme $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in D \mid y = f(x)\}$ množinu všech vzorů bodu y . Pro každý z nich existuje jeho okolí $\mathcal{O}(x)$ tak, že $f(\mathcal{O}(x)) \subset V(y)$ (je to zaručeno spojitostí funkce $f(x)$). Soubor otevřených množin

$$\mathcal{P}_D = \{\mathcal{O}(x) \mid x \in D, y \in H\}$$

je pokrytím množiny D . Ta je však kompaktní, a proto z pokrytí \mathcal{P}_D lze vybrat konečné podpokrytí $\mathcal{P}_0(D) = \{\mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_N)\}$. Odpovídající otevřené množiny $V(y_1), \dots, V(y_N)$ tvoří konečné podpokrytí množiny H vybrané z pokrytí $\mathcal{P}(H)$. Množina H je tedy kompaktní.

Obrazem $f(D)$ kompaktní množiny D spojitou funkcí f je opět kompaktní množina.

Co myslíte? Lze podobnou větu vyslovit také pro případ, že množina D je otevřená? Klademe si tedy otázku, zda obrazem otevřené množiny spojitou funkcí f je opět otevřená množina. Odpověď je záporná. Protipříkladem může být konstantní funkce definovaná na otevřené množině D , tj. $f(x) = K$ pro všechny body $x \in D$. Pro ni totiž platí $f(D) = \{K\}$. Jednoprvková množina je však uzavřená.

Položme si nyní otázku, jak je tomu se spojitostí funkcí, které vznikly ze spojitých funkcí pomocí algebraických operací (součet a opačná operace rozdíl, součin a až na výjimku dělení nulou inverzní operace podíl), popřípadě skládáním funkcí. Odpověď na tuto otázku jistě snadno formulujete sami, neboť přímo vyplývá z definice spojitosti a z věty 9.2.

V závěru odstavce ještě uvedeme vlastnosti spojitých funkcí, které jsou analogické vlastnostem spojitých funkcí jedné proměnné na uzavřených intervalech. V prvním dílu jsme je formulovali ve větě 2.2 a větách G.1, G.2 a G.3 dodatku G, kde jsme některé dokonce dokazovali. Interval jako podmnožina \mathbf{R} je omezená a uzavřená, tedy kompaktní množina (viz též dodatek F prvního dílu). Některé vlastnosti spojitých funkcí více proměnných budeme také formulovat pro případ, kdy jejich definičním oborem je kompaktní množina, v jiných situacích bude definičním oborem spojitě funkce oblast.

Věta 9.3 (Vlastnosti spojitých funkcí): Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá ve všech bodech množiny $D \subset \mathbf{R}^n$. Pak platí:

- Je-li D kompaktní množina, pak na ní funkce $f(x)$ nabývá své nejmenší a největší hodnoty. Znamená to, že existují čísla m a M a body $x_m \in D$ a $x_M \in D$ tak, že $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$, přičemž $m \leq f(x) \leq M$ pro všechny body $x \in D$.
- Je-li D oblast, nebo kontinuum, a pro její body a, b platí $f(a) < f(b)$, pak funkce $f(x)$ nabývá na D všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$. To znamená, že pro libovolně zvolené číslo y_0 , pro které platí $f(a) < y_0 < f(b)$, existuje bod $x_0 \in D$ tak, že $f(x_0) = y_0$.
- Je-li D oblast, nebo kontinuum, a pro její body a, b platí $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, pak existuje bod $x_0 \in D$ tak, že $f(x_0) = 0$.

První vlastnost je „vícerozměrná“ Weierstrassova věta (pro funkce jedné proměnné věta G.3 dodatku G), druhá vlastnost je „vícerozměrná“ Bolzanova věta (pro funkce jedné proměnné jí odpovídá druhá vlastnost ve větě 2.2). Triviálním důsledkem Bolzanovy věty je vlastnost třetí (pro funkce jedné proměnné jí odpovídá třetí vlastnost ve větě 2.2).

Ještě poznamenejme, že na případ spojitosti funkce v hraničních bodech množiny D bud musíme vztáhnout obecnější definici limity, nebo předpokládat, že funkce je definována na otevřené množině D' , pro kterou $D \subset D'$, a mít pak na mysli spojitost funkce v bodech množiny D' vzhledem k množině D .

Důkazy těchto tvrzení nebudeme provádět. Je však důležité ještě vyložit, proč ve Weierstrassově větě předpokládáme množinu D kompaktní (tj. omezená, uzavřená, ale nikoli nutně souvislá), ve větě Bolzanově předpokládáme, že D je souvislá. Abychom předpoklady o množině D zdůvodnili, najdeme protipříklady, tj. situace, kdy některý z nich nebude splněn a nebude splněno ani tvrzení věty.

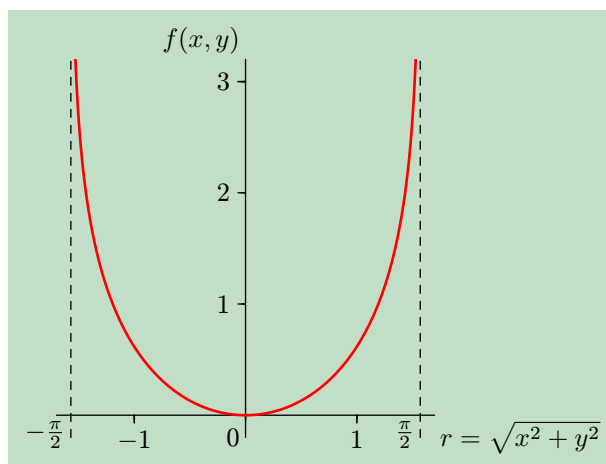
Příklad 9.26: Definiční obor spojitě funkce — Weierstrassova věta

Věta předpokládá kompaktní množinu D , ne nutně souvislou. Probereme jednotlivé vlastnosti postupně.

- Proč předpokládáme, že množina D je omezená? Protipříkladem je lineární funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$, kde k_1 až k_n jsou pro názornost kladné konstanty. Přírodným definičním oborem této spojitě funkce je $D = \mathbf{R}^n$. Tato funkce nenabývá na D minima ani maxima, neboť například v nevlastním bodě $(+\infty, \dots, +\infty)$ má nevlastní limitu $+\infty$, v nevlastním bodě $(-\infty, \dots, -\infty)$ má nevlastní limitu $-\infty$.
- Proč předpokládáme, že množina D je uzavřená? Jako protipříklad uveďme třeba funkci $z = f(x, y) = -\ln \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$, která je spojitá na otevřeném kruhu $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{\pi^2}{4}\}$. Řez grafu této funkce libovolnou svislou rovinou o rovnici $y = kx$ je na obrázku 9.16. Funkce sice nabývá na D svého minima $f(x_m) = 0$, a to v bodě $x_m = (0, 0)$, maxima však nenabývá, neboť v bodech na hranici množiny D má nevlastní limitu $+\infty$ (jde o limitu v zobecněném smyslu). Můžeme také uvažovat tak, že pro libovolné číslo $K > 0$ existuje alespoň jeden bod $(x, y) \in D$ tak, že $f(x, y) > K$. Takových

bodů je dokonce nekonečně mnoho a leží vně kruhu se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem r_K , pro který $(-\ln \cos r_K) = K$.

- Proč není třeba předpokládat, aby množina D byla souvislá? Předpokládejme, že množina D má více než jednu komponentu. Protože D je kompaktní, je i každá z komponent kompaktní. Těchto komponent je konečně mnoho. Jak to víme? Z každého otevřeného pokrytí celé množiny D lze vybrat konečné podpokrytí. To pokrývá i všechny komponenty. Musí jich proto být konečný počet, řekněme N . Na j -té komponentě (souvislé) nabývá funkce minima m_j a maxima M_j . Položíme $m = \min \{m_j \mid j = 1, 2, \dots, N\}$ a $M = \max \{M_j \mid j = 1, 2, \dots, N\}$.



Obr. 9.16 K Weierstrassově větě.

Příklad 9.27: Definiční obor spojitě funkce — Bolzanova věta

Proč je v případě Bolzanovy věty třeba předpokládat, že množina D je souvislá? Opět stačí uvést protipříklad. Předpokládejme, že množina D je sjednocením dvou komponent $D = D_1 \cup D_2$, není tedy souvislá. Funkce $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ je definována tak, že $f(x) = 1$ pro všechny body $x \in D_1$ a $f(x) = -1$ pro všechny body $x \in D_2$. Tato funkce je na D nepochybně spojitá. V žádném bodě svého definičního oboru však nenabývá nulové hodnoty. Situace by se dala charakterizovat také tak, že hodnoty funkce f na jedné z komponent nesouvislé množiny „nevědí“ nic o hodnotách na ostatních komponentách, ať již je funkce f spojitá, nebo ne.

Limitě a spojitosti funkcí jsme se tedy, podle příslibu v úvodu odstavce, věnovali opravdu velmi důkladně. To proto, že pojem limity funkce více proměnných je na hlubší pochopení náročnější, než je tomu u limity funkcí jedné proměnné. Zato pokud jej zvládneme, je už jedno, na kolika proměnných funkce závisí. Dobré porozumění limitám a spojitosti je nezbytné nejen pro další teoretické úvahy o funkcích více proměnných, ale i pro praktické počítání. V dalších odstavcích této kapitoly už dospějeme k praktičtějším výsledkům. K tomu, abychom nebyli odsouzeni pouze k jejich rutinnímu používání, které s sebou bez hlubšího pochopení nese riziko jejich chybné aplikace či interpretace, nám znalosti o limitách a spojitosti velmi pomohou.

9.2.2 Parciální derivace a řetězové pravidlo

V odstavci 5.2.3 jsme se vydali na první exkurzi do světa parciálních derivací. Definovali jsme je pro případ funkcí dvou proměnných s poznámkou, že definice pro funkce většího počtu proměnných je analogická. Nyní tuto obecnou definici formulujeme:

Předpokládejme, že funkce

$$f : D \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}$$

je definována na jistém otevřeném okolí $\mathcal{O}(a) \subset D$ bodu $a = (a_1, \dots, a_n)$. Definujme funkci

$$h_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

kde $(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathcal{O}(a)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Existuje-li derivace funkce $h_i(x_i)$ v bodě a_i , tj. vlastní limita

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{h_i(x_i) - h_i(a_i)}{x_i - a_i} &= \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{x_i - a_i} = \\ &= \left. \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right|_{(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x=a}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

nazýváme ji *parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ podle proměnné x_i* . Často také značíme

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x=a} = D_i f(a).$$

Pozn.: Pro zkrácení budeme často místo zápisu

$$\left. \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right|_{(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)} \quad \text{používat tvar} \quad \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{(a_1, \dots, a_n)}.$$

S ohledem na konvenci zavedenou v kapitole 5 budeme používat i značení

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y), \quad \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n.$$

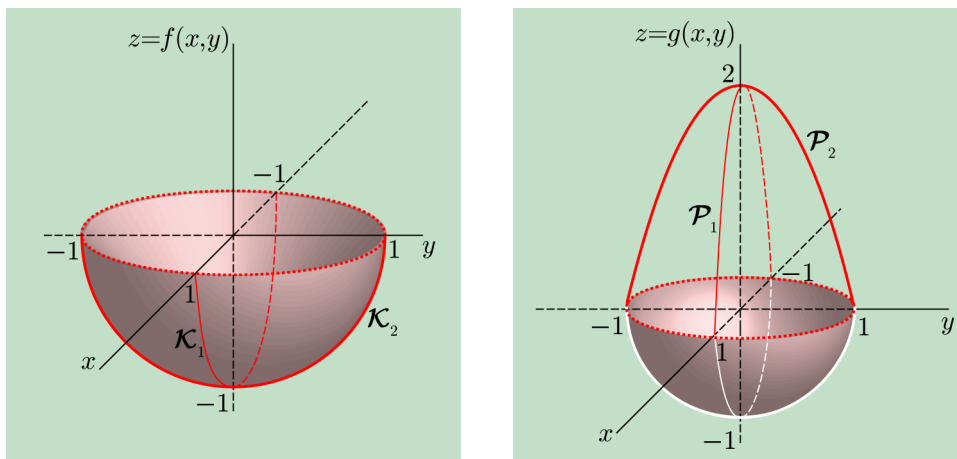
Má parciální derivace podle i -té proměnné nějaký názorný význam? U funkcí dvou proměnných jsme jej ilustrovali obrázkem 5.8. Obecně tato parciální derivace měří rychlost změny funkční hodnoty funkce $f(x)$, blíží-li se bod x k bodu a po přímce rovnoběžné s osou x_i .

Příklad 9.28: Plyne z existence parciálních derivací funkce její spojitost?

V případě funkce jedné proměnné byla odpověď na položenou otázku kladná. Vzpomeňte na větu 2.3 v prvním dílu. Pro parciální derivace funkcí více proměnných však taková věta již neplatí. Abychom se o tom přesvědčili, stačí najít příklad, kdy funkce má v daném bodě parciální derivace prvního řádu, ale není v něm spojitá. Ukážeme si i postup, jak takovou funkci „vyrobíme“. Vezměme třeba funkci dvou proměnných definovanou na otevřené množině $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ vztahem $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ta je samozřejmě na D spojitá, jak je vidět na první pohled. Její parciální derivace prvního řádu rovněž existují v každém bodě množiny D a platí

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Konkrétně v bodě $(0, 0)$ jsou obě parciální derivace nulové. Grafem funkce je dolní polovina kulové plochy o poloměru $R = 1$ se středem v počátku soustavy souřadnic. Je vidět na obrázku 9.17 vlevo. Nespojité, která



Obr. 9.17 I nespojitá funkce může mít parciální derivace.

však zachová existenci a dokonce hodnotu parciálních derivací v bodě $(0, 0)$, vyrobíme tak, že z grafu funkce $f(x, y)$ vyřízneme půlkružnice \mathcal{K}_1 a \mathcal{K}_2 popsané rovnicemi $(z = -\sqrt{1 - x^2}) \wedge (y = 0)$ a $(z = -\sqrt{1 - y^2}) \wedge (x = 0)$. Půlkulové nádobe s výřezy pak „přisjíjeme“ držadlo třeba ve tvaru parabol \mathcal{P}_1 a \mathcal{P}_2 , $(z = 2 - 2x^2) \wedge (y = 0)$ a $(z = 2 - 2y^2) \wedge (x = 0)$. Výsledek vidíme na obrázku 9.17 vpravo. Nová funkce daná předpis

$$\begin{aligned} g(x, y) &= -\sqrt{1 - x^2 + y^2} \quad \text{pro } (x, y) \in D, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \\ g(x, y) &= 2 - 2x^2 \quad \text{pro } y = 0, \quad x \in (-1, 1), \\ g(x, y) &= 2 - 2y^2 \quad \text{pro } x = 0, \quad y \in (-1, 1) \end{aligned}$$

je nespojitá v bodech $(x, 0)$ pro $x \in (-1, 1)$ a $(0, y)$ pro $y \in (-1, 1)$. Spočtíme její parciální derivace v bodě $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{(0,0)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - 2x^2) - 2}{x} = 0, \\ \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{(0,0)} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(0, y) - g(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(2 - 2y^2) - 2}{y} = 0. \end{aligned}$$

Funkce $g(x, y)$ má tedy v bodě $(0, 0)$, v němž *není spojitá*, parciální derivace prvního řádu podle obou proměnných. Z cvičných důvodů spočtíme ještě parciální derivace funkce $g(x, y)$ v ostatních bodech jejího definičního

oboru D . Pro body (x, y) , pro něž je jak $x \neq 0$, tak $y \neq 0$, jsou tyto derivace rovny odpovídajícím derivacím funkce $f(x, y)$. Zdůvodněte tento výsledek. Dále zvolme body $(a, 0) \in D$, $a \neq 0$, a $(0, b) \in D$, $b \neq 0$. Platí

$$\left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{(a, 0)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x, 0) - g(a, 0)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2 - 2x^2) - (2 - 2a^2)}{x - a} = -4a.$$

Parciální derivace funkce $g(x, y)$ podle proměnné y v bodech $(a, 0)$ pro $a \neq 0$ neexistuje. Platí totiž

$$\frac{g(a, y) - g(a, 0)}{y - 0} = \frac{-\sqrt{1 - a^2 - y^2} - (2 - 2a^2)}{y}.$$

Limita tohoto výrazu pro $y \rightarrow 0$ neexistuje (pro $y \rightarrow 0^-$ je $+\infty$, pro $y \rightarrow 0^+$ je $-\infty$). Obdobně platí

$$\left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{(0, b)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(0, y) - g(0, b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{(2 - 2y^2) - (2 - 2b^2)}{y - b} = -4b.$$

Parciální derivace funkce $g(x, y)$ podle proměnné x v bodech $(0, b)$ pro $b \neq 0$ opět neexistuje.

Pozn.: Funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ jsme volili poněkud složitějším způsobem, než jaký by postačoval k ukázce toho, že z existence parciálních derivací neplyne spojitost funkce. Cílem této volby byl mj. „pěkný“ graf funkcí. Postup, kterým jsme ze spojitě funkce $f(x, y)$ dostali funkci $g(x, y)$ s bodem nespojitosti, v němž však existovaly parciální derivace, můžete zkusit použít sami i pro mnohem jednodušší situace. Zkuste třeba vyjít z funkce $f(x, y) = 0$ na \mathbf{R}^2 a nějak vhodně ji změnit.

Příklad 9.29: Zato ze spojitosti parciálních derivací funkce už její spojitost plyne

V předchozím příkladu jsme viděli, že existence parciálních derivací funkce více proměnných nestačí k zajištění její spojitosti. Uvažujme opět o funkci jen dvou proměnných, $f(x, y)$, a zkusme, co to udělá, když požadavek na její parciální derivace $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$ zesílíme. Předpokládejme jejich spojitost v bodě (a, b) , a tím i existenci na jistém okolí \mathcal{O} tohoto bodu. Ukážeme, že toto již ke spojitosti funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) stačí. Potřebujeme dokázat, že limita rozdílu $f(x, y) - f(a, b)$ v bodě (a, b) je nulová. Definujme na okolí \mathcal{O} (trochu uměle) novou funkci, do které „zamontujeme“ jak funkci $f(x, y)$, tak její parciální derivace,

$$\Phi(x, y) = f(x, y) - f(a, b) - f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b).$$

Hned je vidět, že pokud existuje limita funkce $\Phi(x, y)$ v bodě (a, b) , existuje v tomto bodě i limita funkce $f(x, y) - f(a, b)$ a platí

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \Phi(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (f(x, y) - f(a, b)).$$

Šikovnou, i když opět poněkud umělou úpravou vyjádříme funkci $\Phi(x, y)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \left(\frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a} - f_x(a, y) \right) (x - a) + (f_x(a, y) - f_x(a, b)) (x - a) + \\ &\quad + \left(\frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} - f_y(a, b) \right) (y - b). \end{aligned}$$

Limitu druhého a třetího sčítance určíme snadno. Ze spojitosti funkce $f_x(x, y)$ plyne

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (f_x(a, y) - f_x(a, b)) = 0.$$

Třetí sčítanec vůbec neobsahuje x , takže z definice parciální derivace podle y přímo dostaneme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left(\frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} - f_y(a, b) \right) = 0.$$

Trochu práce dá výpočet limity prvního sčítance. Považujme hodnotu y na chvíli za pevnou, označme $\varphi(x) = f(x, y) - f(a, y)$ a pro určitost předpokládejme $a < x$ (pro opačnou nerovnost by úvahy vypadaly zcela obdobně). Funkce $\varphi(x)$ jedné proměnné x je spojitá, jak vyplývá z existence její derivace $\varphi'(x) = f_x(x, y)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (věta 2.2 a věta G.1) existuje v intervalu (a, x) číslo ξ tak, že $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x - a)$, tj. $f(x, y) - f(a, y) = f_x(\xi, y)(x - a)$. Ze spojitosti funkce $f_x(x, y)$ s uvážením nerovnosti $a < \xi < x$ plyne

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left(\frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a} - f_x(a, y) \right) = \lim_{(\xi,y) \rightarrow (a,b)} (f_x(\xi, y) - f_x(a, y)) = 0.$$

Limita funkce $\Phi(x, y)$ v bodě (a, b) je nulová, proto $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$. Funkce $f(x, y)$ je v bodě (a, b) spojitá. A jestlipak jste si při čtení důkazu všimli jedné zajímavosti? Předpokládané spojitosti obou parciálních derivací funkce $f(x, y)$ jsme totiž nevyužili zcela. Při zvoleném postupu důkazu jsme ji potřebovali pouze u funkce $f_x(x, y)$, u funkce $f_y(x, y)$ jsme vystačili pouze s existencí. Důkaz bychom mohli vést také s využitím spojitosti $f_y(x, y)$ a existence f_x . Je vidět, že pro důkaz spojitosti funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) bychom mohli původní předpoklady o jejich parciálních derivacích dokonce ještě trochu oslabit.

Pomocí definice parciálních derivací prvního řádu můžeme dospět k zobecnění pojmu parciální derivace na vyšší řád.

Označme $D^{(i)} \subset D$ množinu všech bodů $x \in D$, v nichž je definována parciální derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Existuje-li v bodě x parciální derivace funkce $f_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = D_i f(x)$ podle proměnné x_j , $j \in \{1, \dots, n\}$, nazýváme ji *parciální derivace druhého řádu funkce $f(x)$ podle proměnných x_i a x_j* a značíme

$$f_{ij}(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = D_{ij} f(x).$$

Obdobně postupujeme dále a definujeme parciální derivace vyšších řádů. Pro obecný výběr k indexů i_1, i_2 až i_k z množiny $\{1, \dots, n\}$, tj. pro variaci s opakováním (i_1, i_2, \dots, i_k) , dostaneme *parciální derivaci k -tého řádu funkce $f(x)$ v daném bodě*. Značíme

$$f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = D_{i_1 i_2 \dots i_k} f(x).$$

Nejsou-li indexy i_1 až i_k , označující proměnné, podle kterých se při výpočtu parciální derivace k -tého řádu derivovalo, shodné, nazýváme tyto derivace *smíšené*. Pokud pracujeme s funkcemi

dvou a tří proměnných a místo $f(x_1, x_2)$, resp. $f(x_1, x_2, x_3)$ píšeme $f(x, y)$, resp. $f(x, y, z)$, což bývá velmi časté, označujeme také odpovídajícím způsobem parciální derivace. Například zapisujeme f_1 jako f_x , f_2 jako f_y , f_{223} jako f_{yyz} , apod.

Při výpočtu parciálních derivací postupujeme podle praktického pravidla, které jsme formulovali již v odstavci 5.2.3. Derivujeme-li podle proměnné x_i , zacházíme s ostatními jako s konstantami. Vyplývá to přímo z definice parciálních derivací, stejně jako skutečnost, že pro parciální derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí platí stejná pravidla jako u funkcí jedné proměnné. Skutečně zde není co dokazovat.

Příklad 9.30: Jeden praktický výpočet parciálních derivací s fyzikálním významem

Zvolme funkci tří proměnných takto:

$$y = U(x) = U(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\kappa m M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Jistě v ní poznáváte gravitační potenciální energii, s níž jsme pracovali v kapitole 7 při řešení příkladu o pohybu planety kolem Slunce. Vypočteme nejprve její parciální derivace prvního řádu.

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = \kappa m M \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \\ U_2(x) &= \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = \kappa m M \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \\ U_3(x) &= \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = \kappa m M \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Fyzikové si mohou spočítat výraz

$$\sqrt{U_1^2(x) + U_2^2(x) + U_3^2(x)} = \frac{\kappa m M}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{\kappa m M}{r^2},$$

který představuje velikost gravitační síly, jíž působí Slunce na planetu. Dále vypočteme parciální derivace druhého řádu funkce $U(x)$:

$$\begin{aligned} U_{11}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_1} = \kappa m M \frac{x_2^2 + x_3^2 - 2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}, \\ U_{12}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_1} = -\kappa m M \frac{3x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}, \\ U_{21}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2} = -\kappa m M \frac{3x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}, \\ U_{13}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_1} = -\kappa m M \frac{3x_1 x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}, \\ U_{31}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3} = -\kappa m M \frac{3x_1 x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}, \\ U_{22}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_2} = \kappa m M \frac{x_1^2 + x_3^2 - 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{23}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_2} = -\kappa m M \frac{3x_2 x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}, \\
 U_{32}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} = -\kappa m M \frac{3x_2 x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}, \\
 U_{33}(x) &= \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_3} = \kappa m M \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}.
 \end{aligned}$$

Fyzikální význam má tentokrát výraz

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_3} = \\
 &= \frac{\partial U_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0.
 \end{aligned}$$

Ještě se s ním setkáme v odstavci 9.4 (příklad 9.78) a jeho fyzikální význam si ujasníme.

Opět, podobně jako v příkladu 5.11, si můžeme všimnout, že při parciálním derivování vyššího řádu lze zaměňovat pořadí proměnných, podle nichž derivujeme, jak to vyplývá z věty 5.1, kterou jsme zatím nedokázali. Dokážeme ji nyní. Nejprve ji však zobecníme.

Věta 9.4 (Zobecnění Schwarzovy věty): *Nechť funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ má na otevřené množině D spojité parciální derivace do k -tého řádu včetně. Předpokládejme, že (i_1, \dots, i_k) a (j_1, \dots, j_k) , kde $1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \leq n$, jsou libovolné výběry indexů lišící se pouze pořadím. Pak platí*

$$\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}, \quad \text{neboli} \quad D_{i_1 \dots i_k} f(x) = D_{j_1 \dots j_k} f(x)$$

pro všechny body $x \in D$.

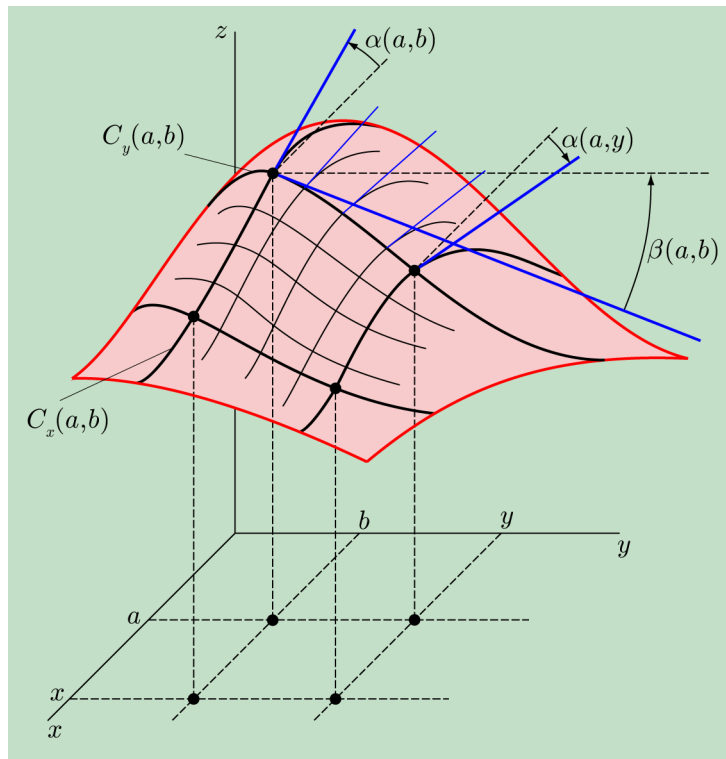
Předchozí věta umožňuje zjednodušit zápis parciálních derivací. Uvažujme o situaci, kdy derivujeme podle proměnných $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ k_1 -krát, k_2 -krát, \dots , k_m -krát, přičemž $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k$. Platí-li předpoklady věty 9.4, je jedno, v jakém pořadí proměnných jsme derivovali. Různá pořadí dávají stejný výsledek, který zapisujeme ve tvaru

$$\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \dots \partial x_{i_m}^{k_m}}, \quad \text{například} \quad \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^7 f(x, y, z)}{\partial x^3 \partial y^2 \partial z^2}, \quad \text{apod.}$$

Protože se při parciálním derivování funkce podle jedné z proměnných s ostatními proměnnými „nehýbe“, stačí větu 9.4 dokázat pro funkci dvou proměnných. Důkaz také stačí provést pro smíšené derivace druhého řádu. Jeho platnost pak lze rozšířit na vyšší řád matematickou indukcí. Předpokládejme tedy, že funkce $f(x, y)$ je definována na otevřené množině D a má na ní spojité smíšené derivace druhého řádu $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$. Zvolme libovolný bod $(a, b) \in D$.

S hodnotami funkce a jejích derivací budeme pracovat na nějakém okolí $\mathcal{O}(a, b) \subset D$ tohoto bodu.

Než se do důkazu pustíme, pokusme se udělat si představu, zda má rovnost $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ nějaký geometrický význam. Poslouží k tomu obrázek 9.18. Je na něm schematický graf funkce $f(x, y)$ s vyznačením bodů (a, b) , (x, b) , (a, y) , (x, y) definičního oboru a odpovídajících bodů grafu $(a, b, f(a, b))$, $(x, b, f(x, b))$, $(a, y, f(a, y))$, $(x, y, f(x, y))$. (Body jsou vyznačeny kroužky, nejsou však popsány, aby obrázek neztratil přehlednost.) Derivujeme postupně jak podle x , tak podle y , takže ve hře budou limity příslušných výrazů pro $x \rightarrow a$ a $y \rightarrow b$. Geometrický význam parciální derivace $f_x(a, b)$ jsme si vyložili již dříve. Je to směrnice tečny



Obr. 9.18 Smíšené derivace — „směrnice směrníc“.

vedené v bodě $(a, b, f(a, b))$, ležícím na grafu funkce $f(x, y)$, ke křivce $C_x(a, b)$, která vznikne řezem grafu rovinou o rovnici $y = b$. Tato křivka je tvořena body $(x, b, f(x, b))$. Označíme-li úhel, který svírá tečna s osou x , symbolem $\alpha(a, b)$, pak $f_x(a, b) = \operatorname{tg} \alpha(a, b)$. Hodnota smíšené parciální derivace $f_{xy}(a, b)$ pak udává, jak rychle se mění tato směrnice v daném bodě podél křivky $C_y(a, b)$ vzniklé řezem grafu rovinou $x = a$. A podobně, $f_y(a, b) = \operatorname{tg} \beta(a, b)$ je tangenta úhlu $\beta(a, b)$, který svírá tečna vedená bodem $(a, b, f(a, b))$ ke křivce $C_y(a, b)$ vzniklé řezem grafu rovinou $x = a$, $f_{yx}(a, b)$ vyjadřuje rychlost její změny podél křivky $C_x(a, b)$ vzniklé řezem grafu rovinou $y = b$. Křivky i úhly jsou rovněž vyznačeny v obrázku. Obrázek také pomůže přijít na to, „jak na důkaz“. Pro první derivace jsou rozhodující změny funkčních hodnot při

změnách proměnných, tj. výrazy

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b}, & g(a) &= \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}, & y &\neq b, \\ h(y) &= \frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a}, & h(b) &= \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}, & x &\neq a. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Pro druhé derivace pak potřebujeme změny těchto změn, tj.

$$G = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}, \quad \text{resp.} \quad H = \frac{h(y) - h(b)}{y - b}. \quad (9.12)$$

Funkce $g(x)$, resp. $h(y)$ mají v bodech x , resp. y , pro něž (x, y) , (x, b) , $(a, y) \in \mathcal{O}(a, b)$ a $y \neq b$, resp. $x \neq a$, derivace

$$g'(x) = \frac{f_x(x, y) - f_x(x, b)}{y - b}, \quad h'(y) = \frac{f_y(x, y) - f_y(a, y)}{x - a}.$$

Počítejme nejprve výraz G , hodnotu proměnné $y \neq b$ berme pro tuto chvíli jako pevnou. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci $g(x)$ existuje mezi body a a x číslo ξ , tak, že platí $g(x) - g(a) = g'(\xi)(x - a)$. Je tedy

$$G = g'(\xi) = \frac{f_x(\xi, y) - f_x(\xi, b)}{y - b}.$$

Aplikujeme-li znovu Lagrangeovu větu o střední hodnotě, tentokrát však na funkci $\gamma(y) = f_x(\xi, y)$, dostaneme $f_x(\xi, y) - f_x(\xi, b) = \gamma(y) - \gamma(b) = \gamma'(\eta)(y - b) = f_{xy}(\xi, \eta)(y - b)$, kde $\eta \in (a, y)$. Pak $G = f_{xy}(\xi, \eta)$. Obdobně lze postupovat s výrazem H , neboť na funkci $h(y)$ můžeme také aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Podle ní v intervalu (b, y) existuje číslo $\tilde{\eta}$ takové, že $h(y) - h(b) = h'(\tilde{\eta})(y - b)$. Dostáváme tak

$$H = h'(\tilde{\eta}) = \frac{f_y(x, \tilde{\eta}) - f_y(a, \tilde{\eta})}{x - a},$$

a po další aplikaci Lagrangeovy věty $h = f_{yx}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, kde $\tilde{\xi} \in (a, x)$. Vzhledem ke spojitosti funkcí $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$ v bodě (a, b) a skutečnosti, že $\xi, \tilde{\xi} \in (a, x)$ a $\eta, \tilde{\eta} \in (b, y)$ ovšem platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} G = \lim_{(\xi,\eta) \rightarrow (a,b)} f_{xy}(\xi, \eta) = f_{xy}(a, b), \quad (9.13)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} H = \lim_{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \rightarrow (a,b)} f_{yx}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = f_{yx}(a, b). \quad (9.14)$$

Vyjádřili jsme sice smíšené parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) pomocí vztahů (9.13) a (9.14), ale jejich rovnost stále není vidět. Když však upravíme výrazy G a H , uvidíme, že jsou stejné:

$$\begin{aligned} G &= \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \left[\frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b} - \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \right] = \\ &= \frac{f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b)}{(x - a)(y - b)}. \\ H &= \frac{h(y) - h(b)}{y - b} = \frac{1}{y - b} \left[\frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a} - \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \right] = \\ &= \frac{f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b)}{(x - a)(y - b)}. \end{aligned}$$

Pozornému čtenáři nejspíš neunikla mírná odlišnost předpokladů Schwarzovy věty 5.1, formulované pro funkci dvou proměnných a její smíšené parciální derivace druhého řádu, a věty 9.4, představující zobecnění pro funkci n proměnných a pro libovolný řád smíšených parciálních derivací. Zatímco totiž zobecněná verze (věta 9.4) předpokládá spojitost parciálních derivací funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ do k -tého řádu včetně, bez omezení na derivace smíšené, vystupuje ve větě 5.1 pouze předpoklad spojitosti *smíšených* derivací $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$ v bodě (a, b) . S tímto „slabším“ předpokladem jsme také při důkazu vystačili. Z postupu, který jsme použili, je zřejmé, že zobecnění Schwarzovy věty pro funkci n proměnných a libovolný řád smíšených derivací bychom uměli dokázat stejně, třeba matematickou indukcí. Pro rovnost derivací

$$D_{i_1 \dots i_k} f(x_1, \dots, x_n) = D_{j_1 \dots j_k} f(x_1, \dots, x_n)$$

při výběrech indexů (i_1, \dots, i_k) a (j_1, \dots, j_k) , $1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \leq n$, lišících se pouze pořadím, skutečně stačí předpokládat spojitost právě těchto derivací. Poněkud silnější předpoklad ve větě 9.4 není fakticky funkční a je zvolen spíše pro „fomulační pohodlí“. Navíc umožňuje v případě potřeby pracovat se spojitostí všech derivací a samotné funkce.

Pro úplnost „instruktáže“ zkusme ještě vymyslet funkci $f(x, y)$, která nebude splňovat zesílené předpoklady věty 9.4. Půjde o takovou funkci, která sice bude mít spojitě smíšené derivace $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$, ale u derivace $f_{xx}(x, y)$ nebo $f_{yy}(x, y)$ bude spojitost porušena. Takovým příkladem je třeba funkce definovaná na \mathbf{R}^2 předpisem

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{pro } x \geq 0 \quad \text{a} \quad f(x, y) = -x^2 + y^2 \quad \text{pro } x < 0.$$

Platí pro ni

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= |x|, & f_y(x, y) &= 2y, & f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 0, & f_{yy}(x, y) &= 2, \\ f_{xx}(x > 1, y) &= 1, & f_{xx}(x < 1, y) &= -1, & f_{xx}(0, y) & \text{neexistuje.} \end{aligned}$$

V bodech $(0, y)$, $y \in \mathbf{R}$ není derivace f_{xx} dokonce vůbec definována. Smíšené derivace však Schwarzovu větu splňují.

Formulace Schwarzovy věty i jejího zobecnění nám napovídá, že existují situace, kdy smíšené parciální derivace nejsou záměnné. Pokud by smíšené parciální derivace, popřípadě některá z nich, nebyly spojité, tak si nemusí (ale mohou) být rovny. Následující dva příklady jsou toho dokladem.

Příklad 9.31: Smíšené parciální derivace si mohou být rovny, i když nejsou spojité

Schwarzova věta nezakazuje, aby si smíšené parciální derivace byly rovny, i když nejsou spojité. Jejich spojitost není nutnou podmínkou pro jejich rovnost. Ukážeme si to na vděčné funkci z příkladů 9.17 a 9.18,

$$\mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \in \mathbf{R} \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Tato funkce je na \mathbf{R}^2 spojitá. Pomocí rovnosti $f(0, 0) = 0$ jsme ji totiž dodefinovali tak, aby byla spojitá i v bodě $(0, 0)$, v němž nefunguje vzorec. Vypočteme její parciální derivace $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$ jak v obecném bodě, tak zejména v „podezřelém“ bodě $(0, 0)$.

$$f_x(x, y) = \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = 0,$$

$$f_y(x, y) = \frac{2x^2y(x^2 + y^2) - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y) = 0.$$

A jak jsme přišli na to, že limity funkcí $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$ v bodě $(0, 0)$ jsou nulové? Třeba pomocí triku s polárními souřadnicemi z příkladu 9.18. Tak například pro $f_x(x, y)$ je

$$f_x(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) = \frac{2\varrho^5 \cos \varphi \sin^4 \varphi}{(\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi)^2} = 2\varrho \cos \varphi \sin^4 \varphi \longrightarrow 0.$$

Pro parciální derivace f_x a f_y v bodě $(0, 0)$ dostaneme přímo z definice

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0, \quad f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Vidíme tedy, že jsou spojité. Spočítejme smíšené derivace druhého řádu.

$$f_{xy}(x, y) = \frac{8xy^3(x^2 + y^2)^2 - 8xy^5(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{8x^3y^3}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{8x^3y(x^2 + y^2)^2 - 8x^5y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{8x^3y^3}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Že jsou si tyto parciální derivace rovny pro $(x, y) \neq (0, 0)$ nás nepřekvapuje. Jsou totiž spojité, a platí přece Schwarzova věta. Vypočteme jejich limity v bodě $(0, 0)$. Budeme-li se k němu blížit po přímkách $y = kx$, dostaneme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=kx} f_{xy}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=kx} f_{yx}(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8k^3x^6}{(x^2 + k^2x^2)^3} = \frac{8k^3}{(1 + k^2)^3}.$$

Limita tedy neexistuje. Pro smíšené derivace $f_{xy}(0, 0)$ a $f_{yx}(0, 0)$ platí

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0, \quad \text{a podobně} \quad f_{yx}(0, 0) = 0.$$

Derivace f_{xy} a f_{yx} funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$ existují a dokonce jsou si rovny, i když v tomto bodě nejsou spojité.

Příklad 9.32: Smíšené parciální derivace si nemusí být rovny

V předchozím příkladu jsme se setkali s funkcí, jejíž smíšené parciální derivace druhého řádu v daném bodě existovaly, nebyly v něm však spojité, a přesto si byly rovny. Funkce totiž byla „příliš symetrická“. Příklad funkce, který nám ještě zbývá vymyslet, tj. takové, která má smíšené druhé derivace v daném bodě nespojité a různé, vytvoříme tak, že funkci z příkladu 9.31 poněkud „znesymetrizujeme“. Zvolme funkci definovanou na \mathbf{R}^2 takto:

$$f(x, y) = \frac{x^3y + x^2y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pro} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{a} \quad f(0, 0) = 0.$$

Limita této funkce v bodě $(0, 0)$ je nulová. Funkce je spojitá na \mathbf{R}^2 . Nejprve vypočteme parciální derivace prvního řádu pro $(x, y) \neq (0, 0)$. Pro určení limity v bodě $(0, 0)$ použijeme „fintu“ s polárními souřadnicemi a limitní přechod $\varrho \rightarrow 0$ podle návodu v příkladu 9.18. Platí

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{(3x^2y + 2xy^2)(x^2 + y^2) - 2x(x^3y + x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 3x^2y^3 + 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{\varrho^5}{\varrho^4} (\cos^4 \varphi \sin \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 2 \cos \varphi \sin^4 \varphi) \rightarrow 0, \\ f_y(x, y) &= \frac{(x^3 + 2x^2y)(x^2 + y^2) - 2y(x^3y + x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - x^3y^2 + 2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{\varrho^5}{\varrho^4} (\cos^5 \varphi - \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 2 \cos^4 \varphi \sin \varphi) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Jak je to s derivacemi prvního řádu v bodě $(0, 0)$? Vypočteme je z definice.

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Derivace prvního řádu jsou tedy spojité, opět v celé rovině \mathbf{R}^2 . Pusťme se do výpočtu smíšených derivací druhého řádu v bodě $(x, y) \neq (0, 0)$. Opět budeme zjišťovat, zda existuje jejich limita v bodě $(0, 0)$, a to vzhledem k přímkám $y = kx$, $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{(x^4 + 9x^2y^2 + 8xy^3)(x^2 + y^2)^2 - 4y(x^4y + 3x^2y^3 + 2xy^4)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \\ &= \frac{x^6 + 6x^4y^2 + 8x^3y^3 - 3x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}, \\ f_{xy}(x, kx) &= \frac{x^6(1 + 6k^2 + 8k^3 - 3k^4)}{x^6(1 + k^2)^3} = \frac{1 + 6k^2 + 8k^3 - 3k^4}{(1 + k^2)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yx}(x, y) &= \frac{(5x^4 - 3x^2y^2 + 8x^3y)(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^5 - x^3y^2 + 2x^4y)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \\
&= \frac{x^6 + 6x^4y^2 + 8x^3y^3 - 3x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}, \\
f_{yx}(x, kx) &= \frac{x^6(1 + 6k^2 + 8k^3 - 3k^4)}{x^6(1 + k^2)^3} = \frac{1 + 6k^2 + 8k^3 - 3k^4}{(1 + k^2)^3}.
\end{aligned}$$

Limita funkcí $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$ v bodě $(0, 0)$ vzhledem k přímkám $y = kx$ závisí na jejich směrnici, limita jako taková tedy neexistuje. Z definice opět vypočteme smíšené derivace druhého řádu v bodě $(0, 0)$.

$$\begin{aligned}
f_{xy}(0, 0) &= \lim_{(y \rightarrow 0)} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0, \\
f_{yx}(0, 0) &= \lim_{(x \rightarrow 0)} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1.
\end{aligned}$$

Dospěli jsme k závěru, že smíšené derivace druhého řádu naší funkce v bodě $(0, 0)$ sice existují, ale nejsou si rovny. (A všimli jste si, že mimo bod $(0, 0)$ si rovny jsou? To ale není divné, že? Vždyť s výjimkou bodu $(0, 0)$ jsou spojitě!)

Na závěr tohoto odstavce ještě korektně formulujeme a dokážeme pravidlo pro parciální derivování složených funkcí, které jsme již v praxi používali v páté kapitole (odstavec 5.2.3). V dodatku H prvního dílu jsme je pro případ funkce jedné proměnné nazvali *řetězovým pravidlem*. Složenou funkci jsme obecně definovali v odstavci 9.2.1.

Věta 9.5 (Řetězové pravidlo pro derivaci složené funkce): Předpokládejme, že funkce $y_1(x) = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$, $y_2(x) = \varphi_2(x_1, \dots, x_n)$, \dots , $y_m(x) = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$ mají v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ parciální derivace prvního řádu, a že funkce $f(y) = f(y_1, \dots, y_m)$ má v bodě $w = (w_1, \dots, w_m)$, kde $w_\alpha = \varphi_\alpha(a_1, \dots, a_n)$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$, spojitě parciální derivace prvního řádu. Pak složená funkce

$$F(x_1, \dots, x_n) = f[\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)]$$

má v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ parciální derivace prvního řádu a platí

$$\left. \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \right|_{x=a} = \sum_{\alpha=1}^m \left. \frac{\partial f(y)}{\partial y_\alpha} \right|_{y=w} \left. \frac{\partial \varphi_\alpha(x)}{\partial x_i} \right|_{x=a} \quad (9.15)$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Pro parciální derivace složené funkce se často užívá zkrácený zápis. Použijeme-li místo $y_\alpha = \varphi_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ označení $y_\alpha = y_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ a přestaneme-li vypisovat proměnné, resp.

vyznačení jejich hodnot v konkrétních bodech, můžeme psát

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i}. \quad (9.16)$$

Musíme jen dát pozor, abychom derivace vyčíslili v těch správných bodech. Vztah (9.16) přímo vybízí k použití názvu *řetězové pravidlo*. Je z něj totiž také dobře vidět, jak by vypadal vzorec pro parciální derivace funkce, která by vznikla složitějším způsobem než jen složením vnější složky a vnitřních složek první úrovně. Každá z těchto vnitřních složek by sama mohla být složenou funkcí, atd. Například v obrázku 9.8 by toto *řetězení* znamenalo vložení další řady „černých skříněk“.

Zbývá řetězové pravidlo dokázat. Aby byl důkaz pochopitelný a všechny jeho kroky „přehledné“, provedeme jej pouze pro funkci, jejíž vnější složka bude funkcí dvou proměnných a každá z vnitřních složek rovněž. Obecný případ by se dokazoval úplně stejně, jen by znamenal více psaní. Uvažujeme tedy o funkci

$$F(x, y) = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \quad f = f(u, v), \quad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

O vnitřních složkách $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ předpokládáme, jak to žádá formulace věty 9.5, že mají parciální derivace prvního řádu v bodě (a, b) , u vnější složky $f(u, v)$ pak předpokládáme spojitost parciálních derivací prvního řádu v bodě $(\varphi(a, b), \psi(a, b))$.

Pozn.: Ve větě o derivování složených funkcí se někdy uvádějí trochu slabší předpoklady, než jsme použili nyní. Na vnější složku se obvykle klade požadavek *diferencovatelnosti*, pro kterou je spojitost parciálních derivací postačující podmínkou. Náš „silnější“ předpoklad však není na škodu. Jednak umožní dokázat řetězové pravidlo bez znalosti pojmu diferencovatelné funkce, jednak je ve většině fyzikálních či jiných praktických příkladů splněn. Pojem diferencovatelnosti však nevynecháme, seznámíme se s ním v příštím odstavci.

Nyní již k důkazu věty 9.5. Počítejme parciální derivaci funkce $F(x, y) = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ podle proměnné y v bodě (a, b) . (Klasické učebnice se většinou omezují na důkaz pravidla pro derivaci podle x a případ derivace podle y prohlásí za analogický, provedme obměnu.) K tomu potřebujeme upravovat definiční výraz $\frac{F(a, y) - F(a, b)}{y - b}$ tak, abychom do výpočtu „zamontovali“ výrazy pro derivace jak vnější složky, tak složek vnitřních. Umožní nám to poněkud formální úprava, která nebude úplně nová — podobně jsme totiž postupovali při důkazu věty H.1 v dodatku H prvního dílu. Označme

$$(u, v) = (\varphi(a, y), \psi(a, y)) \quad \text{a} \quad (u_0, v_0) = (\varphi(a, b), \psi(a, b)).$$

Platí

$$\begin{aligned} \frac{F(a, y) - F(a, b)}{y - b} &= \frac{f[\varphi(a, y), \psi(a, y)] - f[\varphi(a, b), \psi(a, b)]}{y - b} = \frac{f(u, v) - f(u_0, v_0)}{y - b} = \\ &= \frac{f(u, v) - f(u_0, v)}{u - u_0} \cdot \frac{\varphi(a, y) - \varphi(a, b)}{y - b} + \frac{f(u_0, v) - f(u_0, v_0)}{v - v_0} \cdot \frac{\psi(a, y) - \psi(a, b)}{y - b}. \end{aligned}$$

Funkce $g(\xi) = f(\xi, v)$ je pro dané v spojitou funkcí proměnné ξ na intervalu $[u_0, u]$, přičemž uvnitř tohoto intervalu má derivaci $g'(\xi) = f_u(\xi, v)$. Víte, z čeho plyne spojitost funkce $g(\xi)$ a z čeho existence její derivace? Bez újmy na obecnosti povedeme další úvahy pro interval $[u_0, u]$, je samozřejmé, že pro případ $u < u_0$ by se jednalo o interval $[u, u_0]$. Obdobně je funkce $h(\eta) = f(u_0, \eta)$ spojitou funkcí proměnné η na intervalu $[v_0, v]$ a uvnitř tohoto intervalu má derivaci $h'(\eta) = f_v(u_0, \eta)$. Pro funkce $g(\xi)$ a $h(\eta)$ lze použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Existují tedy body $\xi_0 \in (u_0, u)$ a $\eta_0 \in (v_0, v)$ tak, že platí

$$g(u) - g(u_0) = g'(\xi_0)(u - u_0) \implies f(u, v) - f(u_0, v) = f_u(\xi_0, v)(u - u_0),$$

$$h(v) - h(v_0) = h'(\eta_0)(v - v_0) \implies f(u_0, v) - f(u_0, v_0) = f_v(u_0, \eta_0)(v - v_0).$$

Pak dostáváme

$$\frac{F(a, y) - F(a, b)}{y - b} = f_u(\xi_0, v) \cdot \frac{\varphi(a, y) - \varphi(a, b)}{y - b} + f_v(u_0, \eta_0) \cdot \frac{\psi(a, y) - \psi(a, b)}{y - b}.$$

Při výpočtu limity výsledného výrazu pro $y \rightarrow b$ využijeme

- existence parciálních derivací funkcí $\varphi(x, y)$ a $\psi(x, y)$ v bodě (a, b) , tj.

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{\varphi(a, y) - \varphi(a, b)}{y - b} = \varphi_y(a, b), \quad \lim_{y \rightarrow b} \frac{\psi(a, y) - \psi(a, b)}{y - b} = \psi_y(a, b),$$

- spojitosti funkcí $\varphi(a, y)$ a $\psi(a, y)$, chápaných jako funkce jedné proměnné y , v bodě $y = b$, z níž vyplývá

$$\varphi(a, y) \longrightarrow \varphi(a, b), \quad \psi(a, y) \longrightarrow \psi(a, b), \quad \text{tj. } u \longrightarrow u_0, v \longrightarrow v_0 \quad \text{pro } y \longrightarrow b$$

(připomeňme, že tato „dílčí“ spojitost je důsledkem existence parciální derivace vnitřních složek $\varphi(x, y)$ a $\psi(x, y)$ v bodě (a, b) podle y),

- spojitosti parciálních derivací funkce $f(u, v)$ v bodě (u_0, v_0) , z níž při současné platnosti nerovností $u_0 < \xi_0 < u$, $v_0 < \eta_0 < v$ vyplývá

$$\lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} f_u(\xi_0, v) = f_u(u_0, v_0), \quad \lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} f_v(u_0, \eta_0) = f_v(u_0, v_0).$$

Výsledek tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$F_y(a, b) = f_u(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \varphi_y(a, b) + f_v(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \psi_y(a, b).$$

To je ovšem jen jiný zápis pravidla (9.15) pro složenou funkci se dvěma vnitřními složkami jako funkcemi dvou proměnných.

A nakonec ještě s výhodou využijeme pravidla pro derivování složené funkce k tomu, abychom dokázali zderivovat funkci zadanou implicitně. Podobnou úlohu, jenže pouze pro funkce jedné proměnné, jsme už řešili v prvním dílu, v příkladu 2.34.

Příklad 9.33: Derivace funkce zadané implicitně

Implicitní zadání funkce jedné proměnné v příkladu 2.34 znamenalo, že funkční předpis $y = f(x)$ byl „skryt“ v jiném funkčním předpisu, konkrétně $F(x, y) = 0$. Říkali jsme si, že může být obtížné, nebo dokonce neschůdné, proměnnou y z předchozího předpisu vyjádřit. Na konkrétním případu zadání jsme si ukázali, jak lze přesto získat derivaci funkce $y = f(x)$. Nyní se to naučíme obecně. Pro $y = f(x)$ dostáváme složenou funkci jedné proměnné $G(x) = F(x, f(x)) = 0$, jejíž derivaci vypočteme použitím právě dokázaného řetězového pravidla,

$$G'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, f(x))} + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, f(x))} f'(x) = 0 \implies f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, f(x))}}{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, f(x))}}.$$

Samozřejmě, předchozí postup i výsledek s jistotou platí za výchozích předpokladů věty 9.5, tj. že předpisem $F(x, y) = 0$ je skutečně nějaká funkce $y = f(x)$ zadána a má derivaci a že parciální derivace funkce $F(x, y) = 0$ existují a jsou spojitě. A také nesmí být výraz ve jmenovateli zlomku vyjadřujícího $f'(x)$ nulový.

Podobně může být implicitně zadána i funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$, například předpisem $F(x, y, z) = 0$. Dosazením $f(x, y)$ za z dostáváme složenou funkci dvou proměnných $G(x, y) = F(x, y, f(x, y)) = 0$, pro jejíž parciální derivace opět platí řetězové pravidlo

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, y, f(x, y))} + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, y, f(x, y))} + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Odtud pak

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, y, f(x, y))}}{\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, y, f(x, y))}}{\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))}}. \quad (9.17)$$

Vyzkoušejme si tento postup. Předpisem $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ jsou implicitně zadány funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

na uzavřeném kruhu $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vezměme třeba první z nich a spočítejme přímo její parciální derivace v libovolném bodě uvnitř množiny \bar{D} ,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Nyní tento výsledek ověříme pomocí vzorců (9.17) pro parciální derivace implicitní funkce. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, y, f(x, y))} &= 2x, & \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, y, f(x, y))} &= 2y, & \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x, y, f(x, y))} &= 2f(x, y) = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

A dokázali byste vzorce pro derivace funkce dané implicitně zobecnit pro libovolný počet proměnných?

Příklad 9.34: A k čemu je to dobré?

Takovou otázku může položit každý, komu neuniklo, že jsme v předchozím příkladu sice dokázali vypočítat derivaci funkce $y = f(x)$, resp. parciální derivace funkce $z = f(x, y)$ z jejího implicitního zadání ve tvaru $F(x, y) = 0$, resp. $F(x, y, z) = 0$, nakonec jsme však pro výsledné vyjádření funkci $y = f(x)$, resp. $z = f(x, y)$ potřebovali. Není tedy trápení s derivacemi implicitně zadané funkce zbytečné, když ji nakonec stejně musíme vyjádřit explicitně? A co když takové explicitní vyjádření opravdu nebude schůdné?

Výpočet derivací funkce zadané implicitně zbytečný není. Často se totiž setkáváme s úlohami, v nichž se potřeba explicitního funkčního předpisu $y = f(x)$, resp. $z = f(x, y)$ vůbec neobjeví. Tak například počítáme-li derivaci funkce $y = f(x)$ pomocí vztahu z předchozího příkladu

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x, f(x))} + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x, f(x))} f'(x) = 0$$

v konkrétním bodě $x = a$, potřebujeme jen hodnotu $b = f(a)$. Můžeme ji však třeba získat numericky, aniž bychom předpis $y = f(x)$ museli znát. Ještě lepší využití derivace implicitní funkce se naskytá v případě, kdy požadujeme, aby derivace $f'(x)$ byla nulová. To je třeba tehdy, hledáme-li stacionární body funkce. Pak pokládáme derivaci rovnu nule. Z podmínky $f'(x) = 0$ a předchozích vztahů dostáváme podmínku $\left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right| = 0$. A vyřešit tuto podmínku může být mnohem jednodušší než vyjádřit ze zadání $F(x, y) = 0$ funkční předpis $y = f(x)$, zderivovat, anulovat a vypočítat stacionární body. Ukažme, jak takový postup funguje třeba pro funkci $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Je předem vidět, že proměnná y nabývá lokálně největší hodnoty v případě, kdy je x^2 nejmenší, tj. $x = 0$. Platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \implies 2x = 0, \quad x = 0.$$

Polohu stacionárního bodu jsme získali velmi snadno a bez explicitního předpisu $z = f(x, y)$. A pro funkci $z = f(x, y)$ schovanou v implicitním zadání $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ dostaneme, pro jednoduchost již ve zkráceném zápisu,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Z požadavku nulovosti parciálních derivací funkce $z = f(x, y)$ vyplývá

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \implies 2x = 0 \implies x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \implies 2y = 0 \implies y = 0.$$

A explicitní předpis jsme opět nepotřebovali. Užitečnost vzorců pro derivace implicitně zadaných funkcí spočívá právě v takových aplikacích.

S využitím řetězového pravidla bychom samozřejmě dokázali vypočítat i libovolné vyšší derivace implicitně zadané funkce. Můžete se o to pokusit sami. V příkladu 9.57 v odstavci o extrémech funkcí se k tomuto problému ještě vrátíme.

9.2.3 Úplný, ale i neúplný diferenciál

Vzpomínáte si na pojem diferenciálu funkce jedné proměnné z odstavce 2.2.3 prvního dílu? K jeho definici jsme dospěli tak, že jsme vyjádřili přírůstek hodnoty funkce $f(x)$ při změně proměnné z hodnoty a na hodnotu $x = a + h$ jako součet dvou příspěvků. Prvním z nich byl

přírůstek „na tečně“, tedy přírůstek lineární, druhým pak hodnota jisté „chyby“ $\chi_a(h)$, která pro $h \rightarrow 0$ klesala k nule rychleji než lineárně. Nutnou a postačující podmínkou pro takový rozklad byla existence derivace funkce v bodě a , rozklad samotný byl v prvním dílu vyjádřen vztahem (2.25). Připomeňme si její. Platí

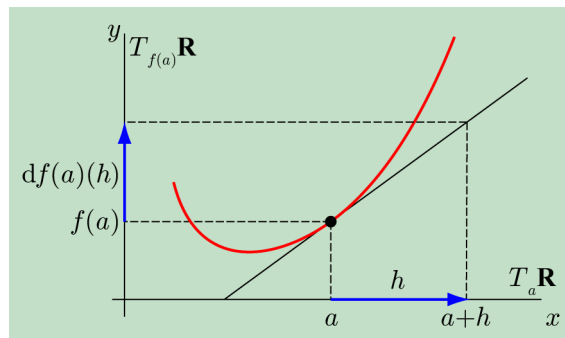
$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \chi_a(h), \quad \text{nebo také} \quad f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \chi_a(x-a).$$

(Úplným) diferenciálem funkce jsme nazývali lineární výraz

$$df(a)(h) = f'(a)h, \quad \text{nebo také} \quad df(a)(x-a) = f'(a)(x-a).$$

Slovo „úplný“ je v závorce, neboť pro funkci jedné proměnné ani jiný typ diferenciálu neexistuje.

Podívejme se na diferenciál funkce jedné proměnné z pohledu algebry, kterou jsme v prvním dílu ještě neměli k dispozici v takovém rozsahu jako nyní. Někomu bude možná tento popis v případě funkce jedné proměnné připadat nadbytečně složitý — jak se někdy říká „s kladivem na komára“. Oceníme jej však u funkcí více proměnných. Vyjděme z obrázku 9.19. S bodem



Obr. 9.19 Diferenciál funkce jako lineární zobrazení vektorových prostorů.

a na ose x spojíme jednorozměrný vektorový prostor $T_a \mathbf{R}$, který nazveme *tečný prostor k \mathbf{R} v bodě a* . Obecně jej samozřejmě můžeme sestavit v každém bodě reálné osy \mathbf{R} .

Popíšeme takovou konstrukci podrobněji: Na reálné ose, která je topologickým prostorem s euklidovskou topologií, „sedí“ body. Do každého z nich, obecně do bodu $a \in \mathbf{R}$, umístujeme *vázané* vektory různých délek, které si představujeme rovnoběžné se zvolenou reálnou osou. Tyto vektory lze sčítat a násobit reálnými čísly podle pravidel zavedených pro vektorový prostor. Množina $T_a \mathbf{R}$ všech takových vektorů s operacemi sčítání a násobení čísly je jednorozměrným vektorovým prostorem. Protože všechny jeho prvky jsou vázané vektory s počátečním bodem a , říkáme, že vektorový prostor $T_a \mathbf{R}$ je na reálné ose *umístěn v bodě a* . Název *tečný prostor* souvisí s tím, že jeho prvky jsou vlastně tečnými vektory v bodě a k přímce \mathbf{R} . Ještě lépe vynikne tento název později, kdy půjde o jednorozměrné tečné prostory ke křivkám, dvojrozměrné k rovinám, či křivým plochám, apod.

Obdobně spojíme s bodem $f(a)$ tečný prostor k ose funkčních hodnot, jednorozměrný tečný prostor $T_{f(a)} \mathbf{R}$. Zápis $df(a)(h) = f'(a)h$ můžeme nyní interpretovat tak, že jsme vyčíslili lineární

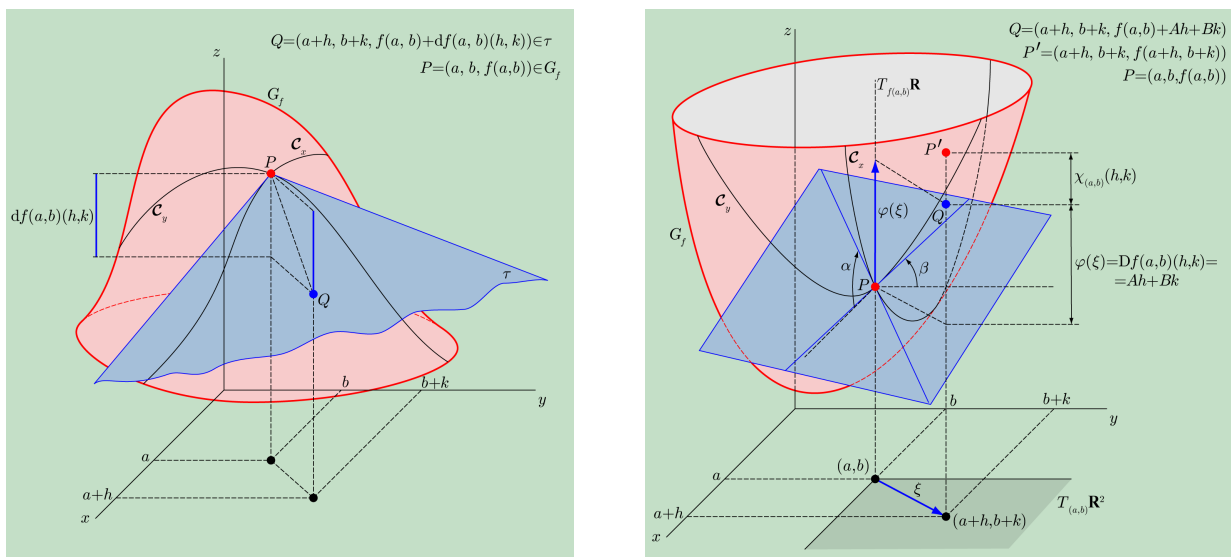
zobrazení

$$df(a) : T_a \mathbf{R} \ni h \longrightarrow df(a)(h) = (f'(a))(h) = f'(a)h \in T_{f(a)} \mathbf{R}.$$

Vektor h , vzor tohoto zobrazení, má jedinou složku, takže je reprezentován řádkovou maticí (h) typu 1/1, stejně jako obraz $df(a)(h)$. Matice tohoto jednoduchého lineárního zobrazení ($f'(a)$) je rovněž typu 1/1. Vyjádříme-li z definice diferenciálu výraz $\chi_a(h)/h$, pak pro jeho absolutní hodnotu dostaneme

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|\chi_a(h)|}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - df(a)(h)|}{|h|} = 0. \quad (9.18)$$

Vypadá to „krkolomně“? Tak ještě chvíli trpělivosti. Rozšířme nyní myšlenku rozkladu přírůstku funkční hodnoty na lineární přírůstek a „chybu“ na funkci dvou proměnných. Lineární přírůstek bychom tedy měli „odměřovat“ na tečné rovině (pokud bude možné ji sestrojít). Situaci vidíme na obrázku 9.20. Předpokládejme, že funkce $z = f(x, y)$ je definována v bodě (a, b) a jeho



Obr. 9.20 Přírůstek měřený na tečné rovině.

jistém okolí. Tečná rovina τ k jejímu grafu v bodě $(a, b, f(a, b)) \in G_f \subset \mathbf{R}^3$, pokud ji bude možné sestrojít, bude mít obecnou rovnici například ve tvaru $z = Ax + By + C$. Jaký je význam koeficientů A , B a C ? Význam koeficientu C je zřejmý hned. Kdybychom totiž znali A a B , určíme C z požadavku, že bod $(a, b, f(a, b))$ musí ležet v této rovině, konkrétně $C = f(a, b) - (Aa + Bb)$. Jak ale zjistit konstanty A a B ? Rovina o rovnici $y = b$ protne graf G_f naší funkce v křivce C_x . (V kapitole 5 jsme takové křivky nazývali souřadnicové.) Tečna k této křivce je zároveň tečnou ke grafu funkce v bodě $(a, b, f(a, b))$ a samozřejmě tedy leží v tečné rovině τ . Podobně můžeme uvažovat o souřadnicové křivce C_y , která je průsečnicí grafu G_f s rovinou $x = a$. Rovina τ obsahuje i tečnu k této křivce. Označíme-li úhel, který svírá tečna k

souřadnicové křivce \mathcal{C}_x se směrem osy x jako α a úhel mezi tečnou k souřadnicové křivce \mathcal{C}_y a směrem osy y jako β , dostaneme $A = \operatorname{tg} \alpha$ a $B = \operatorname{tg} \beta$. Když jsme se v předchozím odstavci zabývali geometrickým významem parciálních derivací funkce dvou proměnných, viděli jsme, že jsou to právě směrnice tečen k souřadnicovým křivkám.

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě dotyku $(a, b, f(a, b))$ je

$$z = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} (x - a) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} (y - b) + f(a, b).$$

Takže tečnou rovinu v daném bodě $(a, b, f(a, b))$ grafu funkce bude možné sestavit vždy, když funkce bude mít v bodě (a, b) parciální derivace prvního řádu? A úplným diferenciálem funkce v daném bodě bude lineární výraz

$$df(a, b)(x - h, y - k) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} (x - h) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} (y - k)?$$

Nebude to tak jednoduché, jak se zdá. Abychom problém dobře pochopili, formulujme nejprve definici úplného diferenciálu funkce dvou proměnných. Použijeme analogie se vztahem (9.18), jak jsme jej zapsali pro funkci jedné proměnné. S bodem (a, b) opět spojíme tečný prostor — dvojrozměrný vektorový prostor $T_{(a,b)}\mathbf{R}^2$, s bodem $f(a, b)$ jednorozměrný tečný prostor $T_{f(a,b)}\mathbf{R}$.

Funkci $f(x, y)$ definovanou v bodě (a, b) a jistém jeho okolí nazveme *diferencovatelnou v bodě (a, b)* , jestliže existuje lineární zobrazení

$$\varphi : T_{(a,b)}\mathbf{R}^2 \ni \xi = (h, k) \longrightarrow \varphi(\xi) \in T_{f(a,b)}\mathbf{R}$$

tak, že platí

$$\begin{aligned} \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \varphi(\xi)|}{|\xi|} &= & (9.19) \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \varphi(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \end{aligned}$$

Lineární zobrazení φ pak nazýváme *úplný diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b)* a značíme $\varphi = Df(a, b)$.

Vyčíslíme-li $Df(a, b)$ pro přírůstky $h = x - a$ a $k = y - b$, píšeme

$$Df(a, b)(h, k) = Ah + Bk, \quad \text{neboli} \quad Df(a, b)(x - a, y - b) = A(x - a) + B(y - b).$$

Samozřejmě, A a B jsou čísla — $\varphi = Df(a, b)$ je přece lineární zobrazení. Definici rovnou zobecníme na případ funkce více proměnných.

Funkci $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ definovanou v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ a jistém jeho okolí nazveme *diferencovatelnou v bodě a* , jestliže existuje lineární zobrazení

$$\varphi : T_a \mathbf{R}^n \ni \xi = (h_1, \dots, h_n) \longrightarrow \varphi(\xi) \in T_{f(a)} \mathbf{R}$$

tak, že platí

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{|f(a + \xi) - f(a) - \varphi(\xi)|}{|\xi|} = \lim_{\xi \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{|f(a + \xi) - f(a) - \varphi(\xi)|}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0. \quad (9.20)$$

Lineární zobrazení φ pak nazýváme *úplný diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a* a značíme $\varphi = Df(a)$.

Vztah (9.20) můžeme rozepsat podrobněji:

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{|f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - \varphi(h_1, \dots, h_n)|}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0.$$

Pro úplný diferenciál píšeme

$$\begin{aligned} Df(a)(\xi) &= Df(a_1, \dots, a_n)(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n = \\ &= A_1(x_1 - a_1) + \dots + A_n(x_n - a_n). \end{aligned}$$

Vzpomeneme-li si zase na lineární algebru, vidíme, že úplný diferenciál lze interpretovat jako lineární formu.

Pozn. 1: Leckterého čtenáře možná napadne, proč v definiční limitě (9.19), resp. (9.20) použijeme v čitateli absolutní hodnotu. V případě skalárních funkcí ať již jedné, či více proměnných, bychom ji použít nemuseli. Důvodem je však to, že již dopředu myslíme na možnost zobecnění pro funkce vektorové. Všimněme si, že ve jmenovateli výrazu za limitou je $\sqrt{h^2 + k^2}$, resp. $\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$, což je absolutní hodnota vektoru $(h, k) \in T_{(a,b)} \mathbf{R}^2$, resp. $\xi \in T_a \mathbf{R}^n$. U vektorových funkcí bude v čitateli také absolutní hodnota příslušného vektoru — odmocnina ze součtu čtverců jeho složek. V případě vztahů (9.19) a (9.20) je v čitateli ve skutečnosti také absolutní hodnota vektoru, ten však má jen jednu složku.

Pozn. 2: Úplný diferenciál se také někdy nazývá *derivací* funkce $f(x_1, \dots, x_n)$, i když tento název nebývá příliš obvyklý.

Dále se již budeme podrobněji věnovat funkcím dvou proměnných. Všechny vlastnosti, které má diferencovatelná funkce dvou proměnných, má funkce obecně n proměnných pro $n > 2$ také.

Pomiňme nyní na chvíli otázku, jak poznáme, zda úplný diferenciál pro danou funkci existuje, a řešme problém jeho jednoznačnosti. Mohou existovat dvě nebo více zobrazení splňujících

předchozí definici? Samozřejmě, že když takové zobrazení má rozumným způsobem zadávat tečnou rovinu v daném bodě grafu, rozhodně neočekáváme, že bude existovat „v několikerém provedení“. Své očekávání však musíme potvrdit, nebo vyvrátit. Předpokládejme tedy, že existují dvě lineární zobrazení φ a ψ s vlastnostmi odpovídajícími definici diferencovatelnosti. Důležité bude nejprve zjistit, zda limita

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|\varphi(h, k) - \psi(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad (9.21)$$

je, či není rovna nule. Počítejme proto výraz za limitou.

$$\begin{aligned} & \frac{|\varphi(h, k) - \psi(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ = & \frac{|[f(a+h, b+k) - f(a, b) - \varphi(h, k)] - [f(a+h, b+k) - f(a, b) - \psi(h, k)]|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \\ \leq & \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \varphi(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \psi(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že zobrazení φ i ψ splňují definici diferencovatelnosti funkce, je limita pro $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ každého ze sčítanců v právě získaném výrazu rovna nule. Totéž platí pro součet. Limita (9.21) je tedy nulová. Tento výsledek však ještě nezaručuje rovnost zobrazení φ a ψ . Známe přece případy, kdy limita nějakého zlomku je rovna nule, čítecitel však roven nule být nemusí. Máme však „v rukávu“ trumf: zobrazení φ a ψ jsou totiž lineární. Označme $\eta = t\xi \in T_{(a,b)}\mathbf{R}^2$, kde $t \in \mathbf{R}$ je parametr. Vektor η má tedy složky $\eta = (th, tk)$. Pro libovolné, ale na chvíli pevně zvolené (h, k) je pro $t \rightarrow 0$ také $\eta \rightarrow 0$. Platí

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{|\eta| \rightarrow 0} \frac{|\varphi(\eta) - \psi(\eta)|}{|\eta|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\varphi(th, tk) - \psi(th, tk)|}{\sqrt{(th)^2 + (tk)^2}} = \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t||\varphi(h, k) - \psi(h, k)|}{|t|\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\varphi(h, k) - \psi(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Výsledný výraz již nezávisí na parametru t a je roven nule pro libovolné h a k . Proto musí být $\varphi(h, k) = \psi(h, k)$ pro všechna (h, k) , takže $\varphi = \psi$.

Zabývejme se nyní otázkou, jak určit koeficienty A a B definující úplný diferenciál, jestliže víme, že funkce $f(x, y)$ je v bodě (a, b) diferencovatelná (rozhodovat o diferencovatelnosti konkrétních funkcí se naučíme později). Na základě úvah o tečné rovině jsme nabyli dojmu, že koeficienty A a B mají význam parciálních derivací funkce $f(x, y)$ v daném bodě podle proměnných x a y . Je však třeba to dokázat. Předpokládejme tedy, že funkce $f(x, y)$ je v bodě (a, b) diferencovatelná a $Df(a, b)$ je její úplný diferenciál. Jak víme, je to lineární zobrazení tečného prostoru $T_{(a,b)}\mathbf{R}^2$ k \mathbf{R}^2 v bodě (a, b) do tečného prostoru $T_{f(a,b)}\mathbf{R}$ k \mathbf{R} v bodě $f(a, b)$.

Každé lineární zobrazení $\varphi : V_n \rightarrow W_m$ je v bázích zvolených v těchto prostorech reprezentováno maticí typu n/m . V našem případě jde o maticí typu $2/1$ s prvky A a B , a to při volbě standardních bází v tečných prostorech, tj. $e_1 = (1, 0)$ a $e_2 = (0, 1)$ v $T_{(a,b)}\mathbf{R}^2$ a $f_1 = (1)$ v $T_{f(a,b)}\mathbf{R}$. Z definice úplného diferenciálu plyne

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Je-li totiž limita absolutní hodnoty funkce v daném bodě nulová, je nulová i limita bez absolutní hodnoty (pro jinou hodnotu limity to samozřejmě obecně neplatí). Víme však, že existuje-li limita funkce v daném bodě, je jedno, jakým způsobem se k tomuto bodu přibližujeme. Podle vztahů (9.9) pro postupný výpočet limity můžeme například psát

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{k \rightarrow 0} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - (Ah + Bk)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right] &= 0 \implies \\ \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h, b) - f(a, b) - Ah|}{|h|} &= 0. \end{aligned}$$

Jak jsme již připomněli, v případě nulové limity nehraje absolutní hodnota roli, proto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b) - Ah}{h} = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = A.$$

Na levé straně poslední rovnosti je definiční výraz pro parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) podle proměnné x . Proto

$$A = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} \quad \text{a podobně} \quad B = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)}.$$

Vztah pro B bychom dostali obdobným postupem jako pro A , museli bychom však zaměnit pořadí při výpočtu limity, tj.

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - (Ah + Bk)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \\ = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - (Ah + Bk)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Na základě předpokladu o diferencovatelnosti funkce, tj. o existenci jejího úplného diferenciálu, jsme dostali hned dva výsledky: funkce $f(x, y)$ má v bodě (a, b) parciální derivace prvního řádu podle obou proměnných, a ty jsou rovny číslům A a B , jak jsme na základě geometrické představy očekávali. Pro úplný diferenciál diferencovatelné funkce v daném bodě získáváme výsledný vztah

$$Df(a, b)(x - a, y - b) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} (x - a) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} (y - b), \quad (9.22)$$

nebo v maticovém zápisu pro $\xi = (x - a, y - b) = (h, k)$

$$Df(a, b)(h, k) = (h \ k) \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} \\ \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} \end{pmatrix}. \quad (9.23)$$

Maticový zápis si budeme později ještě připomínat.

Příklad 9.35: Diferencovatelná funkce a spojitost

Před chvílí jsme zjistili, že funkce, která je v daném bodě diferencovatelná, je „povinná“ mít v tomto bodě také parciální derivace prvního řádu. Také však víme, že pouhá existence parciálních derivací nezaručuje spojitost funkce. V příkladu 9.28 jsme si ukázali funkci, která měla v daném bodě parciální derivace, a přesto v něm nebyla spojitá. Protože však existence parciálních derivací je důsledkem diferencovatelnosti funkce, je možné, že diferencovatelnost je silnější vlastností. Má tedy smysl zabývat se otázkou, zda diferencovatelná funkce je také spojitá. Jde nám o zjištění, zda limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$. Použijeme opět verzi definičního vztahu pro diferencovatelnou funkci bez absolutní hodnoty a s označením $h = x - a$, $k = y - b$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - A(x - a) - B(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0.$$

Označíme-li výraz za limitou jako $F(x, y)$, přičemž $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x, y) = 0$, můžeme vyjádřit $f(x, y)$.

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + F(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Funkce $A(x - a) + B(y - b) + F(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ má však v bodě (a, b) nulovou limitu, a proto $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$. Funkce $f(x, y)$ je v bodě (a, b) spojitá.

Příklad 9.36: Plyne z existence parciálních derivací funkce její diferencovatelnost?

Odpověď na otázku se může zdát jednoduchá a na první pohled kladná. Jestliže má funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) parciální derivace $f_x(a, b)$ a $f_y(a, b)$, není přece nic jednoduššího než z nich sestavit lineární výraz

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b), \quad \text{nebo, jinak zapsáno,} \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} (x - a) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} (y - b).$$

A máme úplný diferenciál! Ale kdepak! Věc není tak jednoduchá, jak se zdá. Pro příklady nemusíme chodit daleko. Funkcemi dvou proměnných, které se například v bodě $(a, b) = (0, 0)$ chovaly, jak jsme potřebovali, jsme již pár vymyslet dokázali. Uvažujme třeba o funkci

$$f(x, y) = \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}.$$

Předchozím vzorcem je definována na $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, v bodě $(0, 0)$ ji dodefinujeme její limitou, která je nulová. Zkuste si limitu vypočítat pomocí triku s polárními souřadnicemi. Takto dodefinovaná funkce má v bodě $(0, 0)$ dokonce i parciální derivace prvního řádu. Platí

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 1,$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y^3}{y} = -2.$$

Je tedy diferenciál této funkce v bodě $(0, 0)$ roven $(1)(x-0) + (-2)(y-0) = x - 2y$? Aby tomu tak bylo, muselo by podle definice platit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - (x - 2y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Počítejme výraz za limitou. Označme jej $F(x, y)$ a rovnou dosazujme.

$$F(x, y) = \frac{\frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} - 0 - x + 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2y - xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Pokud jsme již nabyli trochu zkušeností při počítání limit, hned získáme podezření, že tato funkce v počátku soustavy souřadnic limitu nemá — čitatel i jmenovatel zlomku klesají při $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ k nule odhadem „stejně rychle“. Takový odhad ovšem není důkazem. Proto zvolme postup přibližování k počátku soustavy souřadnic po přímkách $y = kx$. Platí

$$F(x, kx) = \frac{2x^2(kx) - x(kx)^2}{(x^2 + k^2x^2)^{3/2}} = \frac{k(2 - k)}{(1 + k^2)^{3/2}}.$$

Výsledek je závislý na k , tedy na směrnici přímky, po níž se k počátku soustavy souřadnic přibližujeme. Limita funkce $F(x, y)$ v bodě $(0, 0)$ neexistuje. Funkce $f(x, y)$ proto není v tomto bodě diferencovatelná, i když v něm má parciální derivace prvního řádu.

Jak ale potom poznáme, zda je funkce diferencovatelná, aniž bychom museli prověřovat přímo definici? Postačující podmínkou je spojitost parciálních derivací prvního řádu. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě (a, b) *spojité* parciální derivace f_x a f_y . Pokud by funkce byla diferencovatelná, musel by být její diferenciál jako funkce proměnných $x - a$ a $y - b$ roven $Df(a, b)(x - a, y - b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$. Abychom diferencovatelnost funkce ověřili, musíme zkoumat známý definiční výraz

$$F(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}$$

a ukázat, že jeho limita v bodě (a, b) je nulová. Upravme jej trochu formálně, ale účelně. Do čitatele zlomku přičteme a hned odečteme $f(a, y)$ a výsledný výraz zapíšeme jako součet dvou zlomků vhodných pro další úvahy,

$$F(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, y) - f_x(a, b)(x - a)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} + \frac{f(a, y) - f(a, b) - f_y(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}.$$

Nabízí se možnost vyjádřit rozdíly $f(x, y) - f(a, y)$, resp. $f(a, y) - f(a, b)$ pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci jedné proměnné x , resp. y (poslední vlastnost ve větě 2.2 a věta G.1). Platnost Lagrangeovy věty je však zaručena pro funkce jedné proměnné, které jsou spojité na uzavřeném intervalu a uvnitř tohoto intervalu mají derivaci. Vyhovuje naše situace těmto požadavkům? Základem úvah, které potvrdí, že ano, je *spojitost* parciálních derivací funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) . Ta zaručuje jejich *existenci* ještě na *jistém okolí* $\mathcal{O}(a, b)$ bodu (a, b) (plyne to přímo z definice limity). Zvolme x a y tak, aby platilo $[a, x] \times \{y\} \subset \mathcal{O}(a, b)$. Pro dané y označme $p(x) = f(x, y)$. Pak $p(x)$ je spojitou funkcí proměnné x na intervalu $[a, x]$ a má na intervalu (a, x) derivaci $p'(x) = f_x(x, y)$. Lze tedy uplatnit Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Podle ní existuje číslo $\zeta \in (a, x)$ tak, že platí

$$p(x) - p(a) = p'(\zeta)(x - a) \implies f(x, y) - f(a, y) = f_x(\zeta, y)(x - a).$$

Podobnou úvahu provedeme pro funkci $q(y) = f(a, y)$, kdy

$$q(y) - q(b) = q'(\eta)(y - b) \implies f(a, y) - f(a, b) = f_y(a, \eta)(y - b)$$

pro jisté číslo $\eta \in (b, y)$. Pro $F(x, y)$ tak dostaneme výraz složený ze dvou sčítanců

$$F(x, y) = \frac{(f_x(\zeta, y) - f_x(a, b))(x - a)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} + \frac{(f_y(a, \eta) - f_y(a, b))(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}.$$

Každý z nich je součinem dvou funkcí, z nichž jedna je na (ryzím) okolí bodu (a, b) ohraničená a druhá má v bodě (a, b) za limitu nulu. Vezmeme-li například první ze sčítanců, pak

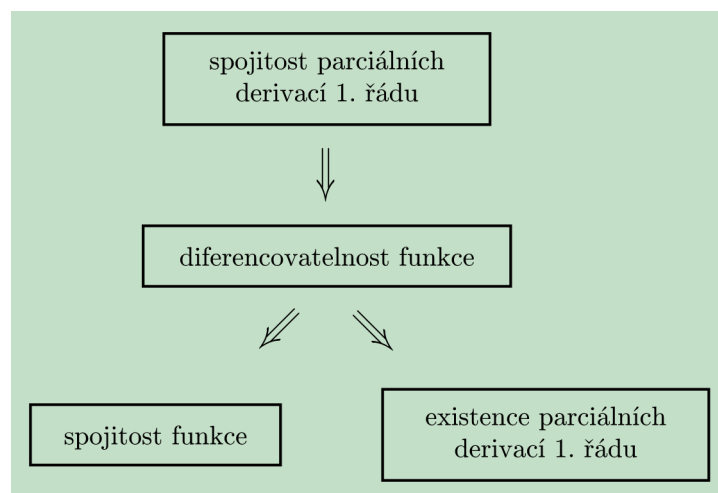
$$0 \leq \left| \frac{x - a}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \right| \leq 1, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (f_x(\zeta, y) - f_x(a, b)) = 0 \quad \text{pro } \zeta \in (a, x).$$

Limita součinu je podle věty 9.2 rovněž nulová. Stejná úvaha se týká druhého sčítance. Limita funkce $F(x, y)$ pro $(x, y) \rightarrow (a, b)$ je nulová a funkce $f(x, y)$ je v bodě (a, b) diferencovatelná.

Souvislost všech zatím studovaných důležitých vlastností funkce $f(x, y)$, tj. její spojitosti, diferencovatelnosti a existence či spojitosti parciálních derivací vyjádříme schematickým obrázkem a formulujeme ve větě.

Věta 9.6 (Spojitost — derivace — diferencovatelnost): Pro funkci $f(x, y)$ definovanou v bodě (a, b) a jeho jistém okolí platí:

- Je-li $f(x, y)$ v bodě (a, b) diferencovatelná, pak je v něm spojitá.
- Je-li $f(x, y)$ v bodě (a, b) diferencovatelná, pak v něm existují její parciální derivace prvního řádu, tj. $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$.
- Má-li $f(x, y)$ v bodě (a, b) spojitě parciální derivace prvního řádu f_x , f_y , pak je v něm diferencovatelná.



Obr. 9.21 Spojitost — derivace — diferencovatelnost.

Příklad 9.37: Je úplný diferenciál něčemu dobrý?

Třeba k tomu, abyste se mohli pochlubit, jak rychle bez počítače a kalkulačky vypočtete hodnotu nějakého složitě vypadajícího číselného výrazu. Podobnou úlohu jsme řešili již v příkladu 2.45 v prvním dílu pro funkci jedné proměnné. Určovali jsme tehdy přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{7,94}$. Nyní máme za úkol spočítat alespoň přibližně hodnotu

$$\frac{1,03^3 \cdot \sqrt{4,08}}{\sqrt{1,03} + \sqrt{4,08}}$$

Jedná se o funkční hodnotu funkce

$$f(x, y) = \frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

v bodě $(a + h, b + k) = (1,03, 4,08)$. Hodnota vypočtená na kalkulačce s přesností na 6 platných míst je 0,727 299. Vypočteme ji přibližně pomocí úplného diferenciálu. Bodem (a, b) je bod $(1, 4)$, vektor ξ má složky $(h, k) = (0,03, 0,08)$. Parciální derivace funkce $f(x, y)$ jsou

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(1,4)} = \frac{3x^2 \sqrt{y} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) - x^3 \sqrt{y} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \Bigg|_{(1,4)} = \frac{17}{9},$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(1,4)} = \frac{x^3 \frac{1}{2\sqrt{y}} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) - x^3 \sqrt{y} \frac{1}{2\sqrt{y}}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \Bigg|_{(1,4)} = \frac{1}{36}.$$

Parciální derivace prvního řádu jsou v bodě $(1, 4)$ a jeho okolí spojité, funkce je proto v bodě $(1, 2)$ diferencovatelná. Její úplný diferenciál v tomto bodě je

$$Df(1, 4)(x - 1, y - 4) = \frac{17}{9}(x - 1) + \frac{1}{36}(y - 4).$$

Pro konkrétní hodnoty $x - 1 = h = 0,03$ a $y - 4 = k = 0,08$ dostaneme

$$Df(1, 4)(0,03, 0,08) = \frac{17}{9} \cdot 0,03 + \frac{1}{36} \cdot 0,08 \doteq 0,059 \implies$$

$$\implies f(1,03, 4,08) \doteq f(1, 4) + Df(1, 4)(0,03, 0,08) \doteq \frac{2}{3} + 0,059 \doteq 0,726.$$

Je samozřejmě záležitostí stanovení kritéria přesnosti, abychom rozhodli, zda nám takový odhad přesné hodnoty stačí.

Příklad 9.38: „Fyzikální“ zápis úplného diferenciálu

Ve fyzikálních učebnicích najdeme zápis úplného diferenciálu nejčastěji, nebo prakticky vždy, ve tvaru

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy, \quad \text{nebo jen} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Co to znamená? Souvislost si nyní vyložíme. Především je zde písmenem „d“ označeno to, co jsme před chvílí značili D . Jde o jiný symbol úplného diferenciálu. Jak však máme chápat samotný zápis

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy?$$

Fyzikové často říkají, že $df(x, y)$ představuje „infinitesimálně malou změnu“ hodnoty funkce $f(x, y)$ odpovídající změnám dx a dy , rovněž „infinitesimálním“, proměnných x a y . Termín „infinitesimální“ je v uvozovkách, neboť matematikové jej právem nemají rádi. Říkat, že je něco „nekonečně malé“, skutečně není z matematického hlediska korektní. Ani my nebudeme zápisy obsahující „d“ takto interpretovat. Předchozí vztah je totiž jednoduše vyjádřením úplného diferenciálu funkce $f(x, y)$ pomocí úplných diferenciálů *souřadnicových funkcí* $s_1(x, y) = x$ a $s_2(x, y) = y$. Že to není na první pohled vidět? Vypočtěme „cvičně“ úplný diferenciál funkce $s_1(x, y) = x$. Užitím obecného vztahu (9.22) dostaneme

$$Ds_1(a, b)(x - a, y - b) = \left. \frac{\partial s_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} (x - a) + \left. \frac{\partial s_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} (y - b) = (x - a),$$

neboť

$$\left. \frac{\partial s_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} = 1, \quad \left. \frac{\partial s_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} = 0 \quad \text{pro libovolný bod } (a, b).$$

Podobně zjistíme, že

$$Ds_2(a, b)(x - a, y - b) = y - b.$$

Vztah (9.22) tedy můžeme přepsat způsobem, který se možná jeví jako zbytečně komplikovaný, je však užitečný a objasní nám „fyzikální“ zápis úplného diferenciálu.

$$Df(a, b)(x - a, y - b) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} Ds_1(a, b)(x - a, y - b) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} Ds_2(a, b)(x - a, y - b).$$

Protože funkce $s_1(x, y)$ představuje souřadnicovou funkci x (přiřazuje každému bodu jeho x -ovou souřadnici), můžeme zápis zjednodušit, $s_1(x, y) = x(x, y) = x$. Podobně $s_2(x, y) = y(x, y) = y$. Vztah pro úplný diferenciál funkce $f(x, y)$ se pak také zjednoduší:

$$Df(a, b)(x - a, y - b) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} Dx(a, b)(x - a, y - b) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} Dy(a, b)(x - a, y - b).$$

Toto zjednodušení nám ještě nemusí připadat významné. Vzhledem k tomu, že předchozí zápis platí pro libovolný bod (a, b) a libovolné přírůstky $x - a$ a $y - b$, nemusíme však tyto argumenty vypisovat. Pak už docílíme zjednodušení opravdu značného,

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x} Dx + \frac{\partial f}{\partial y} Dy, \quad \text{nebo také} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

V posledním zápisu jsme zaměnili velké D malým d , jak je v praktických situacích pro skalární funkce obvyklé. Vzpomeňte si, že jsme tohoto označení používali již v prvním dílu. Velké písmeno D se však používá pro ještě obecnější situace, konkrétně pro vektorové funkce více proměnných. Uvidíme to v dalších odstavcích.

Vraťme se nyní k obecným úvahám ve větě 9.6. Tato věta platí i pro případ funkce n proměnných. Důsledkem diferencovatelnosti funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ je její spojitost v tomto bodě. Ze spojitosti parciálních derivací prvního řádu funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ podle všech proměnných pak vyplývá její diferencovatelnost v bodě a . Úplný diferenciál funkce n proměnných v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ je lineární funkcí přírůstků $\xi = (h_1, \dots, h_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$,

$$Df(a_1, \dots, a_n)(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x=a} (x_i - a_i),$$

zkráceně a „fyzikálně“

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i.$$

V geometrii, fyzice a aplikovaných oborech jsou velmi časté případy, kdy je nutno pracovat s funkcemi tří proměnných. Většinou jde o funkce polohy, tj. prostorových souřadnic, $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$. Pojem úplného diferenciálu funkce tří proměnných se tedy rovněž uplatní velmi často. Ukáže to hned následující příklad.

Příklad 9.39: Práce síly a úplný diferenciál

Ve fyzice často potřebujeme počítat práci některé ze sil, například \vec{F} , které působí na hmotný bod pohybující se po určité trajektorii \mathcal{C} (terminologicky lze hovořit též o křivce, nebo o oblouku jako v odstavci 2.3.5). V případě, že trajektorii je přímka a síla \vec{F} je konstantní, je výpočet práce vykonané touto silou při posunutí částice o vektor $\Delta\vec{r}$ (samozřejmě po této přímce) velice jednoduchý. Tak jednoduchý, že jsme se jím zabývali již v samém začátku prvního dílu v odstavcích o vektorech (příklad 1.28). Problém nastává, je-li trajektorie křivá a síla proměnná. Pak můžeme mezi dvěma body trajektorie, řekněme (a, b, c) a (x, y, z) , které jsou odděleny vektorem posunutí $\Delta\vec{r} = (x - a, y - b, z - c)$, považovat sílu $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ za konstantní a zapsat přibližný vztah pro *elementární práci*

$$\Delta A = \vec{F} \Delta\vec{r} = F_1(x - a) + F_2(y - b) + F_3(z - c).$$

Celkovou práci dostaneme jako součet elementárních prací. Ty jsou ovšem přibližné, takže i výsledek bude pouze přibližný. Zpřesňovat jej můžeme, budeme-li úseky $\Delta\vec{r}$ volit menší a menší. Tato procedura nakonec povede k integrálu. Konkrétně půjde o *křivkový integrál druhého druhu* (vzpomeňte si na odstavec 2.3.5, kde jsme definovali křivkový integrál prvního druhu).

9.2. SKALÁRNÍ FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH 803

I zde budeme předpokládat, že trajektorie je hladký oblouk, nebo aspoň po částech hladký, a rektifikovatelný, jak jsme tyto pojmy zavedli v odstavci 2.3.5. Dále zjednodušíme situaci na případ, kdy síla \vec{F} závisí pouze na poloze částice, tj. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, tj.

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

V dalších odstavcích uvidíme, že se takové závislosti říká *vektorové pole*. Elementární práci můžeme zapsat tak, že přírůstky $x - a$, $y - b$ a $z - c$ vyjádříme jako úplné diferenciály souřadnicových funkcí, tentokrát s použitím „fyzikálního“ zápisu s malým „d“, tj.

$$\delta A = F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz.$$

Získaný výraz nemusí, ale může být úplným diferenciálem nějaké funkce $f(x, y, z)$. Proto jsme také pro označení elementární práce volili symbol δ , nikoli d . V tomto příkladu si všimneme pouze situace, kdy δA je úplným diferenciálem jisté funkce. Obecné situaci, která vede k pojmu křivkového integrálu druhého druhu, se budeme věnovat v odstavci 9.3.

Pokud je výraz pro δA úplným diferenciálem funkce $f(x, y, z)$, je výpočet celkové práce velmi jednoduchý. Tato situace nastane právě tehdy, nejsou-li složky síly $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ a $F_3(x, y, z)$ „nezávislé“, ale jsou-li z diferencovatelné funkce $f(x, y, z)$ odvozeny jako její parciální derivace

$$F_1(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \quad F_2(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \quad F_3(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}.$$

Funkce $f(x, y, z)$, pokud existuje, se nazývá *kmenovou funkcí* výrazu pro elementární práci. (Vzpomenete si na pojem kmenové funkce v odstavci 7.2.4 o exaktní diferenciální rovnici? Šlo o též pojem, jenže pro funkci pouze dvou proměnných.) Jak ale zjistíme, zda složky síly předchozí vztahy splňují, tj. zda kmenová funkce vůbec existuje? Jednou z možností je začít ji hledat. Kdyby ale neexistovala, byla by to zbytečná práce. Naštěstí je však možnost zjistit předem, zda má vůbec smysl se do této práce pouštět. Vypočteme-li z předchozích vztahů parciální derivace funkce F_1 podle y a z , a cyklicky parciální derivace F_2 podle x a z , resp. F_3 podle x a y , dostaneme

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}. \quad (9.24)$$

Za předpokladu, že by smíšené parciální derivace druhého řádu hledané funkce $f(x, y, z)$ byly spojité, byly by podle věty 9.4 záměnné.

Budou-li funkce F_1 , F_2 a F_3 i jejich parciální derivace $(F_1)_y$, $(F_1)_z$, $(F_2)_x$, $(F_2)_z$, $(F_3)_x$ a $(F_3)_y$ spojité na nějakém otevřeném kvádru K , pak je na K nutnou a postačující podmínkou pro existenci kmenové funkce výrazu pro elementární práci platnost tří vztahů

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}. \quad (9.25)$$

Výraz pro elementární práci je potom úplným diferenciálem kmenové funkce.

Že je platnost vztahů (9.25) podmínkou nutnou, je zřejmé z postupu, jakým jsme k nim došli. Že je podmínkou postačující uvidíme v příkladu 9.40, kde kmenovou funkci najdeme. Předpokládejme, že oblouk \mathcal{C} má parametrické vyjádření $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Hodnoty kmenové funkce podél něj jsou dány složenou funkcí $\phi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Úplný diferenciál této funkce jedné proměnné je

$$d\phi(t) = \dot{\phi}(t) dt =$$

$$= \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{(x(t), y(t), z(t))} \dot{x}(t) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{(x(t), y(t), z(t))} \dot{y}(t) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{(x(t), y(t), z(t))} \dot{z}(t) \right) dt.$$

Práce síly \vec{F} při přemístění částice po oblouku \mathcal{C} z počátečního bodu A o polohovém vektoru $\vec{r}_A = \vec{r}(t_A) = (x_A, y_A, z_A)$ do koncového bodu B o polohovém vektoru $\vec{r}_B = \vec{r}(t_B) = (x_B, y_B, z_B)$ je pak dána integrálem

$$\int_{t_A}^{t_B} \dot{\phi}(t) dt = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A) = f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A).$$

Je vidět, že tomto případě závisí práce pouze na počátečním a koncovém bodě oblouku a nikoli na jeho tvaru nebo konkrétním parametrickém vyjádření. Kdybychom je spojili úplně jinak, dostaneme stejnou práci. Vyplývá z toho i skutečnost, že práce, kterou vykoná síla \vec{F} při přemístění částice po uzavřené křivce, kdy počáteční bod splývá s koncovým, je nulová. Silové pole \vec{F} se pak nazývá *konzervativní* a kmenová funkce s opačným znaménkem, tj. $U(x, y, z) = -f(x, y, z)$, je *potenciální energie* částice v tomto silovém poli. Opačné znaménko je větší fyzikální konvence. Vraťme se k příkladu 9.30 a zaměňme v něm označení složek polohového vektoru $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ za jednodušší $\vec{r} = (x, y, z)$. Snadno se přesvědčíme, že záporně vzatá gravitační potenciální energie

$$f(x, y, z) = -U(x, y, z) = \frac{\kappa m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

je kmenovou funkcí výrazu pro elementární práci síly gravitačního pole

$$\vec{F}_g = -\frac{\kappa m M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z), \quad \delta A = -\frac{\kappa m M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x dx + y dy + z dz).$$

Příklad 9.40: Kmenová funkce snadno a rychle

V odstavci 7.2.4 o exaktní rovnici jsme hledali kmenovou funkci v konkrétním případě postupnou integrací. Pokud kmenová funkce existuje, můžeme tak samozřejmě postupovat pokaždé. Není však na škodu mít obecný vzorec pro nalezení kmenové funkce, který nyní odvodíme. Provedme to rovnou pro funkci tří proměnných. Na dvě proměnné snadno dokážeme vzorec zúžit, na více proměnných také není jeho rozšíření nesnadné.

Uvažujme o výrazu $\delta A = F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$ (který nemusí představovat jen elementární práci, může to být výraz s jakýmkoli jiným fyzikálním významem nebo dokonce bez fyzikálního významu). Předpokládejme, že jsme pro něj ověřili kritéria (9.25) existence kmenové funkce a víme již, že nebude zbytečné ji hledat. Najdeme ji ve třech postupných krocích. Zvolme pevný bod (a, b, c) . Pro neznámou funkci $f(x, y, z)$ platí

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = F_1(x, y, z) \implies f(x, y, z) - f(a, y, z) = \int_a^x F_1(x, y, z) dx.$$

Při integraci je třeba myslet na to, že s proměnnými, podle kterých neintegrujeme, zacházíme jako s konstantami. V případě předchozího integrálu jsou „konstantami“ proměnné y a z . Dále platí

$$\frac{\partial f(a, y, z)}{\partial y} = F_2(a, y, z) \implies f(a, y, z) - f(a, b, z) = \int_b^y F_2(a, y, z) dy,$$

a konečně

$$\frac{\partial f(a, b, z)}{\partial z} = F_3(a, b, z) \implies f(a, b, z) - f(a, b, c) = \int_c^z F_3(a, b, z) dz.$$

A máme hledaný obecný vzorec pro kmenovou funkci

$$f(x, y, z) = f(a, b, c) + \int_a^x F_1(x, y, z) dx + \int_b^y F_2(a, y, z) dy + \int_c^z F_3(a, b, z) dz. \quad (9.26)$$

K tomu, abychom kmenovou funkci určili jednoznačně, potřebujeme znát, resp. zadat její hodnotu alespoň v jednom bodě, například v bodě (a, b, c) . Rovnicemi $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ a $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$ je totiž určena až na integrační konstantu — jde o soustavu (parciálních) diferenciálních rovnic *prvního řádu*. Zkuste použít vztahu (9.26) pro nalezení kmenové funkce pro elementární práci gravitačního pole z příkladu 9.30, resp. 9.39.

V předchozím příkladu jsme konstruovali kmenovou funkci pro případ tří proměnných. Nyní formulujme tvrzení o existenci a jednoznačnosti kmenové funkce jednak pro názornější případ funkcí dvou proměnných, ale také pro zcela obecný příklad funkcí n proměnných. Nutnost „dodatečných“ předpokladů ve větě pak důkladně vysvětlíme v příkladech 9.41 až 9.44.

Věta 9.7 (Existence a jednoznačnost kmenové funkce): Předpokládejme, že funkce $p(x, y)$ a $q(x, y)$ jsou spojité i se svými parciálními derivacemi $p_y(x, y)$, $q_x(x, y)$ na jednoduše souvislé oblasti $D \subset \mathbf{R}^2$. Výraz $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ je úplným diferenciálem nějaké funkce $f = f(x, y)$ definované na D právě tehdy, když platí

$$p_y(x, y) = q_x(x, y) \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}.$$

Kmenová funkce f je určena jednoznačně, až na aditivní konstantu.

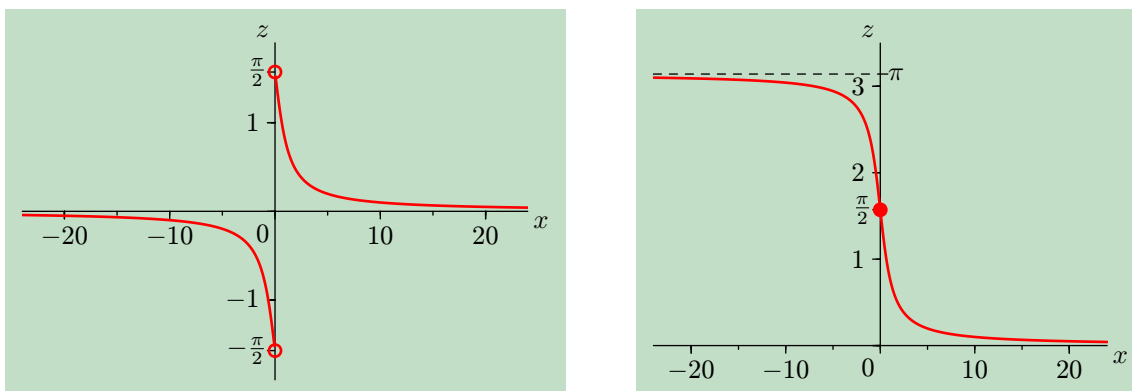
Předpokládejme, že funkce $F_1 = F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n = F_n(x_1, \dots, x_n)$ jsou spojité spolu s parciálními derivacemi prvního řádu $(F_i)_j(x_1, \dots, x_n)$ pro všechna $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, na jednoduše souvislé oblasti $D \subset \mathbf{R}^n$. Pak výraz $F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n$ je úplným diferenciálem nějaké funkce $f = f(x_1, \dots, x_n)$ definované na D právě tehdy, když platí

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad \text{pro všechna } i, j = 1, \dots, n.$$

Kmenová funkce f je určena jednoznačně, až na aditivní konstantu.

Příklad 9.41: Kmenová funkce — ano, či ne, kdy a proč?

Zabývejme se nyní formulací věty 9.7 pro případ dvou proměnných x a y . Věta 9.7 uvádí podmínku nutnou a postačující pro existenci kmenové funkce $f(x, y)$ k výrazu $p(x, y) dx + q(x, y) dy$, přičemž před vyslovením

Obr. 9.22 Grafy funkcí $z = f(x, y)$ obsahujících $\arctg \frac{1}{x}$.

vlastního tvrzení

$$\text{kmenová funkce } f(x, y) \text{ na množině } D \text{ existuje} \iff \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \text{ na } D$$

formuluje předpoklady kladené jednak na funkce $p(x, y)$ a $q(x, y)$, jednak na množinu, na níž uvedené funkce požadované předpoklady mají splňovat. Ve větě 9.7 jsou uvedeny tyto předpoklady:

- Množinou D je jednoduše souvislá oblast, tj. otevřená souvislá množina „bez děr“, typu „jitrnice“.
- Funkce $p(x, y)$ je spojitá na D a má tam spojitou parciální derivaci $p_y(x, y)$ podle proměnné y , funkce $q(x, y)$ je také spojitá na D a má tam spojitou parciální derivaci $q_x(x, y)$ podle proměnné x .

Potřebnost druhého předpokladu je zřejmá. Pokud kmenová funkce $f(x, y)$ na D skutečně existuje, což znamená, že výraz $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ je jejím úplným diferenciálem, platí ve všech bodech množiny D vztahy

$$p(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad q(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

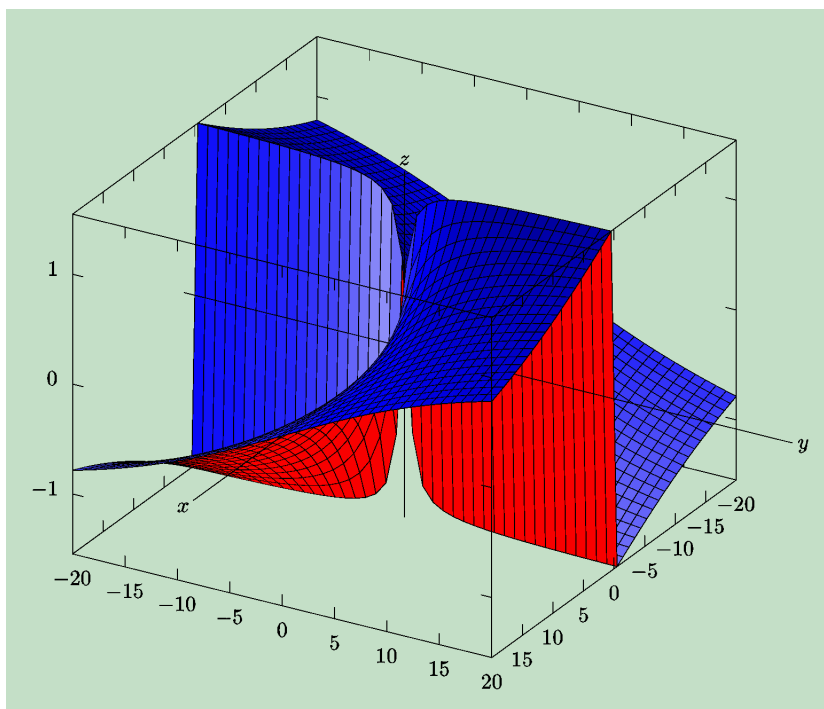
Předpoklad spojitosti parciálních derivací $p_y(x, y)$ $q_x(x, y)$ zajišťuje, jak víme ze Schwarzovy věty (věta 5.1 a její zobecnění ve větě 9.4), jejich záměnnost. Tomuto předpokladu se proto jistě nedíváme.

Vzniká však otázka, zda při formulaci věty 9.7 můžeme od požadavku jednoduše souvislé množiny upustit, neboli jak vypadají nejobecnější množiny, pro něž můžeme větu 9.7 vyslovit. Uvidíme, že pro větu 9.7 je právě tato vlastnost, jako jeden z výchozích předpokladů, podstatná.

Zaměříme se nyní na otázku, co by se mohlo stát, kdyby množina D byla sice oblast (otevřená a souvislá), byla by však *vícenásobně* souvislá, tedy „děravá“, typu „ementál“. Pokud je předpoklad jednoduše souvislosti definiční množiny důležitý, mělo by se nám podařit najít příklad takového výrazu $p(x, y) dx + q(x, y) dy$, který bude splňovat požadavek spojitosti a rovnosti parciálních derivací $p_y(x, y)$ a $q_x(x, y)$, avšak kmenovou funkci definovanou na celé množině D nenajdeme. Pro příklad nemusíme chodit daleko, stačí se vrátit ke vztahům (5.30) pro diferenciály kartézských souřadnic v rovině vyjádřené pomocí diferenciálů polárních souřadnic a vypočítat z nich $d\varphi$,

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi \implies$$

$$\implies d\varphi = -\frac{\sin \varphi}{\rho} dx + \frac{\cos \varphi}{\rho} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Obr. 9.23 Graf funkce $z = f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Tento výraz je definován na množině $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Nyní pozor — množina D je sice oblast, není však jednoduše, ale dvojnásobně souvislá. Její „děravost“ způsobuje jeden jediný bod, počátek soustavy souřadnic. V něm nejsou funkce $p(x, y)$ a $q(x, y)$ definovány. Na množině D mají funkce

$$p(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{a} \quad q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

spojité parciální derivace

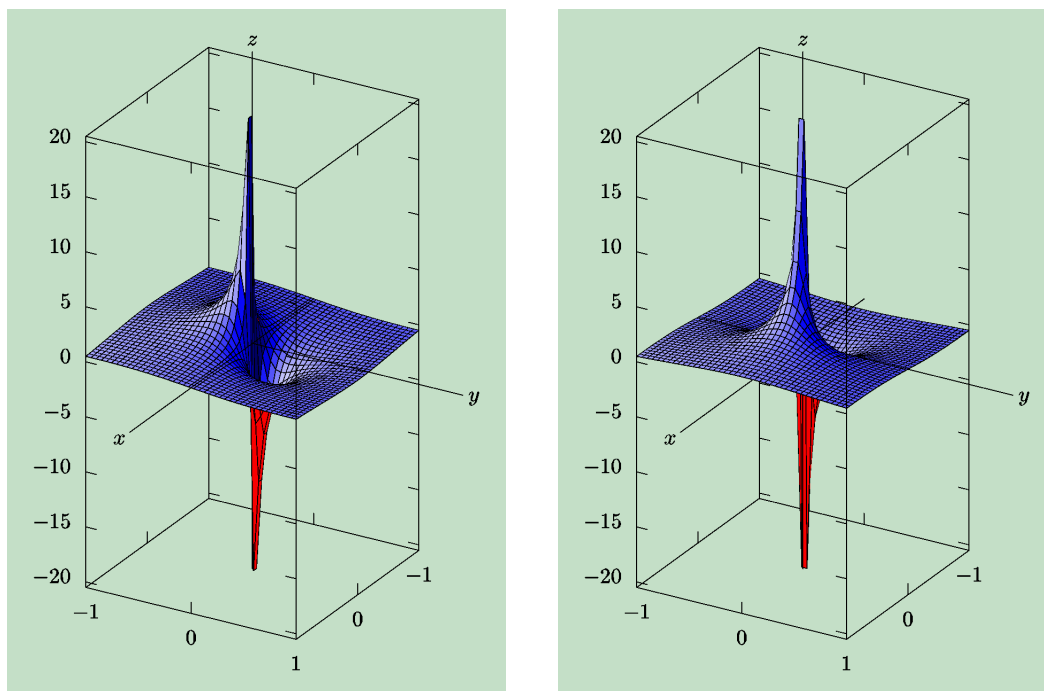
$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Že vám to něco připomíná? Jistě, příklad 5.11. Z tohoto příkladu si pamatujeme, že funkce $p(x, y)$ a $q(x, y)$ vznikly jako parciální derivace funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Tak v čem je problém? Množina D není jednoduše souvislá, a přesto jsme kmenovou funkci našli. Dokonce má dobrý geometrický význam, neboť představuje vyjádření polárního (azimutálního) úhlu bodu $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ v závislosti na jeho kartézských souřadnicích, $\varphi = \varphi(x, y)$. Tento úhel sice také není definován pro počátek soustavy souřadnic, ale pro ostatní body množiny D ano. Našli jsme tedy kmenovou funkci k zadanému výrazu $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ na celé oblasti D , i když není jednoduše souvislá? Samozřejmě, nenašli. Polární úhel sice na D definován je, nikoli však funkcí $\operatorname{arctg}(y/x)$, která je kmenovou funkcí našeho výrazu. Body, v nichž tato funkce není definována, vyplňují celou osu y , tj. definiční obor kmenové funkce je ve srovnání s definičním oborem výrazu $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ omezen, konkrétně $D_f = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbf{R}\}$.

Přesvědčili jsme se, že předpoklad jednoduché souvislosti oblasti D je důležitý. Pro pozorného čtenáře však nemusí být ještě všem problémům konec. Řekne si — dobře, omezím úvahy na nějaké okolí $\mathcal{O}(0, y) = (-a, a) \times (0, b)$ bodu $(0, y)$, $y \in (0, b)$. Toto okolí neobsahuje počátek soustavy souřadnic a je jednoduše



Obr. 9.24 Grafy funkcí $z = p(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ (vlevo) a $z = q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ (vpravo).

souvislou oblastí. Všechny předpoklady věty 9.7 jsou splněny a věta by měla platit. Funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ by měla být kmenovou funkcí našeho výrazu $p(x, y) dx + q(x, y) dx$ definovanou na celém okolí $\mathcal{O}(0, y)$. Jenže ouha — definičním oborem funkce není celé toto okolí. V bodech, jejichž x -ová souřadnice je nulová, není funkce $\operatorname{arctg}(y/x)$ definována a nelze ji ani rozumně dodefinovat, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

(pro $y = 1$ viz obrázek 9.22 vlevo). Věta 9.7 je tedy špatně? Jistěže není. Problém spočívá v tom, že funkčním předpisem $\operatorname{arctg}(y/x)$ nelze pokrýt celou množinu $\mathcal{O}(0, y)$. Protože se však kmenové funkce mohou lišit o konstantu, stačí volit

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{pro } x > 0, \quad f(x, y) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{pro } x < 0.$$

Pro $y = 1$ je graf této funkce na obrázku 9.22 vpravo. Ilustrační obrázek 9.23 ukazuje prostorové chování funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$. Na obrázku 9.24 jsou pro úplnost zakresleny parciální derivace funkce $f(x, y)$, tj. funkce $p(x, y)$ a $q(x, y)$.

Příklad 9.42: Neexistuje jiná kmenová funkce?

Malé „varování“: Tento příklad je trochu zdlouhavý a vyžaduje více trpělivosti a soustředění. Komu v této chvíli chybí, může se k příkladu vrátit později.

V příkladu 9.41 jsme zjistili, že funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ je sice kmenovou funkcí výrazu

$$-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy,$$

definovaného na dvojnásobně souvislé oblasti $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ale ne ve všech bodech této oblasti. Uvědomíme-li si, že pro některé hodnoty souřadnic x a y má funkce $f(x, y)$ geometrický význam polárního úhlu, mohli bychom se ptát, zda třeba nelze polární úhel vyjádřit jinou, vhodnější funkcí, jejímž definičním oborem by byla celá oblast D . (Je ovšem samozřejmé, že taková kmenová funkce by se na okolích bodů množiny D , na nichž by byla definována, mohla od funkce $f(x, y)$ lišit pouze o nějaké konstanty.) Co použít funkce vyjadřující polární úhel ve vztazích (5.6)

$$g_1(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{resp.} \quad g_2(x, y) = 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

pro $y \geq 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$, resp. $y < 0$? Dokonce bychom mohli vyzkoušet samotnou funkci $g_1(x, y)$, která je definována na celé množině D . Je to ta správná volba? Abychom to zjistili, musíme především spočítat její parciální derivace a porovnat je se zadanými funkcemi $p(x, y)$ a $q(x, y)$. Než začneme počítat, ověrmé si, že například na množině určené nerovnostmi $x > 0$, $y > 0$ je

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \implies \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Nyní zpět k výpočtu parciálních derivací.

$$\frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|y|} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{|y|}{x^2 + y^2}.$$

Při odmocňování musíme dávat pozor na absolutní hodnoty! Podobně vypočteme parciální derivaci funkce $g_1(x, y)$ podle proměnné y a dostaneme

$$\frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} = \frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)}.$$

Vidíme, že parciální derivace funkce $g_1(x, y)$ se od našich funkcí $p(x, y)$ a $q(x, y)$ liší znaménkem v otevřené dolní polorovině (pro $y < 0$). Funkci $g_1(x, y)$ proto musíme jako kandidáta na kmenovou funkci na D zavrhnout, i když je definována na celé oblasti D . Další pokus by mohl spočívat v prozkoumání funkce $g(x, y)$, která by byla definována jako $g_1(x, y)$ v horní polorovině $y \geq 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$, a jako $g_2(x, y)$ v otevřené dolní polorovině $y < 0$. Pro parciální derivace funkce $g(x, y)$ podle proměnných x a y platí

$$\text{pro } y > 0 \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = -\frac{|y|}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

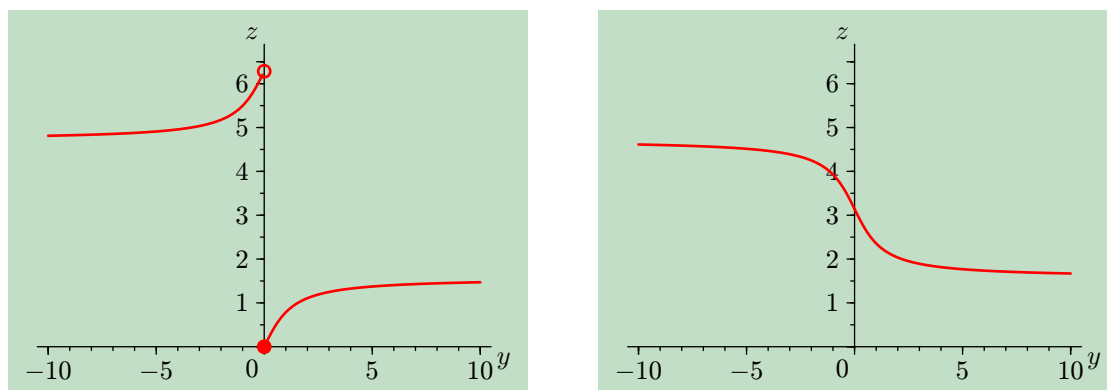
$$\text{pro } y < 0 \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = -\frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Funkce $g(x, y)$ vypadá nadějně. Její parciální derivace podle x je rovna funkci $p(x, y)$, parciální derivace podle y zase funkci $q(x, y)$, jak to má být. Uvědomili jste si ale, že v předchozích vztazích pro parciální derivace chybí případy, kdy $y = 0$? Proč? Vždyť přece funkce $g(x, y)$ je definována v rovině \mathbf{R}^2 pouze s výjimkou bodu $(0, 0)$. Pro body $(x, 0)$, $x \neq 0$ je dána předpisem pro funkci $g_1(x, y)$, tj.

$$g(x, 0) = g_1(x, 0) = \arccos \frac{x}{|x|}, \quad g(x > 0, 0) = \arccos 1 = 0, \quad g(x < 0, 0) = \arccos(-1) = \pi.$$

810 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Problém tkví v parciální derivaci podle proměnné y na kladné části osy x . Všimněme si nejprve chování samotné funkce $g(x, y)$ v blízkosti osy x , samozřejmě pro $x \neq 0$. Situaci znázorňuje obrázek 9.25 pro hodnoty $x = 1$ (vlevo) a $x = -1$ (vpravo). V obrázku vlevo je tedy levá větev grafem funkce $z = g(1, y < 0) = 2\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, pravá větev je grafem funkce $z = g(1, y \geq 0) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. V obrázku vpravo je levá část grafem funkce $z = g(-1, y < 0) = 2\pi - \arccos \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}$, pravá část pak grafem funkce $z = g(-1, y \geq 0) = \arccos \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}$. Podle



Obr. 9.25 K příkladu 9.42.

obrázku to vypadá tak, že v bodech $(x, 0)$ je funkce nespojitá na kladné poloose x , tj. pro $x > 0$ a spojitá na poloose záporné, pro $x < 0$. Grafy jsou sice názorné, ale nemůžeme jim tak zcela věřit. Musíme spočítat limity funkce $g(x, y)$ v bodech $(x, 0)$. Pro $x > 0$ platí

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} g(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} g_1(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{|x|} = \arccos 1 = 0,$$

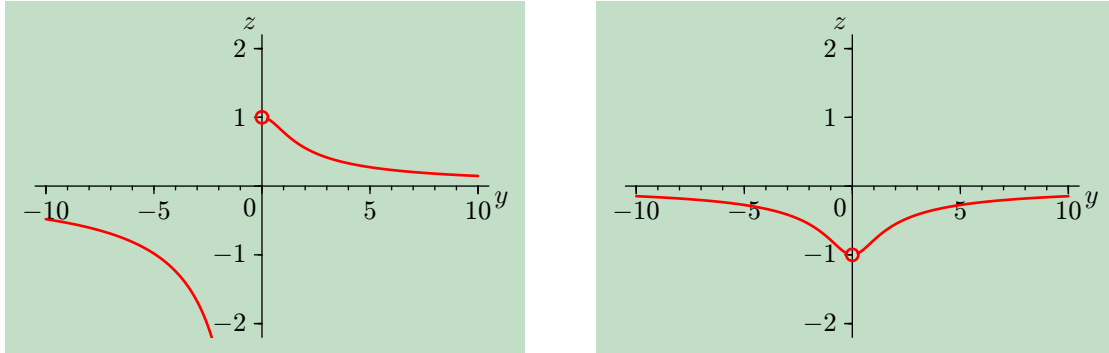
$$\lim_{y \rightarrow 0^-} g(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} g_2(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 2\pi - \arccos \frac{x}{|x|} = 2\pi - \arccos 1 = 2\pi,$$

zatímco pro $x < 0$ je

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} g(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} g_1(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{|x|} = \arccos(-1) = \pi,$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} g(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0^-} g_2(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \\ &= 2\pi - \arccos \frac{x}{|x|} = 2\pi - \arccos(-1) = \pi. \end{aligned}$$

Pro body na kladné části osy x limita funkce $g(x, y)$ neexistuje, zatímco pro body na záporné části osy x je rovna funkční hodnotě $g(x, 0) = g_1(x, 0) = \pi$. Výpočtem jsme tak potvrdili to, co jsme vyčetli z grafu. Hotovi ale ještě nejsme. Jak víme, není u funkcí více proměnných souvislost jejich spojitosti a existence parciálních derivací tak jednoduchá, jako u funkcí jedné proměnné. Obrázek 9.26 ukazuje chování funkce $\frac{g(x, y) - g(x, 0)}{y - 0}$ pro pevně zvolené reprezentativní hodnoty $x = 1$ (vlevo) a $x = -1$ (vpravo). Lze očekávat, že v bodech kladné části osy x parciální derivace $g_y(x, y)|_{(x, 0)}$ neexistuje, na záporné části osy x ano. Přesvědčíme se o tom korektním



Obr. 9.26 Graf funkce $z = \frac{g(x,y) - g(x,0)}{y-0}$ pro $x = 1$ (vlevo) a $x = -1$ (vpravo).

postupem. Pro případ $x > 0$ není třeba žádného počítání. Parciální derivace funkce $g(x, y)$ v bodě (x, y) je určena (obyčejnou) derivací $\gamma'(y)|_{y=0}$ funkce $\gamma(y) = g(x = \text{konst.}, y)$, která je funkcí jedné proměnné y . Funkce $\gamma(y)$ je však v bodě $y = 0$ nespojitá, jak jsme před chvílí zjistili. Její limita pro $y \rightarrow 0^+$ je nulová, limita pro $y \rightarrow 0^-$ je rovna 2π . Funkce $\gamma(y)$ nemá v bodě $y = 0$ derivaci, funkce $g(x, y)$ nemá v žádném z bodů $(x < 0, 0)$ parciální derivaci podle proměnné y .

V bodech $(x, 0)$, $x < 0$, však funkce $\gamma(y)$ spojitá je, proto musíme existenci a hodnotu derivace prověřit. Platí

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(x, y) - g(x, 0)}{y - 0} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g_1(x, y) - g_1(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \left(\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \arccos \frac{x}{|x|} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \left(\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \arccos(-1) \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \left(\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \pi \right). \end{aligned}$$

Existenci limity tohoto výrazu, který je typu $\frac{0}{0}$, prověříme pomocí l'Hospitalova pravidla (čárka značí derivaci podle y při pevném x):

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\left(\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \pi \right)'}{(y)'} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)} = \frac{1}{x}.$$

(Pro hodnotu $x = -1$, odpovídající na obrázku 9.26 grafu vpravo, je tato limita rovna -1 .) Dále platí (pozor, v čitateli druhého zlomku není překlep — víte, proč tam skutečně patří rozdíl $g_2(x, y) - g_1(x, 0)$?)

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{g(x, y) - g(x, 0)}{y - 0} &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{g_2(x, y) - g_1(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} \left(2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \arccos \frac{x}{|x|} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} \left(2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \arccos(-1) \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} \left(2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \pi \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} \left(\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

812 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Opět pomocí l'Hospitalova pravidla (ověřte, že výraz je zase typu $\frac{0}{0}$) dostaneme

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\left(\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'}{(y)'} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-xy}{|y|(x^2+y^2)} = \frac{1}{x}.$$

(Pro hodnotu $x = -1$, tak opět dostáváme limitu rovnou -1 , jak také vidíme v grafu na obrázku 9.26 vpravo.)

Parciální derivace funkce $g(x, y)$ v bodech záporné části osy x tedy existuje a dokonce je rovna funkční hodnotě funkce $q(x, 0) = \frac{1}{x}$.

Dospěli jsme k následujícímu závěru: Parciální derivace funkce $g(x, y)$ podle proměnné y v bodech na kladné části osy x neexistuje. „Přechod“ přes kladnou poloosu x je zakázán. Funkci $g(x, y)$ můžeme jako kmenovou funkci použít, vyjmeme-li z roviny \mathbf{R}^2 i „překážející“ kladnou poloosu x . Funkce $g(x, y)$ je kmenovou funkcí zadaného výrazu $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ na „zmenšené“ oblasti

$$D' = D \setminus \{(x, 0) \mid x > 0\} = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}.$$

Ta je však již jednoduše souvislá.

Vidíme, že předpoklad jednoduše souvislé oblasti D je vskutku funkční. Pokud oblast nebude jednoduše souvislá, pak i přes to, že všechny ostatní předpoklady kladené na funkce $p(x, y)$ a $q(x, y)$ ve větě 9.7 budou splněny, nemusí kmenová funkce k výrazu $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ existovat na celé oblasti D .

Příklad 9.43: Kmenová funkce může existovat, i když je oblast děravá

Předchozí závěr ovšem *neznamená*, že kmenová funkce pro případ děravé oblasti D *nesmí existovat* na celé množině D . Příkladem je výraz

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy,$$

definovaný opět na dvojnásobně souvislé oblasti $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Definičním oborem jeho kmenové funkce

$$f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

je celá oblast D .

Příklad 9.44: Co když množina D nebude souvislá?

Předpokládejme, že množina D je sice otevřená, ale není souvislá. Pak se ovšem skládá z jednotlivých disjunktních komponent, řekněme D_1 až D_N , které jsou rovněž otevřenými množinami. Každá z komponent je oblast. Pokud je daná komponenta D_j , $1 \leq j \leq N$, jednoduše souvislá, lze na ni aplikovat větu 9.7. Jsou-li splněny i předpoklady týkající se funkcí $p(x, y)$ a $q(x, y)$, bude na komponentě existovat k výrazu $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ kmenová funkce $f_j(x, y)$. Kmenové funkce $f_i(x, y)$ a $f_j(x, y)$, $1 \leq i, j \leq N$, se mohou lišit pouze o konstantu.

Příklady 9.41 až 9.44 vyvolávají možná dojem, že předpoklady kolem kmenové funkce příliš „pítváme“. V odstavci o křivkovém integrálu však ukážeme, že tato důkladnost nebyla zbytečná. „Děravost“ oblastí, v nichž leží uzavřené křivky sloužící často jako integrační obory takového integrálu, může velice ovlivnit výsledky.

Příklad 9.45: Neúplný diferenciál

Obecně výraz $\delta A = F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$ nespĺňuje kritéria úplného diferenciálu (9.25). Stále však jde o lineární kombinaci diferenciálů souřadnicových funkcí. Hovoříme o *neúplném diferenciálu*. Příkladem neúplného diferenciálu je třeba elementární práce plynu $\delta A = P(V, T) dV$ nebo výraz pro elementární teplo přijaté plynem od okolí $\delta Q = C_V dT + P(V, T) dV$ z příkladu 7.25. K problému „neúplnosti“ diferenciálu můžeme přistoupit dvojím způsobem. Výraz pro práci plynu můžeme chápat tak, že v něm „chybí“ nějaký člen $N(V, T) dT$. Hledejme funkci $N(V, T)$ tak, aby výraz

$$df = P(V, T) dV + N(V, T) dT$$

byl úplným diferenciálem jisté kmenové funkce $f(V, T)$. Požadujeme platnost vztahu

$$\frac{\partial P(V, T)}{\partial T} = \frac{\partial N(V, T)}{\partial V},$$

z něhož pro případ ideálního plynu, pro který platí stavová rovnice $P(V, T)V = nRT$, dostaneme

$$\frac{\partial N(V, T)}{\partial V} = \frac{nR}{V} \implies N(V, T) = nR \ln V + \varphi(T).$$

Funkce teploty $\varphi(T)$ hraje při integraci podle proměnné V roli integrační konstanty a je libovolná. Pro výpočet kmenové funkce doplněného výrazu použijeme vzorec (9.26) z příkladu 9.40,

$$\begin{aligned} f(V, T) - f(V_0, T_0) &= \int_{V_0}^V P(V, T) dV + \int_{T_0}^T N(V_0, T) dT = \int_{V_0}^V \frac{nRT}{V} dV + \int_{T_0}^T (nR \ln V_0 + \varphi(T)) dT = \\ &= nRT (\ln V - \ln V_0) + nR(T - T_0) \ln V_0 + \int_{T_0}^T \varphi(T) dT = \\ &= nR(T \ln V - T_0 \ln V_0) + \Phi(T). \end{aligned}$$

Funkce $\Phi(T)$ je integrálem z libovolné funkce $\varphi(T)$ na intervalu $[T_0, T]$, je tedy rovněž libovolná. Přidružíme-li k ní konstantu $f(V_0, T_0) - nRT_0 \ln V_0$, dostaneme kmenovou funkci v přehlednějším tvaru

$$f(V, T) = nRT \ln V + \bar{\Phi}(T),$$

kde $\bar{\Phi}(T)$ je opět libovolná funkce teploty.

Jiný způsob „zúplnění“ neúplného diferenciálu využívá *integračního faktoru*, jehož podstatu jsme si ukázali již v příkladech 7.25 a 7.26. Například pro neúplný diferenciál $F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$ pro případ funkcí dvou proměnných jde obecně o nalezení takové funkce $\phi(x, y)$, že výraz

$$\phi(x, y) F_1(x, y) dx + \phi(x, y) F_2(x, y) dy$$

již úplným diferenciálem je. Nutnou a postačující podmínkou pro existenci takové funkce $\phi(x, y)$ je rovnost (9.25) modifikovaná pro dvě proměnné, nebo též rovnost (7.27), tj.

$$\frac{\partial(\phi(x, y) F_1(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\phi(x, y) F_2(x, y))}{\partial x}.$$

814 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Aplikujme ji na neúplný diferenciál $\delta A = P(V, T) dV$, vyjadřující elementární práci plynu. V tomto případě je $F_1 = P(V, T)$ a $F_2 = 0$. Předchozí podmínka pak vede k rovnici pro $\phi(V, T)$

$$\frac{\partial}{\partial T} (\phi(V, T)P(V, T)) = 0,$$

jejíž integrací dostaneme

$$\phi(V, T)P(V, T) = \Psi(V) \implies \phi(V, T) = \frac{\Psi(V)}{P(V, T)}.$$

$\Psi(V)$ je libovolná funkce plnící úlohu integrační konstanty při integraci podle proměnné T . Výraz, který získáme vynásobením elementární práce δA integračním faktorem $\phi(V, T)$, $\phi(V, T)\delta A = \Psi(V) dV$, je již úplným diferenciálem, konkrétně diferenciálem kterékoli z primitivních funkcí k $\Psi(V)$. Požadavek doplnění výrazu pro práci plynu na úplný diferenciál pomocí integračního faktoru jsme sice splnili, výsledek však nemá pro svou libovolnost žádný fyzikální význam. Jiná je situace v případě výrazu pro teplo přijaté ideálním plynem od okolí,

$$\delta Q = P(V, T) dV + C_V dT = \frac{nRT}{V} dV + C_V dT, \quad C_V = \text{konst.},$$

jímž jsme se do detailu zabývali v příkladu 7.25. Ze všech možných funkcí, které mají vlastnosti integračního faktoru, je důležitá funkce $\phi(T) = T^{-1}$, výraz

$$dS = \frac{P(V, T)}{T} dV + \frac{C_V}{T} dT = \frac{nR}{V} dV + \frac{C_V}{T} dT$$

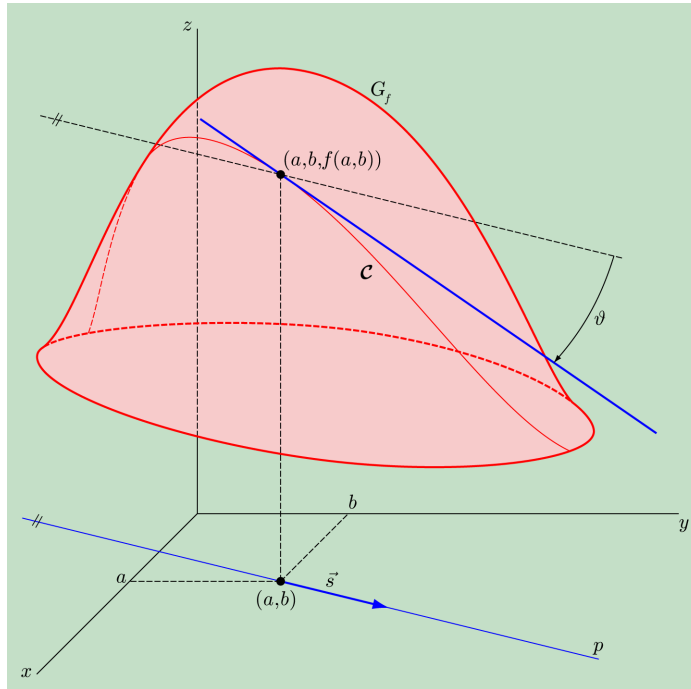
je úplným diferenciálem stavové veličiny zvané *entropie*. Upravíme-li jej ještě po dosazení $nR = C_P - C_V$ a $\kappa = C_P/C_V$, dostaneme

$$dS = d[(C_P - C_V) \ln V + C_V \ln T] = C_V d \ln (TV^{\kappa-1}).$$

Připomeňme fyzikální význam konstant. C_P , resp. C_V je tepelná kapacita plynu při stálém tlaku, resp. objemu, jejich poměr κ je Poissonova konstanta.

9.2.4 Směrová derivace a gradient, vrstevnice a spádnice

Slova, která se objevují v názvu tohoto odstavce, většinou známe, ovšem pravděpodobně z jiných oblastí než z matematiky. „Gradient“ bývá teplotní či tlakový a v praxi určuje, jak rychle se mění teplota nebo tlak podél určitého směru. „Vrstevnice“ a „spádnice“ jsou zase pojmy obvykle zeměpisné. Jak souvisí s matematikou, konkrétně s derivacemi? Je to docela jednoduché. Ukažme si význam těchto pojmů na případu funkce dvou a tří proměnných, $f(x, y)$ a $f(x, y, z)$. Vyjdeme z významu parciálních derivací třeba funkce dvou proměnných. Jejich hodnoty v daném bodě (a, b) , tj. $f_x(a, b)$ a $f_y(a, b)$, udávaly rychlost změny funkční hodnoty, nebo též strmost grafu funkce v daném bodě, pokud jsme se k němu blížili podél přímky rovnoběžné s osou x , resp. y , tedy ve směru vektorů $\vec{e}_1 = (1, 0)$, resp. $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Co když se ale budeme k bodu (a, b) blížit po obecné přímce p s jednotkovým směrovým vektorem $\vec{s} = (s_x, s_y)$, $\sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 1$, jako na obrázku 9.27? Přímka p má parametrické rovnice $x = a +$



Obr. 9.27 Derivace funkce v daném směru.

$+ ts_x$, $y = b + ts_y$, parametr t probíhá reálnou osu. Rovina proložená touto přímkou kolmo k souřadnicové rovině xy protne graf funkce $f(x, y)$ v rovinné křivce \mathcal{C} , jejíž parametrické rovnice jsou

$$x = a + ts_x, \quad y = b + ts_y, \quad z = f(a + ts_x, b + ts_y).$$

Úhel, který svírá tečna k této křivce s přímkou p , označme ϑ a dejme si za úkol jej určit. Představme si oblouk křivky \mathcal{C} v okolí bodu $(a, b, f(a, b))$ jako graf nějaké funkce F proměnné t . Osou t je přímka p , funkce $F(t)$ je dána předpisem $F(t) = f(a + ts_x, b + ts_y)$. Je to složená funkce s vnější složkou $f(x, y)$ a vnitřními složkami $x(t) = a + ts_x$ a $y(t) = b + ts_y$. Směrnice tečny vedené ke křivce \mathcal{C} bodem grafu $(a, b, f(a, b))$ je tangentou úhlu ϑ a zároveň derivací funkce $F(t)$ v bodě $t = 0$. Označme ji

$$\partial_{\vec{s}} f(x, y)|_{(a,b)} = \operatorname{tg} \vartheta = \dot{F}(0) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a,b)} s_x + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a,b)} s_y. \quad (9.27)$$

Nazýváme ji *derivace funkce $f(x, y)$ ve směru \vec{s} v bodě (a, b)* , neboli *směrová derivace*. Definici směrové derivace lze samozřejmě zobecnit na případ funkce více proměnných. Nejčastěji se s praktickým použitím tohoto pojmu setkáme u funkcí tří proměnných.

Směrová derivace funkce $f(x, y)$, resp. $f(x, y, z)$ v obecném bodě (x, y) , resp. (x, y, z) ve směru jednotkového vektoru \vec{s} je

$$\begin{aligned}\partial_{\vec{s}}f(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}s_x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}s_y, \quad \text{resp.} \\ \partial_{\vec{s}}f(x, y, z) &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}s_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}s_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}s_z.\end{aligned}\quad (9.28)$$

Všimněme si možnosti důležité interpretace směrové derivace. Budeme-li parciální derivace funkce považovat za složky jistého vektoru \vec{G} , můžeme zapsat směrovou derivaci ve tvaru skalárního součinu vektorů \vec{G} a \vec{s} ,

$$\partial_{\vec{s}}f(x, y) = \vec{G}\vec{s}, \quad \vec{G} = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right).\quad (9.29)$$

Vektor

$$\begin{aligned}\vec{G} = \text{grad } f(x, y) &= \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right), \quad \text{resp.} \\ \vec{G} = \text{grad } f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

se nazývá *gradient* funkce $f(x, y)$, resp. $f(x, y, z)$ v obecném bodě (x, y) , resp. (x, y, z) . Zobrazení, které přiřazuje funkcím jejich gradient, se nazývá *operátor gradientu*.

Zobecnění pojmu směrové derivace a gradientu pro funkce n proměnných je jednoduché. Uvažujme o funkci $z = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ definované na otevřené množině D a zvolme vektor $s = (s_1, \dots, s_n) \in T_x\mathbf{R}^n$, pro který je $|s| = \sqrt{s_1^2 + \dots + s_n^2} = 1$ (je to jednotkový vektor). *Směrová derivace* funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě x ve směru jednotkového vektoru s má tvar

$$\partial_s f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}s_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}s_n, \quad x = (x_1, \dots, x_n).\quad (9.30)$$

Vektor

$$G = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right), \quad x = (x_1, \dots, x_n),\quad (9.31)$$

se nazývá *gradient* funkce $f(x)$ v bodě x .

Vraťme se k funkcím dvou proměnných, pro něž jsou studované pojmy velmi přístupné naší představivosti. Samozřejmě — dosazením můžeme vyčíslit složky gradientu dané funkce

v libovolném bodě (a, b) . Gradient je vektor závislý pouze na funkčním předpisu $f(x, y)$ a na bodu, ve kterém jej vyčíslujeme.

Gradient má hned dvojí názornou a zajímavou geometrickou interpretaci. Dospějeme k ní, vyjádříme-li skalární součin $\vec{G}\vec{s}$ pomocí definice. Platí

$$\partial_{\vec{s}}f(x, y) = \vec{G}\vec{s} = |\vec{G}||\vec{s}| \cos \alpha = |\vec{G}| \cos \alpha,$$

kde jsme jako α označili úhel mezi vektorem \vec{G} a jednotkovým vektorem \vec{s} . Z tohoto zápisu ihned vidíme, že absolutní hodnota směrové derivace nabývá maxima pro $\cos \alpha = \pm 1$, tj. derivujeme-li funkci $f(x, y)$ ve směru gradientu. Pro $\cos \alpha = 0$ je směrová derivace nulová. Odpovídá to případu, kdy derivujeme ve směru vektoru kolmého ke gradientu.

Nyní si představme řez grafu funkce $f(x, y)$ rovinou $z = C$, kde C je vhodná konstanta. Označme \mathcal{V}_C množinu všech bodů v definičním oboru D funkce $f(x, y)$, pro které je funkční hodnota rovna právě této konstantě, tj. $\mathcal{V}_C = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = C\}$. Bude-li konstanta C prvkem oboru hodnot funkce $f(x, y)$ (aby množina \mathcal{V}_C nebyla prázdná), a pokud funkce $f(x, y)$ nebude mít příliš „divoké“ vlastnosti, bude \mathcal{V}_C například nějaká křivka. Mohly by to být třeba i izolované body. V další úvaze však předpokládejme, že jde o křivku. Vydáme-li se s bodem (x, y) po této křivce, nebude se funkční hodnota měnit. Znamená to, že derivace funkce $f(x, y)$ ve směru vektoru tečného ke křivce konstantní funkční hodnoty je nulová. Před chvílí jsme však zjistili, že vektor, v jehož směru je derivace funkce nulová, je kolmý ke gradientu v daném bodě. Gradient je tedy v každém bodě normálovým vektorem ke křivce konstantní funkční hodnoty, která tímto bodem prochází.

Příklad 9.46: Gradient a mapy

Co může mít typicky matematický pojem jako je gradient společného s kartografií? Z předchozích úvah odpověď jistě tušíme. Například na běžné turistické mapě jsou znázorněny vrstevnice. Jdeme-li „po vrstevnici“, nestoupáme ani neklesáme. Matematicky to lze vyjádřit velmi snadno. Poloha každého bodu na povrchu Země je určena jeho zeměpisnou délkou, zeměpisnou šířkou a nadmořskou výškou. Budeme-li se pohybovat v malém rozsahu zeměpisných šířek a délek, například v rozsahu již zmíněné turistické mapy, můžeme je zhruba považovat za kartézské souřadnice x a y . Vyjádříme-li nadmořskou výšku jako funkci zeměpisné délky a šířky, bude vrstevnice \mathcal{V}_C křivkou v rovině xy , podél níž je hodnota této funkce konstantní, tj. půdorysným průmětem skutečné křivky, po níž bychom kráčeli v nadmořské výšce $z = C$. Modelujme takový kopec třeba funkcí

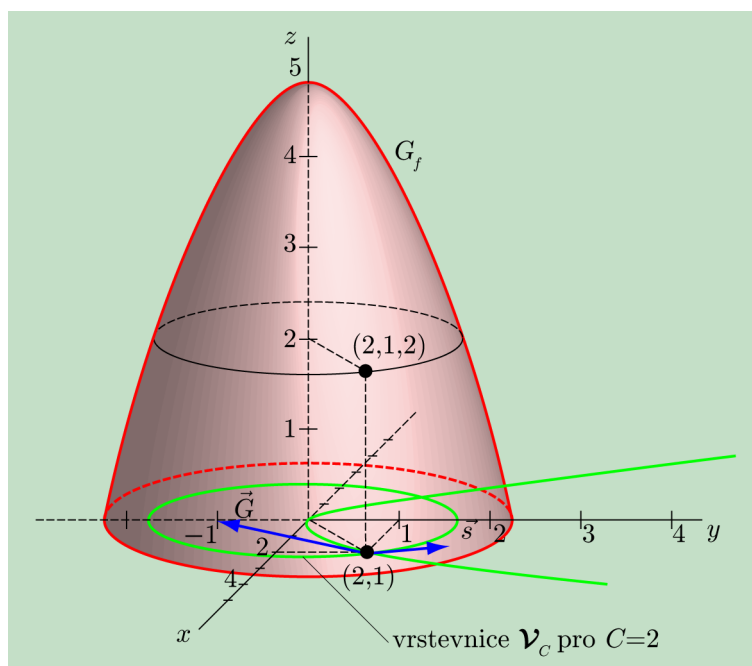
$$f(x, y) = v - \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2\right), \quad 0 \leq f(x, y) \leq v.$$

Zvolme konstantu C , $0 \leq C \leq v$. Z podmínky $f(x, y) = C$ dostaneme rovnici příslušné vrstevnice

$$C = v - \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2\right) \implies \frac{x^2}{2(v-C)} + \frac{y^2}{v-C} = 1.$$

Křivkou je elipsa se středem v počátku soustavy souřadnic a poloosami $\sqrt{2(v-C)}$ (na ose x) a $\sqrt{v-C}$ (na ose y). Situaci ukazuje obrázek 9.28 pro $v = 5$ a $C = 2$. Gradient funkce $f(x, y)$ je vektor $\vec{G} = \text{grad } f(x, y) = (-x, -2y)$. Tečný vektor k vrstevnici dostaneme nejsnáze tak, když ji vyjádříme parametricky a derivujeme podle parametru.

$$x(t) = \sqrt{2(v-C)} \cos t, \quad y(t) = \sqrt{v-C} \sin t,$$



Obr. 9.28 Vrstevnice a spádnicí.

$$\vec{u}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \left(-\sqrt{2(v-C)} \sin t, \sqrt{v-C} \cos t \right) \implies \vec{u} = \left(-\sqrt{2}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x \right).$$

Vektor \vec{u} sice není jednotkový, kolmý ke gradientu však je, neboť platí $\vec{u}\vec{G} = (-\sqrt{2}y)(-x) + (\frac{1}{\sqrt{2}}x)(-2y) = 0$.

Spádnici nazveme křivku v rovině xy , která je v každém bodě kolmá k vrstevnici procházející tímto bodem. Jejím tečným vektorem je gradient — vektor normály k vrstevnici. Hledáme-li parametrické rovnice spádnice ve tvaru $x = x(t)$, $y = y(t)$, pak vycházíme právě z tohoto požadavku, tj. $(\dot{x}, \dot{y}) = \text{grad } f(x, y)$. V našem konkrétním případě je situace velmi jednoduchá. Dostaneme soustavu dvou diferenciálních rovnic, která se dokonce rozpadne na dvě samostatné rovnice pro neznámé funkce $x(t)$, $y(t)$. Ty snadno zintegrujeme:

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -2y \implies x(t) = A e^{-t}, \quad y(t) = B e^{-2t},$$

A a B jsou integrační konstanty. Z parametrických rovnic spádnice snadno vyloučíme parametr umocněním $x(t)$ na druhou a vydělením.

$$\frac{y}{x^2} = \frac{B}{A^2} \implies y = Kx^2, \quad K = \frac{B}{A^2}.$$

Spádnice jsou tedy paraboly. Konstantu K určíme, známe-li alespoň jeden bod spádnice, například (a, b) . Pak $K = b/a^2$. Pro konkrétnost zvolme bod $(a, b) = (2, 1)$, který leží na vrstevnici \mathcal{V}_C pro $C = 2$. Její poloosy jsou $\sqrt{6}$ a $\sqrt{3}$. Gradient funkce v daném bodě je $\vec{G}(2, 1) = (-2, -2)$, tečným vektorem k vrstevnici \mathcal{V}_C je $\vec{u}(2, 1) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, jednotkový tečný vektor $\vec{s} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Doplníme ještě rovnici vrstevnice a spádnice procházející bodem $(2, 1)$:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \quad y = \frac{1}{4}x^2.$$

Vše je zaznamenáno také v obrázku 9.28. A ještě jedna otázka. V mapě jsou obvykle zakresleny vrstevnice s konstantním krokem nadmořské výšky. Někde jsou vrstevnice hustší, jinde řidší. Dokážete najít souvislost mezi

gradientem a hustotou vrstevnic?

Položme si ještě otázku, zda je nějaká souvislost gradientu a diferenciálu. Na první pohled se může zdát, že žádná není. Druhý, pozornější pohled však naznačuje, že se přece jen o nějakou souvislost může jednat. Vždyť gradient i úplný diferenciál funkce v daném bodě jsou jednoznačně určeny parciálními derivacemi dané funkce. Dejme tomu, že

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

je konzervativní silové pole. Výraz pro elementární práci tohoto silového pole $\delta A = F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$ je samozřejmě úplným diferenciálem — tak jsme totiž konzervativnost definovali (viz příklad 9.39). Proto k němu existuje kmenová funkce $f(x, y, z)$, resp. potenciální energie $U(x, y, z) = -f(x, y, z)$, pro kterou platí

$$-dU = \delta A \implies -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Platí proto

$$(F_1, F_2, F_3) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right), \quad \text{tj.} \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r}). \quad (9.32)$$

Konzervativní silové pole je záporně vzatým gradientem odpovídající potenciální energie.

Přidáme-li ještě podmínky pro složky konzervativního silového pole dané vztahy (9.25), zjišťujeme další důležitý fakt.

Silové pole $\vec{F}(\vec{r})$ definované spolu se spojitými parciálními derivacemi svých složek na jednoduše souvislé oblasti D je konzervativní právě tehdy, je-li vektor

$$\vec{C} = \text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) \quad (9.33)$$

nulový na D . Vektorové pole \vec{C} takto utvořené ze složek vektorového pole \vec{F} se nazývá jeho *rotace*, tj. $\vec{C}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{F}(\vec{r})$.

Ale to už zase trochu předbíháme. Rotaci a dalším operacím s vektorovými poli se budeme věnovat až v následujících odstavcích. V dalších praktických výpočtech a úvahách budeme vždy uvažovat o vektorových polích, jejichž složky mají spojitě parciální derivace. Tento předpoklad již nebudeme v tvrzeních explicitně zmiňovat.

Ještě si uvědomme další význam vztahu pro konzervativní pole. Protože je síla, která na částici v daném bodě pole působí, záporně vzatým gradientem potenciální energie, je kolmá na pomyslné „vrstevnice“ potenciální energie, tedy plochy v prostoru \mathbf{R}^3 , jimž odpovídá vždy určitá, ale ve všech bodech takové plochy stejná hodnota potenciální energie. Tyto „vrstevnice“ potenciální energie se nazývají *ekvipotenciální* nebo též *ekvipotenciální* plochy.

Ekvipotenciální plochou o energii E konzervativního silového pole $\vec{F}(\vec{r})$ rozumíme množinu

$$\mathcal{E}_E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid U(x, y, z) = E = \text{konst.}\}. \quad (9.34)$$

Příklad 9.47: Ekvipotenciální plochy gravitačního pole

V případě gravitačního pole mají ekvipotenciální plochy rovnice

$$-\frac{\kappa m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = E \implies x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{\kappa m M}{E}\right)^2.$$

Ekvipotenciální plochou o energii E je kulová plocha se středem v počátku soustavy souřadnic, v němž je současně umístěno centrum gravitačního působení o hmotnosti M , a poloměrem $\frac{\kappa m M}{|E|}$. Je třeba si uvědomit, že energie E musí být záporná. Proč tomu tak je?

Z každého bodu ekvipotenciální plochy „trčí“ vektor gravitační síly, který má radiální směr, je ve všech bodech plochy stejně velký a směřuje do jejího středu. Není to žádné překvapení — gravitační síla je gradientem funkce $-U(x, y, z)$.

Příklad 9.48: Rozložení tlaku v kapalině

Znalost pojmu gradientu se hodí i v dalších fyzikálních úlohách. Jednu typickou si ukážeme. Budeme k tomu potřebovat trochu fyziky. Uvažujme o ideální kapalině ve statické rovnováze. Ideální kapalina je charakterizována nestlačitelností (má konstantní hustotu s) a absencí vnitřního tření (při jejím pohybu nedochází ke ztrátám energie třením). Statickou rovnováhou rozumíme situaci, kdy je vzhledem k dané vztažné soustavě, ať již inerciální, či neinerciální, každý sebemenší element kapaliny v klidu. Výslednice sil působících na takový element je proto nulová. Jaké síly však na elementy kapaliny působí? Jsou dvojího typu (viz též obrázek 9.29):

- Síly, jimiž působí okolí celého kapalinového tělesa na *všechny* objemové elementy. Jsou to takzvané *objemové síly*, které můžeme popsat jejich hustotou $\vec{f}(\vec{r})$, tj. silou vztaženou na jednotku objemu. Udává se tedy v jednotkách N m^{-3} . Je-li například element kapaliny o objemu ΔV , a tedy hmotnosti $\Delta m = s\Delta V$, umístěn v bodě \vec{r} , působí na něj objekty náležející k okolí celého kapalinového tělesa objemovou silou $\Delta \vec{F}_{obj}(\vec{r})$. Hustota této objemové síly je pak definována limitním přechodem

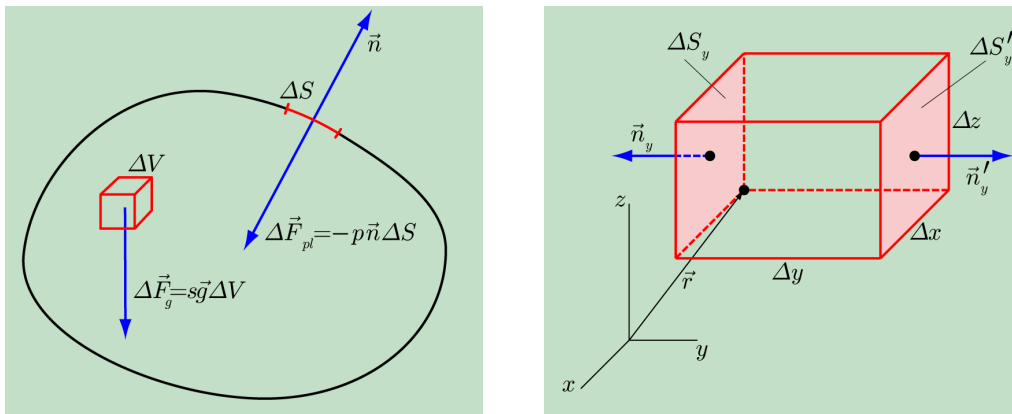
$$\vec{f}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_{obj}(\vec{r})}{\Delta V}.$$

Typickým příkladem objemové síly je síla tíhová, vyjadřující působení homogenního gravitačního pole, $\Delta \vec{F}_g(\vec{r}) = \Delta m \vec{g} = s \vec{g} \Delta V$. Její hustota je proto $\vec{f}_g(\vec{r}) = s \vec{g}$. Je ve všech bodech, v nichž lze pole považovat za homogenní, stejná. Dalším typem jsou třeba síly elektrostatické, v neinerciálních soustavách pak síly fiktivní (setrvačné), například síla odstředivá či Coriolisova.

- Druhým typem sil působících na každý element kapalinového tělesa jsou síly vzájemného působení v kapalině. Jejich působiště jsou rozložena podél styčné plochy interagujících částí kapaliny. Hovoříme proto o silách plošných a jejich hustotu počítáme tak, že působící sílu vztahujeme k obsahu plochy. Jednotkou je Nm^{-2} . Je-li kapalina ve statické rovnováze, jsou tyto síly vždy kolmé k tomuto rozhraní. Jedná se o síly *tlakové*. Předpokládejme, že na rozhraní mezi elementem kapaliny a zbytkem kapaliny, tj. „kapalinovým okolím“ tohoto elementu, je v bodě \vec{r} vymezena ploška ΔS . Vektor jednotkové normály k rozhraní v tomto bodě označme $\vec{n}(\vec{r})$. Ze dvou možných směrů takového vektoru zvolme ten, který směřuje ven z elementu (tzv. *vnější normála*). Okolní kapalina tlačí v daném bodě na element plošnou silou $\Delta \vec{F}_{pl}$ dovnitř, tj. $\Delta \vec{F}_{pl}(\vec{r}) = -|\Delta \vec{F}_{pl}(\vec{r})|\vec{n}(\vec{r})$. Hustota plošné (tlakové) síly je definována vztahem

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_{pl}(\vec{r})}{\Delta S} = - \left(\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{F}_{pl}(\vec{r})|}{\Delta S} \right) \vec{n}(\vec{r}) = -p(\vec{r})\vec{n}(\vec{r}).$$

Limita v závorce definuje veličinu $p(\vec{r})$, určující *tlak* v daném bodě kapaliny. Tlak je tedy velikost hustoty sil vzájemného působení částí kapaliny.



Obr. 9.29 Síly v kapalině.

Podmínka silové rovnováhy, kterou jsme formulovali pro elementy kapaliny, musí pochopitelně platit i makroskopicky. Výslednice sil, jimiž na jakkoli vymezený objem kapalinového tělesa působí okolí tohoto objemu, je nulová. Celkovou objemovou sílu působící na jakkoli vymezený objem V s hraniční plochou S získáme „sečtením“ elementárních sil integrálem

$$\vec{F}_{obj,V} = \int_V \vec{f}(\vec{r}) dV,$$

celkovou plošnou, resp. tlakovou sílu získáme „sečtením“ elementárních sil integrálem

$$\vec{F}_{pl,S} = \int_S \vec{\sigma}(\vec{r}) dS = - \int_S p(\vec{r})\vec{n}(\vec{r}) dS.$$

Pozn. 1: Nehledme nyní na fakt, že takové integrály jsme ještě pořádně nedefinovali a neumíme je počítat, i když jsme se jejich výpočtu již dotkli v kapitole 5. Vyhne se jim speciální volbou objemu a limitními přechody. Myšlenku tohoto postupu vyložíme na případu funkce jedné proměnné. Předpokládejme, že máme určit integrál ze spojitě funkce $f(\xi)$ na intervalu $[x, x + \Delta x]$ a nechceme ho počítat. Podle věty 2.8 existuje na tomto intervalu

822 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

k funkci $f(\xi)$ funkce primitivní $F(\xi)$, $F'(\xi) = f(\xi)$. Jak vypadá konkrétně, vědět nepotřebujeme. Platí

$$\int_x^{x+\Delta x} f(\xi) d\xi = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Funkce $F(\xi)$ však má derivaci, a proto pro ni platí Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Uvnitř intervalu $[x, x + \Delta x]$ existuje bod c tak, že $F(x + \Delta x) - F(x) = F'(c)\Delta x = f(c)\Delta x$. Proto

$$\int_x^{x+\Delta x} f(\xi) d\xi = f(c)\Delta x. \quad (9.35)$$

Tento výsledek se také nazývá *věta o střední hodnotě integrálního počtu*.

Namísto hodnoty integrálu můžeme tedy použít hodnotu $f(c)\Delta x$. Problém je v tom, že bod c také neznáme. Pro malou změnu Δx určenou mírou přípustné aproximace však můžeme hodnotu $f(c)$ nahradit hodnotou $f(x)$. V limitě platí již přesně

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(\xi) d\xi = f(x).$$

Obdobně můžeme uvažovat i v případě ostatních typů integrálů.

Pozn. 2: Pokud se některý čtenář diví, že neuvažujeme také o momentové rovnováze, je podiv na místě. Samozřejmě, pro rovnováhu tělesa nezanedbatelných rozměrů musí být nulový i výsledný moment sil, jimiž na toto těleso působí jeho okolí. Pokud však uvažujeme o rovnováze ideální kapaliny, kdy plošné síly mají povahu sil tlakových, je splnění této podmínky již důsledkem silové rovnováhy. Podrobněji se tímto fyzikálním problémem nebudeme zabývat.

Nyní se vraťme k našemu problému statické rovnováhy kapaliny. Při jeho formulaci a řešení budeme předpokládat, že funkce, s nimiž pracujeme, jsou na potřebných oborech přinejmenším spojité, popřípadě diferencovatelné, abychom zajistili korektnost všech operací, které s nimi budeme provádět. Základní úlohou statiky kapalin je najít rozložení tlaku v kapalině, tj. funkci $p(\vec{r}) = p(x, y, z)$. Záleží samozřejmě na tom, jak na jednotlivé elementy kapalinového tělesa působí jeho okolí. Kapalina si pak tlak „sama rozloží“ tak, aby síly, jimiž okolí působí na každý její element, byly právě kompenzovány silami tlakovými. K usnadnění výpočtu poslouží opět obrázek 9.29. Na obrázku je znázorněn element kapaliny ve tvaru malého kvádru o rozměrech Δx , Δy a Δz umístěného v bodě $\vec{r} = (x, y, z)$. Hustota objemových sil $\vec{f}(\vec{r})$ je dána okolím a musí být známa, jinak se ničeho nedopočítáme. Je-li kvádr dostatečně malý, můžeme veličinu $\vec{f}(\vec{r})$ uvnitř něj považovat zhruba za konstantní a vyjádřit tak snadno objemovou sílu působící na element,

$$\Delta \vec{F}_{obj} = \vec{f}(\vec{r}) \Delta V = \vec{f}(\vec{r}) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

(Oprávněnost tohoto přístupu jsme zdůvodnili v předchozí poznámce.) Trošku obtížnější bude vyjádření celkové tlakové síly, jíž působí na element kapalina, která jej obklopuje. Toto působení se odehrává na všech šesti stěnách kvádru. V obrázku je pro jednoduchost zakreslena jen dvojice stěn kolmých na osu y , s označením $\Delta S_y = \Delta x \Delta z$ (levá stěna) a $\Delta S'_y = \Delta x \Delta z$ (pravá stěna). Jednotkové vnější normály k těmto stěnám jsou $\vec{n}_y = (0, -1, 0)$, resp. $\vec{n}'_y = (0, 1, 0)$. Uvažujeme-li o rozložení tlaku podél stěny ΔS_y , můžeme vzhledem k jejím malým rozměrům předpokládat, že se podél ní nemění. Tlaková síla $\Delta \vec{F}_y$, jíž působí okolní kapalina na levou stěnu kvádru, je tedy

$$\Delta \vec{F}_y = -p(x, y, z) \vec{n}_y \Delta S_y = (0, p(x, y, z), 0) \Delta x \Delta z.$$

Podobně vypočteme tlakovou sílu $\Delta\vec{F}'_y$ působící na pravou stěnu, ovšem s tím rozdílem, že podél této stěny musíme počítat se změněným tlakem, tj. s hodnotou $p(x, y + \Delta y, z)$. Pak

$$\Delta\vec{F}'_y = -p(x, y + \Delta y, z) \vec{n}'_y \Delta S'_y = (0, -p(x, y + \Delta y, z), 0) \Delta x \Delta z.$$

Celková tlaková síla na stěny kolmé k ose y je tedy

$$\Delta\vec{F}_y + \Delta\vec{F}'_y = -(0, p(x, y + \Delta y, z) - p(x, y, z), 0) \Delta x \Delta z = -\left(0, \frac{p(x, y + \Delta y, z) - p(x, y, z)}{\Delta y}, 0\right) \Delta V.$$

Čtenář jistě pochopil, proč jsme použili, zdánlivě poněkud uměle, vyjádření obsahu stěn ΔS_y a $\Delta S'_y$ ve tvaru $\Delta x \Delta z = \frac{\Delta V}{\Delta y}$. Při limitním přechodu $\Delta V \rightarrow 0$ bude y -ová složka síly působící na stěny kolmé k ose y úměrná parciální derivaci tlaku podle proměnné y , x -ová i z -ová složka jsou nulové. Zcela obdobnou úvahu můžeme provést pro dvojici stěn kolmých k ose x , resp. z a pro výslednou tlakovou sílu působící na kvádr dostaneme

$$\Delta\vec{F}_{pl}(\vec{r}) = \Delta\vec{F}_{pl}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z}\right) \Delta V = -\text{grad } p(\vec{r}) \Delta V. \quad (9.36)$$

Vyjádření silové rovnováhy pro náš element je nyní již velmi jednoduché. Platí

$$\Delta\vec{F}_{obj} + \Delta\vec{F}_{pl} = \vec{0} \implies \vec{f}(\vec{r}) \Delta V - \text{grad } p(\vec{r}) \Delta V = \vec{0}, \quad \text{tj.}$$

$$\vec{f}(x, y, z) - \text{grad } p(x, y, z) = 0. \quad (9.37)$$

Poslední vektorová rovnice je soustavou parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámou funkci $p(x, y, z)$. Parciální diferenciální rovnice v obecnosti řešit neumíme. V některých případech však bývají tak jednoduché, že je zvládneme. Konkrétní ukázky výpočtu rozložení tlaku uvidíme za chvíli v příkladech 9.49 a 9.50.

Stále jsme však ještě ze získaných rovnic (9.37) nevyčerpali všechny informace, které v nich jsou v obecné podobě obsaženy. Především z nich plyne, že hledaný tlak $p(x, y, z)$ je kmenovou funkcí k úplnému diferenciálu

$$dp(x, y, z) = f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz.$$

Kmenová funkce je, jak již víme z předchozího výkladu o ní, určena až na konstantu. Dejme tomu, že určitá konkrétní funkce $P(x, y, z)$ je (partikulárním) řešením soustavy (9.37). Její obecné řešení má pak tvar

$$p(x, y, z) = P(x, y, z) + C, \quad C \in \mathbf{R} \quad \text{je libovolná konstanta.}$$

Nic jiného jsme také od rovnic prvního řádu pro skalární funkci nemohli čekat. Tento výsledek je však fyzikálně významný. Abychom určili konstantu C , musíme znát hodnotu tlaku alespoň v jednom bodě kapaliny. Dejme tomu, že $p(x_0, y_0, z_0) = p_0$. Pak $C = p_0 - P(x_0, y_0, z_0)$ a máme řešení okrajového problému

$$p(x, y, z) = P(x, y, z) - P(x_0, y_0, z_0) + p_0.$$

Pokud bychom tlak v bodě (x_0, y_0, z_0) změnili o Δp , tj. na hodnotu $p_0 + \Delta p$, bude řešením nového okrajového problému funkce

$$\bar{p}(x, y, z) = P(x, y, z) - P(x_0, y_0, z_0) + (p_0 + \Delta p) = p(x, y, z) + \Delta p.$$

Tento jednoduchý závěr vyplývající přímo ze struktury soustavy rovnic pro rovnováhu kapaliny se nazývá *Pascalův zákon*: Změní-li se tlak v *kterémkoli jednom* bodě kapaliny o hodnotu Δp , změní se tlak o tuto hodnotu *ve všech* bodech kapaliny.

824 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

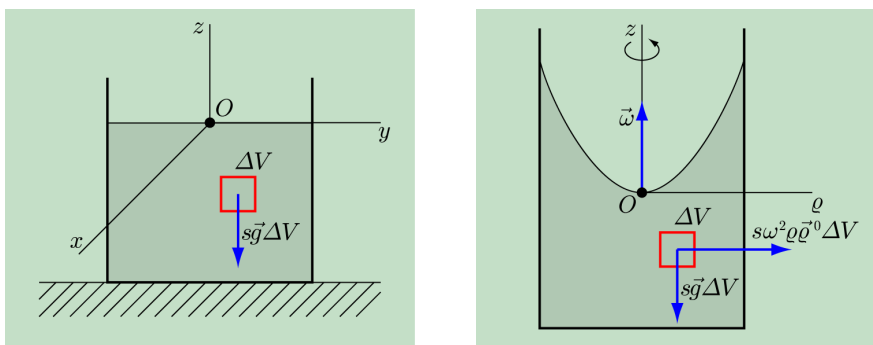
Struktura soustavy rovnic pro rozložení tlaku také umožňuje nalézt tvar volného povrchu kapaliny. Volným povrchem se myslí množina bodů v kapalině, které jsou v bezprostředním kontaktu, tedy v rovnováze, s okolím. Podstatou řešení úlohy je fakt, že tlak na celém povrchu je stejný a je obvykle znám. Označme jej například p_a . V situacích, kdy je kapalina volně v kontaktu s okolním vzduchem, má p_a význam atmosférického tlaku. Povrchem kapaliny je množina

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid p(x, y, z) = p_a\}.$$

Jak se stanoví tvar povrchu kapaliny konkrétně, ukážeme také v příkladech 9.49 a 9.50.

Příklad 9.49: Hydrostatický tlak

Ze střední školy víte, že tlak v kapalině, která je v nádobě umístěná v homogenním tíhovém poli Země, roste úměrně s hloubkou pod hladinou, přičemž na hladině je roven atmosférickému tlaku. Zvolíme-li tedy soustavu souřadnic podle levého obrázku 9.30, platí $p(x, y, z) = p_a - sgz$. Ukážeme, že tento vzorec vyplývá z podmínky (9.37). Vnější objemovou silou působící na každý element kapaliny je pouze síla tíhová. Její hustota



Obr. 9.30 K příkladům 9.49 a 9.50.

je $\vec{f}_g(\vec{r}) = s\vec{g} = (0, 0, -sg)$. Rovnice (9.37) jsou velmi jednoduché,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -sg.$$

Z prvních dvou plyne, že tlak nezávisí na x ani na y , třetí se dá snadno zintegrovat, $p = p(z) = -sgz + C$. Integrační konstanta se určí z okrajové podmínky, tj. na základě znalosti tlaku v bodě $z = 0$, $p(z = 0) = p_a$. Dostáváme očekávaný výsledek

$$p(x, y, z) = p_a - sgz.$$

Každodenní zkušenost ukazuje, že povrch klidné kapaliny je rovinný a vodorovný. Vyjde to i výpočtem? Na povrchu kapaliny je atmosférický tlak. Podle příkladu 9.48 je proto

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid p_a - sgz_{\mathcal{S}} = p_a\}.$$

Rovnice povrchu je $z_{\mathcal{S}} = 0$. Je to rovnice vodorovné roviny procházející počátkem soustavy souřadnic.

Příklad 9.50: Rozložení tlaku v rotující kapalině

Jistě jste už rotující kapalinové těleso viděli. Stačí zamíchat čaj. Kdyby byla voda skutečně ideální kapalinou, nebylo by možné ji takto roztočit. Protože v ní však přece jen vnitřní tření existuje, působí jednotlivé vrstvy na

sebe navzájem nejen kolmo k rozhraní, ale i tečně k němu. Postupně je tak možné uvést do rotace kapalinové těleso jako celek. Dejme tomu, že těleso rotuje stálou úhlovou rychlostí $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ kolem osy z . Vzhledem k pozorovateli v neinerciální vztažné soustavě pevně spojené s rotujícím kapalinovým tělesem je každý element v klidu. Kapalina je tedy ve statické rovnováze. V tomto stavu tečná silová působení vrstev kapaliny vymizí a platí předchozí vztahy. Rotující kapalinu v řezu svislou rovinou znázorňuje obrázek 9.30 vpravo. Vzhledem k rotační symetrii úlohy vypadají všechny takové řezy stejně. Proto je vhodné řešit úlohu ve válcových souřadnicích. Na objemový element kapaliny ΔV v místě o souřadnicích (ϱ, z) působí tíhová síla $s\vec{g}\Delta V$ a (fiktivní) odstředivá síla $s\omega^2\varrho\vec{\varrho}^0$, kde $\vec{\varrho}^0$ je jednotkový vektor v radiálním směru. V bázi vektorů válcových souřadnic $(\vec{f}_\varrho, \vec{f}_\varphi, \vec{f}_z)$ (příklad 5.19) má celková objemová síla působící na element složky $(s\omega^2\varrho\Delta V, 0, -sg\Delta V)$. Abychom mohli použít rovnice (9.37), musíme převést gradient do válcových souřadnic. Vektory $(\vec{f}_\varrho, \vec{f}_\varphi, \vec{f}_z)$ tvoří ortogonální bázi, vektor \vec{f}_φ však není jednotkový. Jeho délka je $|\vec{f}_\varphi| = \varrho$. Gradient obecné funkce $F(\varrho, \varphi, z)$ má proto složky

$$\text{grad } F(\varrho, \varphi, z) = \left(\frac{\partial F(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varrho}, \frac{1}{\varrho} \frac{\partial F(\varrho, \varphi, z)}{\partial \varphi}, \frac{\partial F(\varrho, \varphi, z)}{\partial z} \right).$$

Soustavu rovnic pro rozložení tlaku v závislosti na válcových souřadnicích $p(\varrho, \varphi, z)$ zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = s\omega^2\varrho, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -sg.$$

Z druhé rovnice ihned plyne, že tlak nezávisí na proměnné φ , což se dalo očekávat na základě symetrie úlohy. Funkce $p(\varrho, z)$ je kmenovou funkcí k úplnému diferenciálu $dp = s\omega^2\varrho d\varrho - sg dz$. Určete ji. Uplatníme-li okrajovou podmínku $p(\varrho = 0, z = 0) = p_a$, dostaneme

$$p(\varrho, z) = p_a + \frac{1}{2}s\omega^2\varrho^2 - sgz.$$

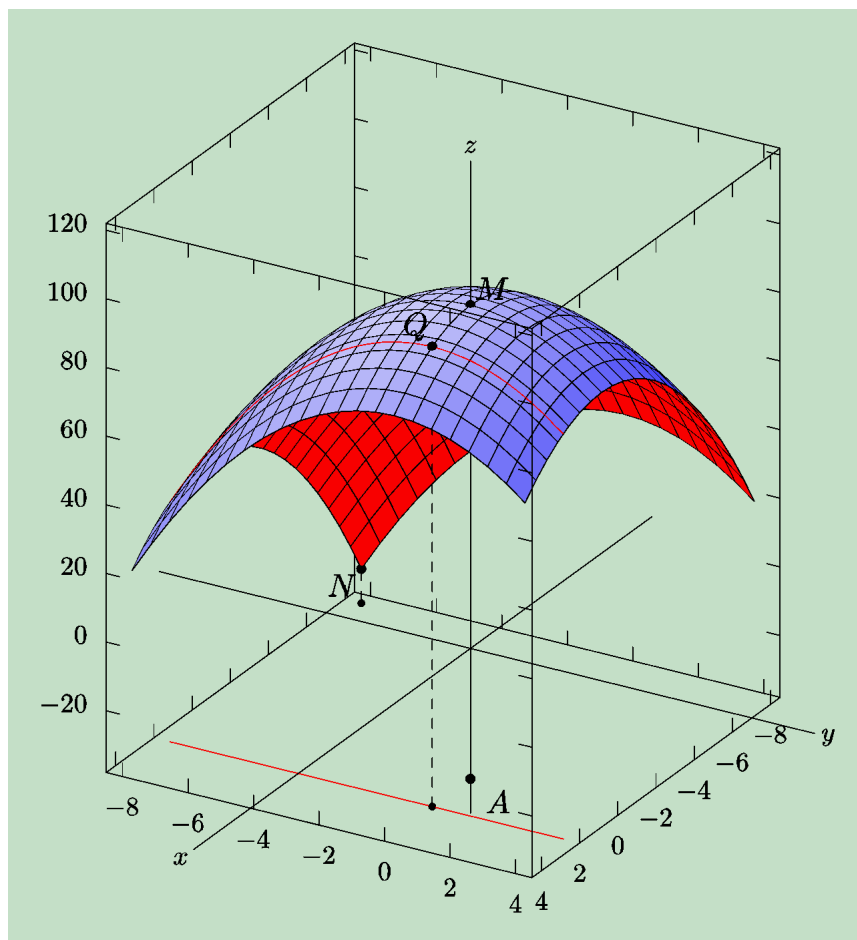
A jaký tvar zaujme volný povrch kapaliny? Jeho rovnice je dána, podobně jako v příkladu 9.49, opět požadavkem stejného (atmosférického) tlaku ve všech bodech na povrchu kapaliny,

$$p(\varrho_S, z_S) = p_a \implies z_S = \frac{\omega^2}{2g}\varrho_S^2.$$

Povrch má tvar rotačního paraboloidu (viz odstavec 6.3.2, věta 6.3).

9.2.5 Extrémy a stacionární body všeho druhu

S pojmy *stacionární bod* a *extrém* funkce jsme se potkávali již v prvním dílu. Hlavně v odstavci 2.2.2, který se soustředil na vyšetřování průběhu a zakreslení grafu funkce jedné proměnné. Graf funkce dvou proměnných si ještě dokážeme jakž takž představit, nebo si jej můžeme nechat vykreslit na počítači pomocí různých programů. „Zmapovat“ jej však do detailů je přece jen o něco obtížnější než u funkce jedné proměnné. A u funkcí více proměnných, kde selhává geometrická představa, spočívá vyšší obtížnost v tom, že se musíme spolehnout již jen na výpočty. Co však lze vyšetřit poměrně snadno a bez ohledu na počet proměnných, jsou stacionární body a extrémy funkce a jejich nejdůležitější typy. A to není málo. Pro řešení fyzikálních, technických, či jiných praktických problémů je totiž znalost stacionárních bodů, resp. extrémů velmi podstatná. Charakter některých typů extrémů snadno vysvětlíme na následujících obrázcích.



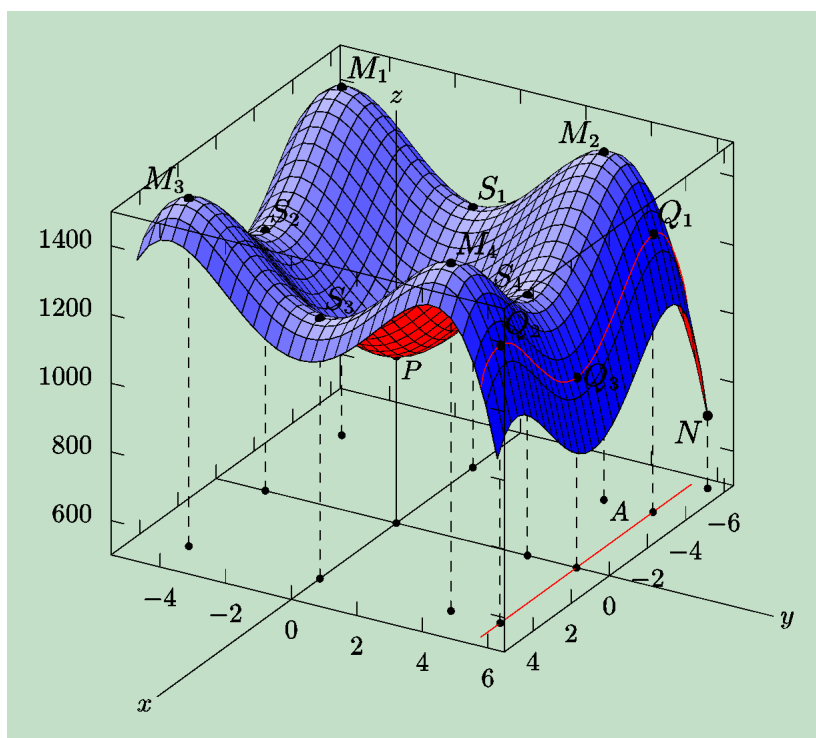
Obr. 9.31 Extrémy a stacionární body funkcí.

Na obrázku 9.31 je zakreslen graf funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = 100 - (x^2 + y^2)$$

na uzavřeném obdélníku $\bar{K} = [-8, 4] \times [-8, 4]$. Dívejme se na graf a pokusme se uvědomit si zatím intuitivně význam následujících sdělení:

- V bodě $(-8, -8)$ má funkce na množině \bar{K} (*ostré*) *globální neboli absolutní minimum* a nabývá v něm hodnoty $f(-8, -8) = -28$. Odpovídající bod grafu je N .
- V bodě $(0, 0)$ má funkce na množině \bar{K} (*ostré*) *globální neboli absolutní maximum* a nabývá v něm hodnoty $f(0, 0) = 100$. Odpovídající bod grafu je M .
- Současně má funkce v bodě $(0, 0)$ (*ostré*) *lokální maximum*, neboť existuje takové okolí $\mathcal{O}(0, 0) \subset \bar{K}$ tohoto bodu, že pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(0, 0)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, je $f(x, y) < f(0, 0)$.



Obr. 9.32 Extrémy a stacionární body funkcí.

- V bodě $(2, 0) \in A$, $A = \{(2, y) \mid y \in [-8, 4]\} \subset \bar{K}$, má funkce (vázané, ostré) lokální maximum vzhledem k množině A , neboť existuje takové okolí $\mathcal{O}(2, 0) \subset \bar{K}$ bodu $(2, 0)$, že pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(2, 0) \cap A$, $(x, y) \neq (2, 0)$ je $f(x, y) < f(2, 0)$. Platí $f(2, 0) = 96$. Odpovídající bod grafu je Q .

Trochu složitější obrázek 9.32 nám pomůže názorně si ujasnit pojem jak absolutních a lokálních extrémů, tak také stacionárních bodů obecně. V tomto případě máme co do činění s funkcí

$$f(x, y) = 1000 - (x^4 + y^4) + 32(x^2 + y^2)$$

na uzavřeném obdélníku $\bar{K} = [-6, 5] \times [-5, 6]$. Opět posuďme následující sdělení:

- V bodě $(-6, 6)$ má funkce na množině \bar{K} (ostré) globální, neboli absolutní minimum a nabývá v něm hodnoty $f(-6, 6) = 712$. Odpovídající bod grafu je N .
- V bodě $(0, 0)$ má funkce na množině \bar{K} (ostré) lokální minimum a nabývá v něm hodnoty $f(0, 0) = 1000$. Odpovídající bod grafu je P .
- V bodech $(-4, -4)$, $(-4, 4)$, $(4, -4)$ a $(4, 4)$ má funkce na množině \bar{K} (ostrá) lokální maxima a nabývá v nich hodnoty $f(-4, -4) = f(-4, 4) = f(4, -4) = f(4, 4) = 1512$. Odpovídající body grafu jsou M_1 , M_2 , M_3 a M_4 .

- V bodech $(-4, 0)$, $(0, -4)$, $(4, 0)$ a $(0, 4)$ má funkce na množině \overline{K} tzv. *sedlové stacionární body* a nabývá v nich hodnoty $f(-4, 0) = f(0, -4) = f(4, 0) = f(0, 4) = 1\,256$. Odpovídající body grafu jsou S_1, S_2, S_3 a S_4 (bod S_4 není při daném natočení obrázku příliš dobře vidět).
- V bodech $(-4, b) \in A$ a $(4, b) \in A$, $b \in (-5, 6)$, $A = \{(x, b) \mid x \in [-6, 5]\} \subset \overline{K}$, má funkce (*vázaná, ostrá*) *lokální maxima* vzhledem k množině A a nabývá v nich hodnot $f(-4, b) = f(4, b) = 1\,256 - b^4 + 32b^2$. Odpovídající body grafu pro $b = 5,5$ jsou Q_1 a Q_2 .
- V bodech $(0, b) \in A$, $b \in (-5, 6)$, $A = \{(x, b) \mid x \in [-6, 5]\} \subset \overline{K}$, má funkce (*vázaná, ostrá*) *lokální minima* vzhledem k množině A a nabývá v nich hodnot $f(0, b) = 1\,000 - b^4 + 32b^2$. Odpovídající bod grafu pro $b = 5,5$ je Q_3 . Další vázané extrémů zkuste popsat sami.

A teď, když jsme si názorně ukázali, co budeme rozumět extrémů a stacionárními body, pustíme se do formulace pořádných definic a tvrzení. Nejprve pro funkce dvou proměnných.

Stacionární body a lokální extrémů

Prvně vysvětlíme pojem lokálního extrémů. Co znamená slovo „lokální“? V běžné řeči je to „místní“. Sledujeme-li například pohoří z vrcholku menšího kopce, nedivíme se, když se okolo nás tyčí velehory. Stojíme na „lokálním“ vrcholku (v lokálním maximu). Nejsme v nejvyšším bodě v absolutním, nýbrž pouze v lokálním smyslu — kamkoli se z našeho vrcholku hne, budeme sestupovat dolů. A obdobné je to v matematice. Předpokládejme, že funkce dvou proměnných $f(x, y)$ je definována na množině D .

Řekneme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $(a, b) \in D$

- *lokální minimum*, jestliže existuje takové okolí $\mathcal{O}(a, b)$ bodu (a, b) , že pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(a, b)$ platí $f(x, y) \geq f(a, b)$,
- *ostré lokální minimum*, jestliže existuje takové okolí $\mathcal{O}(a, b)$ bodu (a, b) , že pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(a, b)$, $(x, y) \neq (a, b)$, platí $f(x, y) > f(a, b)$,
- *lokální maximum*, jestliže existuje takové okolí $\mathcal{O}(a, b)$ bodu (a, b) , že pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(a, b)$ platí $f(x, y) \leq f(a, b)$,
- *ostré lokální maximum*, jestliže existuje takové okolí $\mathcal{O}(a, b)$ bodu (a, b) , že pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(a, b)$, $(x, y) \neq (a, b)$, platí $f(x, y) < f(a, b)$.

Všechny čtyři případy představují v podstatě „stejnou“ definici, stačí jen zaměňovat názvy a nerovnosti. Pro příklady funkcí s lokálními extrémy nemusíme chodit daleko.

Příklad 9.51: Extrémy „hladké“

Na grafy funkcí z příkladů 9.28 (obrázek 9.17 vlevo) a 9.46

$$f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

$$f(x, y) = v - \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2\right), \quad \bar{D} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq v\right\},$$

se stačí jen podívat. Na první pohled je jasné, že první funkce má v bodě $(0, 0)$ ostré lokální minimum, v němž nabývá hodnoty $f(0, 0) = -1$, druhá funkce má v bodě $(0, 0)$ ostré lokální maximum a nabývá v něm hodnoty $f(0, 0) = v$. „První pohled“ ale matematikovi nemůže stačit. Proto definici ověříme, nejprve pro první funkci. Zvolme libovolné okolí bodu $(0, 0)$, $\mathcal{O} = (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \in D$. Pro libovolný bod $(x, y) \in \mathcal{O}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ platí

$$f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} < -1 = f(0, 0).$$

Obdobně postupujte v případě druhé funkce a tvrzení o jejím ostrém lokálním maximu v bodě $(0, 0)$ dokažte sami.

Příklad 9.52: Extrémy „zubaté a špičaté“

Funkce uváděné v příkladech 7.5 a 7.6,

$$f(t, x) = |x|, \quad \bar{D} = [-a, a] \times [-b, b],$$

$$f(t, x) = \frac{v}{R}\sqrt{t^2 + x^2}, \quad D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2 \mid t^2 + x^2 < R^2\},$$

jsme v kapitole 7 potřebovali pro objasnění Lipschitzovy podmínky. Teď se nám hodí, máme dokonce i jejich grafy (obrázky 7.7 a 7.8). Z grafu první z nich vidíme, že každý bod $(t_0, 0) \in (-a, a) \times (-b, b)$ splňuje definici lokálního minima. Funkce nabývá v těchto bodech nulové hodnoty. Opět však musíme to, co se nám zdá z grafu jasné, dokázat. Zvolme libovolné okolí bodu $(t_0, 0)$ ve tvaru $\mathcal{O} = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset (-a, a) \times (-b, b)$. Pro libovolný bod $(t, x) \in \mathcal{O}$ platí $f(t, x) = |x| \geq 0$, rovnost přitom nastává pro $x = 0$ a libovolné $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

A pokud jde o druhou funkci, je zase z grafu zřejmé, že má v bodě $(0, 0)$ ostré lokální minimum, funkce v něm nabývá nulové hodnoty. Zvolme libovolné okolí $\mathcal{O} = (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset D$. Pro každý jeho bod $(t, x) \neq (0, 0)$ platí $f(t, x) = \frac{v}{R}\sqrt{t^2 + x^2} > 0$.

Příklad 9.53: Extrémy „chaotické“

V příkladu 9.7 jsme pracovali s Riemannovou funkcí

$$f_R : \bar{C} = [0, 1] \times [0, 1] \ni (x, y) \longrightarrow f_R(x, y) \in \mathbf{R},$$

$$f_R(x, y) = 1 - \frac{1}{q} \text{ pro } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbf{N} \text{ nesoudělná, } y \in \mathbf{Q},$$

$$f_R(x, y) = 1 \text{ v ostatních případech.}$$

Ve všech bodech (x, y) s alespoň jednou iracionální souřadnicí nabývá Riemannova funkce hodnoty 1. Větší hodnoty nikdy nenabude. V každém z bodů (x, y) , jejichž některá souřadnice je iracionální, má proto funkce

$f_R(x, y)$ lokální maximum. Toto maximum samozřejmě není ostré. V každém okolí bodu (x, y) je totiž nekonečně mnoho dalších bodů, jejichž některá souřadnice je iracionální a funkce v nich nabývá hodnoty 1. A jak je to s lokálními minimy Riemannovy funkce? Ta by mohla být jedině v bodech $\left(\frac{p}{q}, y\right)$, kde čísla p a q jsou přirozená nesoudělná a y je racionální. Ve všech bodech množiny $A = \{(p/q, y) \mid y \in \mathbf{Q}\}$ nabývá Riemannova funkce hodnoty $0 < 1 - \frac{1}{q} < 1$. Je otázkou, zda dokážeme najít takové okolí $\mathcal{O} = \left(\frac{p}{q} - \delta, \frac{p}{q} + \delta\right) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ bodu $(p/q, y)$, že na něm funkce nabývá hodnoty vyšší, nebo stejné. Pokud by takové okolí existovalo, muselo by být číslo δ zvoleno tak, aby v intervalu $\left(\frac{p}{q} - \delta, \frac{p}{q} + \delta\right)$ neleželo ani jedno číslo $\frac{\bar{p}}{\bar{q}}$, kde čísla \bar{p}, \bar{q} jsou přirozená a nesoudělná, s menším jmenovatelem než q . Jde to zařídit? Zvolme nejprve okolí bodu $\frac{p}{q}$ libovolně ve tvaru intervalu $I = \left(\frac{p}{q} - \vartheta, \frac{p}{q} + \vartheta\right)$. Tento interval samozřejmě obsahuje nekonečně mnoho racionálních čísel. My se však zajímáme pouze o ta, která mají jmenovatele \bar{q} menšího než q . Pro dané q je ovšem přirozených čísel $\bar{q} < q$ pouze konečně mnoho. A ke každému z nich může existovat zase jen konečně mnoho čísel \bar{p} , pro něž je $\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \in I$. V intervalu I je proto pouze konečný počet racionálních čísel s jmenovatelem menším než q . Označíme-li jako r to z nich, které je nejbližší číslu $\frac{p}{q}$, a zvolíme-li $\delta = \frac{1}{2}|\frac{p}{q} - r|$, máme zaručeno, že v intervalu $\left(\frac{p}{q} - \delta, \frac{p}{q} + \delta\right)$ neleží žádné racionální číslo s jmenovatelem menším než q . Pro libovolné ε pak okolí

$$\mathcal{O} = \left(\frac{p}{q} - \delta, \frac{p}{q} + \delta\right) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \quad \text{bodu} \quad \left(\frac{p}{q}, y\right), \quad y \in \mathbf{Q},$$

neobsahuje žádný bod, v němž by byla hodnota Riemannovy funkce menší než $1 - \frac{1}{q}$. V každém z bodů $C = (0, 1) \times (0, 1)$, které mají obě souřadnice racionální, má tedy Riemannova funkce lokální minimum. Samozřejmě neostré (víte proč?).

V dalších úvahách se soustředíme na systematictější klasifikaci lokálních extrémů funkcí dvou proměnných, které jsme v příkladu 9.51 nazvali „hladké“.

Uvažujme o funkci $z = f(x, y)$ definované na otevřené množině D a předpokládejme, že má spojitě parciální derivace přinejmenším do druhého řádu. (Pokud by se ukázala potřeba ještě přísnějších požadavků, bude to zavčas řečeno.) Pro názornost uvažme situaci, že funkce má v bodě $(a, b) \in D$ třeba ostré lokální maximum. Představme si bod $(a, b, f(a, b)) \in G_f$ na grafu funkce jako „lokální“ vrchol nějakého kopce. Pro představu se vraťte třeba k obrázku 9.31 (ostré lokální maximum v bodě $(0, 0)$). Řekli jsme si už, že ať se z vrcholku hneme kterýmkoli směrem, vždy budeme sestupovat dolů. To není možné uskutečnit jinak, než že tečná rovina vedená ke grafu funkce v bodě dotyku $(a, b, f(a, b))$ je rovnoběžná s půdorysnou — souřadnicovou rovinou xy , stejně jako všechny tečny, které tečnou rovinu vyplňují. Zároveň je názorně jasné, že v nějakém malém ryzím okolí bodu (a, b) leží graf pod touto rovinou.

Pozn.: Uvědomte si, že existence tečné roviny

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

ke grafu funkce v bodě $(a, b, f(a, b))$ je s jistotou zaručena. Podle předpokladu jsou totiž parciální derivace $f_x(a, b)$ a $f_y(a, b)$ funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) spojitě. Proto je funkce v tomto bodě diferencovatelná a ke grafu lze sestavit tečnou rovinu (viz odstavec 9.2.3). Všechny

přímky, které v této rovině leží a procházejí bodem dotyku, jsou tečnami ke grafu funkce v tomto bodě.

Předchozí názorná představa napovídá, že nutnou podmínkou ostrého lokálního maxima funkce v daném bodě bude nulovost jejich parciálních derivací prvního řádu. Obdobná úvaha nás přivede ke stejnému závěru i v případě ostrého lokálního minima, neostrých lokálních extrémů, ale i sedlového bodu. Jak jsme si však už zvykli, nelze se v matematice spoléhat jen na názornou představu. To by se matematikové zlobili, ale co je horší, představa nás může zklamat. Proto je třeba, abychom náš výsledek odvodili pořádně. Současně při tom najdeme kritérium, jak rozpoznat a třídit tzv. *stacionární body* funkce, k nimž patří i lokální extrémy.

Co je ke korektní klasifikaci stacionárních bodů potřeba, odvodíme pomocí známé klasifikace stacionárních bodů funkce jedné proměnné (odstavec 2.2.2 prvního dílu) a trošky algebry (odstavec 6.3.1 o kvadratických formách). Vše tedy máme připraveno a můžeme začít s matematickou úvahou.

Vedme bodem (a, b) v souřadnicové rovině xy přímku p o parametrických rovnicích $x = a + \xi t$, $y = b + \eta t$, kde $\vec{u} = (\xi, \eta)$ je její směrový vektor a t je parametr. Sestrojíme funkci jedné proměnné

$$F_{(\xi, \eta)}(t) = f(a + t\xi, b + t\eta), \quad (a + t\xi, b + t\eta) \in D.$$

Grafem G_F této funkce je křivka, která vznikne řezem grafu G_f funkce $f(x, y)$ rovinou ϱ vedenou přímkou p kolmo k půdorysně (viz například obrázek 9.33). Tečna ke grafu funkce $F_{(\xi, \eta)}(t)$ v bodě $t = 0$ je současně tečnou ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) . Tečná rovina ke grafu G_f v bodě (a, b) bude rovnoběžná s půdorysnou právě tehdy, budou-li tečny ke grafu G_F v bodě $t = 0$ rovnoběžné s půdorysnou při libovolné volbě vektoru $\vec{u} = (\xi, \eta)$, tj.

$$F'_{(\xi, \eta)}(0) = f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta = 0. \quad (9.38)$$

Při výpočtu derivace funkce $F_{(\xi, \eta)}(t)$ jsme použili řetězového pravidla.

Pozn.: Že vám vztah (9.38) něco připomíná? Správně. Pokud bude vektor $\vec{u} = (\xi, \eta)$ jednotkový, půjde o směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ (9.27) popsanou v odstavci 9.2.4. Z algebraického hlediska se jedná o lineární formu v proměnných ξ a η s koeficienty $f_x(a, b)$ a $f_y(a, b)$ (kdo zapomněl, co to je, může se vrátit k příkladu 4.47).

Tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě dotyku $(a, b, f(a, b))$ je rovnoběžná s půdorysnou právě když je lineární forma (9.38) nulová pro všechny hodnoty ξ a η . V takovém případě je ovšem nulová identicky, tj. $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$. Tento výsledek je ve shodě se skutečností, že parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) podle proměnných x a y jsou koeficienty v rovnici tečné roviny vedené bodem $(a, b, f(a, b))$ ke grafu G_f . Na základě dobré geometrické představy již můžeme snadno vyslovit definici stacionárního bodu funkce a základní tvrzení.

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná na otevřené množině D a má zde spojité parciální derivace prvního řádu. Bod $(a, b) \in D$ se nazývá *stacionárním bodem* funkce $f(x, y)$, jestliže je bod $t = 0$ stacionárním bodem funkce $F_{(\xi, \eta)}(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ pro libovolný vektor $\vec{u} = (\xi, \eta)$.

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná na otevřené množině D a má zde spojité parciální derivace prvního řádu. Bod $(a, b) \in D$ je stacionárním bodem funkce $f(x, y)$ právě když platí $f_x(a, b) = 0$ a $f_y(a, b) = 0$.

Pozn.: Ve standardních učebnicích matematické analýzy slouží předchozí tvrzení obvykle přímo jako definice stacionárního bodu.

Příklad 9.54: Je lokální extrém stacionárním bodem?

Ne každý. Tak třeba funkce $f(x, y) = \frac{v}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$, s níž jsme se (při jiném označení proměnných) setkali v příkladu 9.52, má ostré lokální minimum v bodě $(0, 0)$. Tento bod však z hlediska definice není stacionárním bodem, protože v něm parciální derivace funkce $f(x, y)$ vůbec neexistují. U Riemannovy funkce z příkladu 9.53 je věc také jasná — nenajdeme totiž žádnou otevřenou podmnožinu jejího definičního oboru, na níž by (ve všech bodech) existovaly parciální derivace této funkce.

Posuďme však situaci, kdy v bodě (a, b) má funkce lokální extrém a současně v něm má spojité parciální derivace prvního řádu. Pak existuje derivace funkce $F_{(\xi, \eta)}(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ pro libovolný vektor $\vec{u} = (\xi, \eta)$ a v bodě $t = 0$ je nulová. Bod $t = 0$ je stacionárním bodem funkce $F_{(\xi, \eta)}(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ pro libovolný vektor $\vec{u} = (\xi, \eta)$, a tím pádem je i bod (a, b) stacionárním bodem funkce $f(x, y)$.

A zamysleme se ještě nad předpokladem *spojitosti* parciálních derivací prvního řádu funkce $f(x, y)$ v předchozích úvahách. Nestačil by jen předpoklad existence? Pokud bychom měli na mysli jen samotnou definici a stacionární bod pomocí podmínek $f_x(a, b) = 0$ a $f_y(a, b) = 0$ zavedli, nemuseli bychom nic dalšího předpokládat. Protože však k důkazům tvrzení používáme funkci $F_{(\xi, \eta)}(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ a její derivaci, je třeba zajistit, aby tato derivace existovala. K jejímu výpočtu používáme řetězového pravidla pro derivaci složené funkce (věta 9.5). To ovšem vychází z předpokladu *spojitých* parciálních derivací vnější složky, jíž je v našem případě funkce $f(x, y)$.

Co by se mohlo stát, kdyby parciální derivace funkce $f(x, y)$ v daném bodě sice existovaly, ale nebyly spojité, můžeme vidět u funkce $z = g(x, y)$ z příkladu 9.28, jejíž graf je na obrázku 9.17 vpravo. V bodě $(a, b) = (0, 0)$ má funkce ostré lokální maximum (pokuste se to dokázat). Je však bod $(0, 0)$ stacionárním bodem funkce? Pokud bychom definovali stacionární bod jen pomocí podmínek $g_x(a, b) = 0$ a $g_y(a, b) = 0$, pak ano. K úvahám bychom však nemohli použít složenou funkci $F_{(\xi, \eta)}(t) = g(0 + t\xi, 0 + t\eta)$, která vůbec derivaci v bodě $t = 0$ nemá vinou nespojitosti parciálních derivací své vnější složky.

O typu stacionárního bodu funkce jedné proměnné často rozhodne její druhá derivace (až na speciální případy, jejichž podstatu jsme u funkcí jedné proměnné popsali v příkladu 2.42 v prvním dílu). Vypočtěme proto $F''_{(\xi, \eta)}(t)$. Použijeme při tom opět řetězového pravidla pro

derivace složených funkcí a již vypočtenou první derivaci $F'_{(\xi,\eta)}(t)$. Platí

$$\begin{aligned} F''_{(\xi,\eta)}(t) &= \frac{d}{dt} (f_x(a+t\xi, b+t\eta)\xi + f_y(a+t\xi, b+t\eta)\eta) = \\ &= [f_{xx}(a+t\xi, b+t\eta)\xi + f_{xy}(a+t\xi, b+t\eta)\eta] \xi + [f_{yx}(a+t\xi, b+t\eta)\xi + f_{yy}(a+t\xi, b+t\eta)\eta] \eta, \\ F''_{(\xi,\eta)}(0) &= f_{xx}(a, b)\xi^2 + 2f_{xy}(a, b)\xi\eta + f_{yy}(a, b)\eta^2. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Jistě jste si všimli, že jsme při výsledné úpravě výrazu pro $F''_{(\xi,\eta)}(0)$ využili záměnnosti smíšených derivací druhého řádu, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ — je zaručena jejich předpokládanou spojitostí. A jistě byste také dokázali vypočítat i vyšší derivace, kdyby bylo třeba. Podívejme se však na strukturu druhé derivace $F''_{(\xi,\eta)}(0)$. Zápis (9.39) můžeme také chápat jako kvadratickou formu (vztah (6.17)) dvou proměnných ξ a η ,

$$\begin{aligned} F''_{(\xi,\eta)}(0) &= \kappa(\xi, \eta) = f_{xx}(a, b)\xi^2 + 2f_{xy}(a, b)\xi\eta + f_{yy}(a, b)\eta^2, \\ \kappa(\xi, \eta) &= (\xi \quad \eta) \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

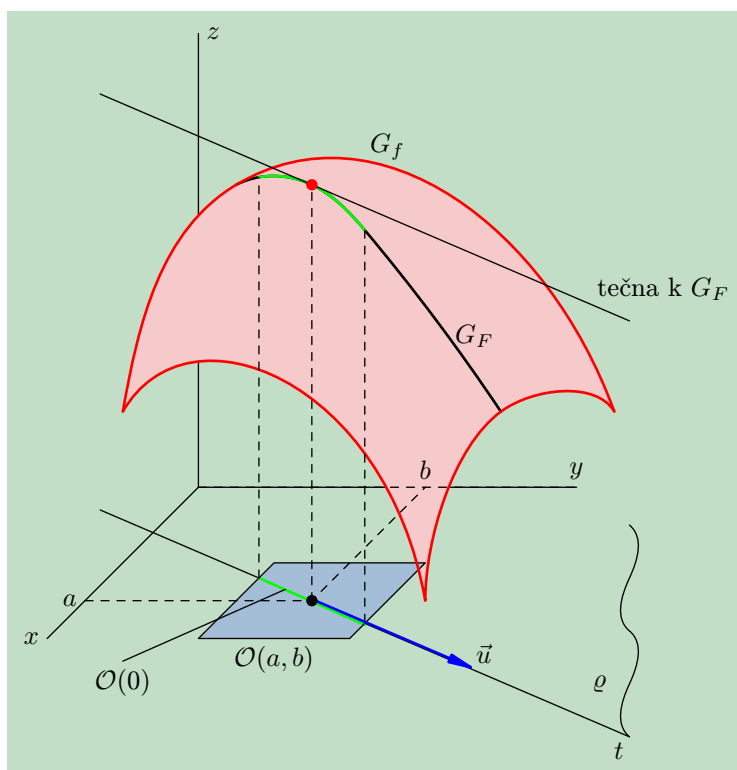
Uvědomme si ještě jednu důležitou věc. Definice kvadratické formy v odstavci 6.3.1 vyžadovala, aby alespoň jeden z jejích koeficientů byl nenulový. Může se však stát, že všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y)$ ve stacionárním bodě (a, b) budou nulové (příkladem jsou třeba funkce $f(x, y) = x^3 - y^3$ v bodě $(0, 0)$, $f(x, y) = xy^2 - 4xy - y^2 + 4x + 4y - 4$ v bodě $(1, 2)$, a jistě dokážete vymyslet řadu dalších). Výraz (9.40) pak nepředstavuje z hlediska naší definice a klasifikace z odstavce 6.3.1 kvadratickou formu. Možnost, že jsou druhé derivace identicky nulové, však nemůžeme při klasifikaci stacionárních bodů funkcí opomenout. Budeme proto (pouze) pro tyto účely hovořit o „nulové“ kvadratické formě.

A jak pomocí kvadratické formy (9.40) o typu stacionárního bodu můžeme (nebo také nemůžeme) rozhodnout? Základní úvaha využívá funkce jedné proměnné $F''_{(\xi,\eta)}(t)$ úplně stejně jako v odstavci 2.2.2 prvního dílu. Jen přidáme geometrickou úvahu, při níž nám pomůže opět obrázek 9.33.

Na něm je schematicky zakreslen graf funkce $f(x, y)$, která má v bodě (a, b) ostré lokální maximum. Vyznačena je také křivka

$$G_F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = a + t\xi, y = b + t\eta, z = F_{(\xi,\eta)}(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)\},$$

která je grafem funkce $F_{(\xi,\eta)}(t)$. Z obrázku se zdá být zřejmé, že má-li funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) ostré lokální maximum, má funkce $F_{(\xi,\eta)}(t)$ ostré lokální maximum v bodě $t = 0$. Je tomu tak opravdu? Uvažujme: Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) ostré lokální maximum, pak



Obr. 9.33 Ostré lokální maximum.

podle definice existuje takové okolí $\mathcal{O}(a, b)$ bodu (a, b) , že pro všechna $(x, y) \in \mathcal{O}(a, b)$, $(x, y) \neq (a, b)$, je $f(x, y) < f(a, b)$. Tato nerovnost samozřejmě platí i pro body průniku okolí $\mathcal{O}(a, b)$ s přímkou o rovnicích $x = a + t\xi$, $y = b + t\eta$, označenou v obrázku jako osa proměnné t . Tento průnik je otevřeným intervalem, tj. okolím bodu $t = 0$ na ose t . K bodu $t = 0$ jsme tak sestrojili okolí $\mathcal{O}(0)$ takové, že pro všechny body $t \in \mathcal{O}(0)$, $t \neq 0$, platí $F_{(\xi, \eta)}(t) < F_{(\xi, \eta)}(0)$. V bodě $t = 0$ má proto funkce $F(t)$ ostré lokální maximum.

Uvědomte si, že předchozí úvaha je platná pro *libovolný* vektor $\vec{u} = (\xi, \eta)$. Co z toho lze usoudit? Má-li funkce $F_{(\xi, \eta)}(t)$ v bodě $t = 0$ stacionární bod, tj. $F'_{(\xi, \eta)}(0) = 0$, a platí-li $F''_{(\xi, \eta)}(0) < 0$ pro libovolné ξ a η , $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$, je tento stacionární bod ostrým lokálním maximumem. Je-li však $F''_{(\xi, \eta)}(0) < 0$ pro libovolný nenulový vektor (ξ, η) , znamená to, že kvadratická forma (9.40) nabývá jen záporných hodnot, s výjimkou nulové hodnoty pro $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Takové formy jsme v odstavci 6.3.1 nazývali *negativně definitní*. Z předchozích úvah proto vyplývá, že je-li kvadratická forma (9.40) ve stacionárním bodě (a, b) funkce $f(x, y)$ negativně definitní, je tento stacionární bod ostrým lokálním maximumem.

Příklad 9.55: Lze předchozí tvrzení obrátit?

Předchozí tvrzení obrátit nelze. Může se totiž stát, že kvadratická forma (9.40) nebude negativně definitní, a přesto bude v bodě (a, b) ostré lokální maximum. Vezměme třeba funkci $f(x, y) = 1 - (x^4 + y^4)$. Jistě budete umět pomocí definice zdůvodnit, že v bodě $(a, b) = (0, 0)$ má tato funkce ostré lokální maximum. Snadno si

však můžete ověřit, že v bodě $t = 0$ je

$$F'_{(\xi,\eta)}(0) = 0, \quad F''_{(\xi,\eta)}(0) = 0, \quad F^{(3)}_{(\xi,\eta)}(0) = 0, \quad F^{(4)}_{(\xi,\eta)}(0) = -24(\xi^4 + \eta^4)$$

pro libovolné ξ a η . Teprve čtvrtá derivace je nenulová. (Podobné situace jsme viděli také v příkladu 2.42 v prvním dílu.) Výraz (9.40) je v bodě $(0, 0)$ dokonce nulový pro libovolné ξ a η , takže představuje „nulovou“ kvadratickou formu. Rozhodně není negativně definitní.

Obdobná úvaha, jenže s opačnými ostrými nerovnostmi a pozitivně definitní kvadratickou formou (9.40), platí pro ostré lokální minimum. Zkuste si ji sami provést. Úvahy o ostrých extrémech můžeme zatím uzavřít takto:

Je-li bod (a, b) stacionárním bodem funkce $f(x, y)$ a platí-li pro funkci $F_{(\xi,\eta)}(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ nerovnost $F''_{(\xi,\eta)}(0) < 0$ ($F''_{(\xi,\eta)}(0) > 0$) pro libovolné hodnoty proměnných ξ a η , $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$, tj. je-li kvadratická forma (9.40) negativně (pozitivně) definitní, má funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) ostré lokální maximum (minimum).

Uvažme nyní situaci, kdy funkce má v bodě (a, b) lokální maximum, ale to není ostré. K jakému závěru týkajícímu se kvadratické formy (9.40) dospějeme? Z definice lokálního maxima v bodě (a, b) plyne, že existuje okolí $\mathcal{O}(a, b)$ tohoto bodu tak, že platí $f(x, y) \leq f(a, b)$ pro všechny body $(x, y) \in \mathcal{O}(a, b)$. Co je jasné, je to, že druhá derivace funkce $F_{(\xi,\eta)}(t)$ v bodě $t = 0$ nemůže být kladná pro žádné hodnoty proměnných ξ a η . Kvadratická forma (9.40) proto nemůže být ani pozitivně definitní, ani pozitivně semidefinitní, ani indefinitní. Negativně definitní také není, neboť v takovém případě by lokální maximum bylo ostré. Musí tedy být buď negativně semidefinitní, nebo jde o „nulovou“ kvadratickou formu.

Příklad 9.56: Lze předchozí výsledek obrátit?

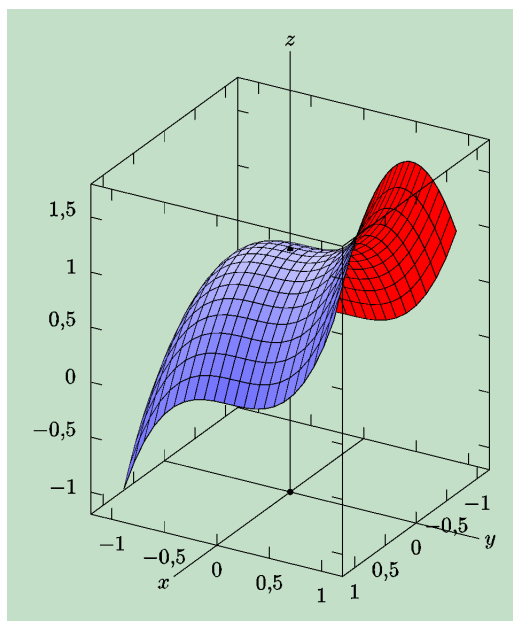
Neboli — můžeme v případě, že kvadratická forma (9.40) je negativně semidefinitní, nebo „nulová“, usoudit, že stacionární bod je lokálním maximem? Vzpomeňme si znovu na klasifikaci stacionárních bodů funkce jedné proměnné. Když byla druhá derivace funkce ve stacionárním bodě nenulová, mohli jsme podle jejího znaménka poznat, zda se jedná o ostré lokální minimum, nebo maximum. Byla-li nulová, nedalo se z ní poznat vůbec nic a museli jsme počítat vyšší derivace. Podobně je tomu i u funkcí dvou proměnných. Je-li druhá derivace funkce $F''_{(\xi,\eta)}(0)$ ve stacionárním bodě $t = 0$ pro některou volbu proměnných ξ a η rovna nule, nedá se poznat, o jaký typ stacionárního bodu se jedná. Co to znamená pro kvadratickou formu (9.40)? Předpokládejme, že je negativně semidefinitní, tj. nabývá pouze nekladných hodnot, přičemž nulové hodnoty nabývá i v některých situacích, kdy $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$. Pro takové situace je pak $F''_{(\xi,\eta)}(0) = 0$ a typ stacionárního bodu funkce $F_{(\xi,\eta)}(0)$ nelze z (9.40) určit. Konkrétní příklad funkce, jejíž stacionární bod (a, b) není lokálním maximem a přitom je kvadratická forma (9.40) negativně semidefinitní, ukazuje obrázek 9.34.

Je na něm graf funkce $f(x, y) = 1 - x^2 + y^3$ na množině $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Spočítejme její derivace až do druhého řádu včetně,

$$f_x(x, y) = -2x, \quad f_y(x, y) = 3y^2, \quad f_{xx}(x, y) = -2, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 6y.$$

Stacionárním bodem je bod $(a, b) = (0, 0)$, v němž je funkční hodnota $f(0, 0) = 1$ a platí v něm

$$f_{xx}(0, 0) = -2, \quad f_{xy}(0, 0) = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = 0 \implies \kappa(\xi, \eta) = -2\xi^2.$$



Obr. 9.34 K příkladu 9.56.

Kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta) = -2\xi^2$ nabývá pro všechny dvojice proměnných (ξ, η) , kde $\xi \neq 0$, záporných hodnot a pro $(0, \eta)$ nulové hodnoty. Je tedy negativně semidefinitní. Stacionární bod $(0, 0)$ však není lokálním maximem, jak by se někdo mohl domnívat. Je to vidět již z obrázku, ale umíme to i dokázat. Vezměme jakkoli malé okolí $\mathcal{O}(0, 0) = (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ bodu $(0, 0)$. Spočítejme hodnoty funkce $f(x, y)$ v bodech $(0, y) \in \mathcal{O}(0, 0)$ a $(x, 0) \in \mathcal{O}(0, 0)$. Dostaneme

$$f(0, y) = 1 + y^3 > 1 \quad \text{pro } y > 0, \quad f(x, 0) = 1 - x^2 < 1.$$

V libovolném okolí stacionárního bodu $(0, 0)$ jsme našli jak body, v nichž je funkční hodnota funkce $f(x, y)$ větší než ve stacionárním bodě, tak body, v nichž je menší. Bod $(0, 0)$ proto není lokálním extrémem. Je to *sedlový bod*. Název je docela případný — graf na obrázku 9.34 skutečně připomíná sedlo mezi horami nebo sedlo koňské.

V případě funkce $f(x, y) = 1 - x^2 + y^3$ jsme zjistili, že kvadratická forma (9.40) je ve stacionárním bodě $(0, 0)$ negativně semidefinitní, ale typ stacionárního bodu z toho nedokážeme poznat. Stejně tak nemůžeme nic poznat, půjde-li o „nulovou“ kvadratickou formu. Pro rozhodnutí o typu stacionárního bodu je třeba počítat a diskutovat vyšší derivace funkce $F_{(\xi, \eta)}(t)$. To už ale dělat nebudeme.

A jak to bude v případě, že kvadratická forma (9.40) bude indefinitní? Podle volby proměnných ξ a η pak může nabývat jak kladných, tak záporných, ale i nulových hodnot. Podle vztahu (9.39) to znamená, že hodnota $F''_{(\xi, \eta)}(0)$ může být kladná, záporná, nebo nulová, opět podle volby ξ a η . V bodě (a, b) je proto v některých řezech grafu funkce $f(x, y)$ svislou rovinou proloženou přímkou $x = a + t\xi$, $y = b + t\eta$ lokální minimum, v některých lokální maximum, nebo inflexní bod. Bod (a, b) není lokálním extrémem.

Na základě předchozí diskuse a dokazování můžeme vyslovit tvrzení týkající se stacionárních bodů funkce dvou proměnných.

Věta 9.8 (Klasifikace stacionárních bodů): Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ má na otevřené množině D spojité parciální derivace prvního a druhého řádu a nechť $(a, b) \in D$ je její stacionární bod. Označme

$$\kappa(\xi, \eta) = f_{xx}(a, b)\xi^2 + 2f_{xy}(a, b)\xi\eta + f_{yy}(a, b)\eta^2.$$

Platí

- Je-li kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ pozitivně (negativně) definitní, má funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) ostré lokální minimum (maximum).
- Je-li kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ indefinitní, nemá funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) lokální extrém (bod (a, b) je sedlovým bodem funkce).
- Má-li funkce v bodě (a, b) lokální minimum (maximum), je kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ pozitivně (negativně) definitní, nebo semidefinitní, nebo se jedná o „nulovou“ kvadratickou formu.

Předchozí úvahy a jejich závěry nyní zobecníme na případ funkcí více proměnných.

Nechť $z = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ a má zde spojité parciální derivace prvního řádu. Bod $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ se nazývá *stacionárním bodem* funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, jestliže je bod $t = 0$ stacionárním bodem funkce $F_{(\xi_1, \dots, \xi_n)}(t) = f(a_1 + t\xi_1, \dots, a_n + t\xi_n)$ pro libovolnou n -tici (vektor) $(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Nechť $z = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ a má zde spojité parciální derivace prvního řádu. Bod $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ je stacionárním bodem funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ právě když platí $f_i(a) = f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ pro $1 \leq i \leq n$.

Dále pro funkci $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ a bod $a = (a_1, \dots, a_n)$ definujeme kvadratickou formu

$$\kappa(\xi) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(a)\xi_i\xi_j = (\xi_1 \quad \dots \quad \xi_n) \begin{pmatrix} f_{11}(a) & f_{12}(a) & \dots & f_{1n}(a) \\ f_{21}(a) & f_{22}(a) & \dots & f_{2n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(a) & f_{n2}(a) & \dots & f_{nn}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = (\xi)A(\xi)^T, \quad (9.41)$$

kde A je matice kvadratické formy, utvořená z parciálních derivací druhého řádu funkce $f(x)$ v bodě a . Předpokládáme o nich opět, že jsou spojité. Jsou-li všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x)$ v bodě a rovny nule, nejde sice o kvadratickou formu ve smyslu definice v odstavci 6.3.1, pro účely klasifikace stacionárních bodů však budeme hovořit o „nulové“ kvadratické formě $\kappa(\xi)$.

Věta 9.9 (Klasifikace stacionárních bodů): Předpokládejme, že funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ má na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ spojité parciální derivace prvního a druhého řádu a nechť $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ je její stacionární bod. Označme

$$\kappa(\xi) = \kappa(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(a)\xi_i\xi_j$$

(vztah (9.41)). Platí

- Je-li kvadratická forma $\kappa(\xi)$ pozitivně (negativně) definitní, má funkce $f(x)$ v bodě a ostré lokální minimum (maximum).
- Je-li kvadratická forma $\kappa(\xi)$ indefinitní, nemá funkce $f(x)$ v bodě a lokální extrém.
- Má-li funkce v bodě a lokální minimum (maximum), je kvadratická forma $\kappa(\xi)$ pozitivně (negativně) definitní, nebo semidefinitní, nebo se jedná o „nulovou“ kvadratickou formu.

Větu 9.9 lze samozřejmě využít i ke klasifikaci stacionárních bodů funkce zadané implicitně, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 9.57: Nalezení extrému funkce zadané implicitně

V příkladu 9.33 jsme se naučili počítat parciální derivace funkce dvou proměnných, jejíž funkční předpis $z = f(x, y)$ byl „skryt“ v rovnici $F(x, y, z) = 0$. Hovořili jsme o funkci zadané implicitně. Možnou pochybnost

o smyslu takového počítání jsme se v příkladu 9.34 snažili rozptýlit poukazem na to, že může pomoci při hledání stacionárních bodů funkce $z = f(x, y)$ i bez znalosti předpisu $f(x, y)$. Nyní uvidíme praktickou ukázkou, včetně klasifikace stacionárních bodů.

Kvadratika v \mathbf{R}^3 je zadána rovnicí

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + xy + yz + 12 = 0.$$

Funkce $F(x, y, z)$ má spojité parciální derivace. To zaručuje, že v jistém okolí každého bodu (a, b, c) , v němž je $F_z(a, b, c) \neq 0$, je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ zadána právě jedna spojitá funkce $z = f(x, y)$, pro niž platí vztahy (9.17). (Zkuste ji vyjádřit vyřešením kvadratické rovnice $x^2 + y^2 - z^2 + xy + yz + 12 = 0$ vzhledem k neznámé z .) Naším úkolem nyní bude najít lokální extrémů této funkce. Víme, že „hladký“ extrém může nastat pouze ve stacionárním bodě, tj. tam, kde parciální derivace f_x a f_y nabývají nulové hodnoty. Dosaďme $z = f(x, y)$ do rovnice $F(x, y, z) = 0$, označme

$$G(x, y) = F(x, y, f(x, y)) = x^2 + y^2 - f^2(x, y) + xy + yf(x, y) + 12 = 0$$

a derivujme pomocí řetězového pravidla (9.15):

$$G_x(x, y) = 2x - 2f(x, y)f_x(x, y) + y + yf_x(x, y) = 0 \implies f_x(x, y) = -\frac{2x + y}{y - 2f(x, y)}, \quad (9.42)$$

$$G_y(x, y) = 2y - 2f(x, y)f_y(x, y) + x + f(x, y) + yf_y(x, y) = 0 \implies f_y(x, y) = -\frac{x + 2y + f(x, y)}{y - 2f(x, y)}.$$

Získali jsme tak vztahy (9.17) pro naši konkrétní funkci. Nabízí se otázka: Nebylo zbytečné znovu počítat derivace G_x a G_y , když jsme mohli do vztahů (9.17) rovnou dosadit a určit f_x a f_y ? Ukáže se, že nešlo o zbytečnou práci — derivace G_x a G_y ještě budeme potřebovat. Z nutné podmínky $f_x = 0$ a $f_y = 0$ pro extrém funkce $f(x, y)$ a z rovnice $F(x, y, f(x, y)) = 0$ již snadno, například postupným dosazováním, získáme polohu stacionárních bodů (x, y) a odpovídající hodnoty $z = f(x, y)$:

$$0 = 2x + y \implies y = -2x, \quad 0 = x + 2y + f(x, y) = x - 4x + f(x, y) = 0 \implies z = f(x, y) = 3x,$$

$$0 = F(x, -2x, 3x) = x^2 + 4x^2 - 9x^2 - 2x^2 - 6x^2 + 12 = -12x^2 + 12 \implies x = \pm 1.$$

Stacionární body, tj. body „podezřelé“ z extrému, jsou tedy dva: $(a_1, b_1) = (1, -2)$ a $(a_2, b_2) = (-1, 2)$. Hodnoty funkce $f(x, y)$ v nich jsou $c_1 = f(a_1, b_1) = f(1, -2) = 3$ a $c_2 = f(a_2, b_2) = f(-1, 2) = -3$. Jak ale můžeme poznat, zda v některém z nich lokální extrém skutečně nastává a zda se jedná o maximum, nebo minimum? Přece podle signatury kvadratické formy $\kappa(\xi, \eta)$ (vztah (9.40)) v uvedených bodech. Musíme v nich proto vyčíslit druhé derivace f_{xx} , f_{xy} a f_{yy} funkce $f(x, y)$. S výhodou k tomu použijeme vztahů (9.42), na něž opět aplikujeme řetězové pravidlo (všechny funkce závisí na proměnných x a y , které již nevyznačujeme):

$$G_{xx} = 2 - 2f_x^2 - 2ff_{xx} + yf_{xx} = 0,$$

$$G_{xy} = G_{yx} = -2f_x f_y - 2ff_{xy} + 1 + f_x + yf_{xy} = 0,$$

$$G_{yy} = 2 - 2f_y^2 - 2ff_{yy} + f_y + f_y + yf_{yy} = 0.$$

Nyní již stačí vyjádřit druhé parciální derivace funkce $z = f(x, y)$ postupně v obou stacionárních bodech. Uvážíme-li, že v nich funkce f_x a f_y nabývají nulové hodnoty, dostaneme

$$f_{xx}(a_1, b_1) = \frac{2}{2c_1 - b_1} = \frac{2}{8},$$

$$f_{xy}(a_1, b_1) = f_{yx}(a_1, b_1) = \frac{1}{2c_1 - b_1} = \frac{1}{8},$$

$$f_{yy}(a_1, b_1) = \frac{2}{2c_1 - b_1} = \frac{2}{8},$$

$$\begin{aligned}
 f_{xx}(a_2, b_2) &= \frac{2}{2c_2 - b_2} = -\frac{2}{8}, \\
 f_{xy}(a_2, b_2) &= f_{yx}(a_2, b_2) = \frac{1}{2c_2 - b_2} = -\frac{1}{8}, \\
 f_{yy}(a_2, b_2) &= \frac{2}{2c_2 - b_2} = -\frac{2}{8}.
 \end{aligned}$$

Matice kvadratické formy $\kappa(\xi, \eta)$ v bodech (a_1, b_1) , resp. (a_2, b_2) jsou

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{2}{8} \end{pmatrix}.$$

V bodě (a_1, b_1) se jedná o pozitivně definitní kvadratickou formu, proto má funkce $z = f(x, y)$ v tomto bodě ostré lokální minimum. V bodě (a_2, b_2) je forma negativně definitní a funkce $z = f(x, y)$ zde nabývá ostrého lokálního maxima.

Pozn.: Právě vypočtený příklad ukazuje, že geometrická představa není vždy všemocná. Ze zadání je jasné, že se jedná o rovnici kvadriky. Kvadrík je však vůči kartézské soustavě souřadnic v obecné poloze a těžko si ji dovedeme představit, natožpak určit body, které odpovídají lokálním extrémům. Kdo by se pokusil o její klasifikaci, také příliš neuspěje — narazí na velmi špatně schůdný výpočet charakteristických kořenů kvadratické formy $x^2 + y^2 - z^2 + xy + yz$. Výpočet pomocí parciálních derivací implicitní funkce vede naopak k nalezení lokálních extrémů velmi rychle.

Globální neboli absolutní extrémy

Dobrou představu o rozdílu mezi globálním a lokálním extrémem funkce dvou proměnných již máme díky obrázkům 9.31, 9.32 a komentáři k nim v úvodu tohoto odstavce. Kdybychom třeba definovali funkci $y = f(x, y)$ jako nadmořskou výšku v pohoří Krkonoše v závislosti na zeměpisné šířce x a délce y , byl by bodem, v němž funkce nabývá globálního maxima, bod určený zeměpisnými souřadnicemi vrcholu Sněžky — nejvyšší hory Krkonoš. Jeho nadmořská výška je $f(a_S, b_S) = 1602$ m. V bodě (a_{CH}, b_{CH}) určujícím zeměpisné souřadnice Černé hory by funkce $f(x, y)$ měla pouze lokální maximum $f(a_{CH}, b_{CH}) = 1299$ m. Globální extrém je jednoduše „největší z největších“, nebo „nejmenší z nejmenších“. Jistě jste si také v příkladech a na obrázcích všimli, že ani lokální, ani globální extrémy nemusí být nutně stacionárními body funkce. Na to je třeba myslet, abychom při jejich hledání některé možnosti nevynechali.

Pro jednoduchost si něco řekneme pouze o globálních extrémech funkce dvou proměnných.

Příklad 9.58: Globální extrémy

Vraťme se k funkci, jejíž graf je na obrázku 9.31,

$$f(x, y) = 100 - (x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \bar{K} = [-8, 4] \times [-8, 4].$$

Funkce je sice definovaná v celé euklidovské rovině \mathbf{R}^2 , při hledání extrémů se však omezíme na uzavřený čtverec \bar{K} . Nejprve najdeme stacionární body. Platí

$$f_x(x, y) = -2x, \quad f_y(x, y) = -2y, \quad f_{xx}(x, y) = -2, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -2.$$

Funkce má jediný stacionární bod $(a, b) = (0, 0)$ a v něm platí $\kappa(\xi, \eta) = -2\xi^2 - 2\eta^2$. Jde o negativně definitní kvadratickou formu, v bodě $(0, 0)$ má proto funkce ostré lokální maximum. Jeho hodnota je $f(0, 0) = 100$. Vzhledem k tomu, že funkce má dokonce v celé rovině \mathbf{R}^2 spojitě parciální derivace prvního a druhého řádu, nemá uvnitř čtverce \bar{K} , tj. na množině $K = (-8, 4) \times (-8, 4)$, žádné další lokální extrém (kdyby je měla, musely by to být stacionární body). Musíme se však ještě podívat, jakých hodnot nabývá na hranici čtverce \bar{K} . Ta je tvořena body $(-8, y)$, $(4, y)$, $(x, -8)$, $(x, 4)$, kde $-8 \leq x \leq 4$ a $-8 \leq y \leq 4$. Postupně dosadíme tyto body do funkčního předpisu:

$$\begin{aligned} g_1(y) &= f(-8, y) = 36 - y^2, & g_2(y) &= f(4, y) = 84 - y^2, \\ g_3(x) &= f(x, -8) = 36 - x^2, & g_4(x) &= f(x, 4) = 84 - x^2. \end{aligned}$$

Uvažujme třeba o funkci $g_1(y) = f(-8, y) = 36 - y^2$. Jejím stacionárním bodem (ostrým lokálním maximem) je bod $y = 0$, který leží v definičním intervalu proměnné y , $y \in [-8, 4]$. Funkční hodnota je $g_1(0) = 36$. Podobně zjistíme stacionární body funkcí $g_2(y)$ ($y = 0$, $g_2(0) = 84$), $g_3(x)$ ($x = 0$, $g_3(0) = 36$), $g_4(x)$ ($x = 0$, $g_4(0) = 84$). Nakonec zbývá prošetřit rohy čtverce \bar{K} . V nich platí $f(-8, -8) = -28$, $f(-8, 4) = 20$, $f(4, -8) = 20$, $f(4, 4) = 68$. Vidíme, že v (jediném) bodě $(-8, -8)$ nabývá funkce nejmenší ze všech hodnot na čtverci \bar{K} . Jedná se o ostré globální minimum. A jak jsme zjistili dříve, v bodě $(0, 0)$, který je zároveň stacionárním bodem, má funkce ostré globální maximum.

Definice globálních extrémů je jednoduchá. Vypadá velmi podobně jako definice lokálních extrémů. Porovnávání funkčních hodnot dané funkce s její hodnotou v bodě, v němž je extrém, však provádíme nikoli pouze na vhodných okolích tohoto bodu, nýbrž na celé množině, na níž globální extrém hledáme.

Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ je definována na množině D a nechť $M \subset D$. Řekneme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $(a, b) \in M$

- *globální neboli absolutní minimum*, jestliže pro všechny body $(x, y) \in M$ platí $f(x, y) \geq f(a, b)$,
- *ostré globální neboli absolutní minimum*, jestliže pro všechny body $(x, y) \in M$, $(x, y) \neq (a, b)$, platí $f(x, y) > f(a, b)$,
- *globální neboli absolutní maximum*, jestliže pro všechny body $(x, y) \in M$ platí $f(x, y) \leq f(a, b)$,
- *ostré globální neboli absolutní maximum*, jestliže pro všechny body $(x, y) \in M$, $(x, y) \neq (a, b)$, platí $f(x, y) < f(a, b)$.

A jak zjistíme, zda globální extrémů vůbec existují, a jak je najdeme? Záleží to také na tom, jaká je množina M . Je-li otevřená, nemusí na ní funkce globálních extrémálních hodnot vůbec nabývat. Ukážeme to na dvou příkladech.

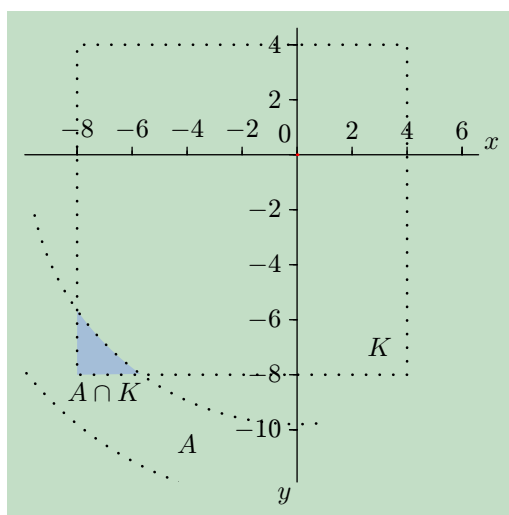
Příklad 9.59: Na otevřené množině M nemusí funkce mít globální extrém

Pro první ukázkou poslouží opět funkce $f(x, y) = 100 - (x^2 + y^2)$ na obrázku 9.31. Jako množinu M však

vezmeme pouze otevřený čtverec $K = (-8, 4) \times (-8, 4)$. Pro všechny body $(x, y) \in K$, $(x, y) \neq (0, 0)$, platí $f(x, y) < f(0, 0)$. V bodě $(0, 0)$ má funkce na množině K ostré globální maximum, $f(0, 0) = 1$. V příkladu 9.58 jsme viděli, že na uzavřeném čtverci \bar{K} měla funkce ostré globální minimum v bodě $(-8, -8)$, $f(-8, -8) = -28$. Tento bod ovšem nepatří do naší nynější množiny M , již je *otevřený* čtverec. Pro všechny body (x, y) množiny M platí $f(x, y) > -28$. Funkce hodnoty -28 nenabývá. Lze snadno ukázat, že se jí neomezeně blíží. Zvolíme-li totiž libovolně malé $\varepsilon > 0$, určitě najdeme v množině $M = K$ body, v nichž platí $|f(x, y) - (-28)| < \varepsilon$. Opravdu, dosadíme-li do této podmínky, vidíme, že takové body (x, y) vyhovují nerovnosti $|128 - x^2 - y^2| < \varepsilon$ a tvoří množinu

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 128 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 128 + \varepsilon\}.$$

Množina A je otevřená mezikružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrech $r = \sqrt{128 - \varepsilon}$ a $R = \sqrt{128 + \varepsilon}$. Současně však musí být $(x, y) \in K$. Množina bodů otevřeného obdélníka K , v nichž se hodnota funkce $f(x, y)$ liší od hodnoty -28 o méně než ε , je $A \cap K$, a vidíme ji na obrázku 9.35.



Obr. 9.35 K příkladu 9.59.

Dalším příkladem je funkce, která také na otevřené množině M nenabývá globálních extrémů, naopak dosahuje hodnot libovolně velkých, resp. libovolně malých. Zvolme například

$$z = f(x, y) = \frac{1}{xy}, \quad M = \{(x, y) \in (-2, 2) \times (-2, 2) \mid x \neq 0, y \neq 0\}.$$

Tato funkce je na otevřené množině M spojitá, a má tam dokonce spojitě parciální derivace všech řádů. Na množině M dosahuje jak libovolně velkých, tak libovolně malých hodnot, a proto na ní nemá žádný globální extrém. (Nemá ani extrémů lokálních, ani žádné stacionární body, ale to teď není podstatné.) Vyzkoušejme, zda umíme docílit toho, aby funkce $f(x, y)$ nabyla na M libovolně velké hodnoty $L > 0$. V takovém případě požadujeme, aby $\frac{1}{xy} = L$. Zvolme třeba $y = b = 1$. Pro x pak dostaneme podmínku $x = a = \frac{1}{L}$. Číslo a je kladné. (Samozřejmě musíme volit L tak velké, aby bod (a, b) ležel v množině M , tj. $-2 < \frac{1}{L} < 2 \Rightarrow L > \frac{1}{2}$.) Požadavkem $(a, b) \in M$ je volba čísla L omezená nějakou dolní mezí. To ale není problém — zajímáme se pouze o to, zda funkce může dosahovat větších a větších hodnot, a je nám dokonce jedno, v jakých bodech množiny M se to děje. Předchozím postupem jsme našli bod $(a, b) = (\frac{1}{L}, 1) \in M$, v němž funkce dosahuje libovolně velké

předem zvolené hodnoty L , omezené pouze zdola podmínkou $L > \frac{1}{2}$. Pokuste se podobnou úvahou dokázat, že na množině M dosáhne funkce i libovolné hodnoty $L < 0$, opět s nějakým omezením, tentokrát shora.

Jak ale budeme hledat globální extrémy obecně? A poznáme vůbec předem, zda existují? U některých typů funkcí a typů množin M je rozhodnutí o existenci docela snadné. Jedná se o situace, kdy funkce $f(x, y)$ je spojitá a množina M kompaktní (omezená a uzavřená). V takových případech nabývá funkce $f(x, y)$ na množině M s jistotou své nejmenší (globální minimum) i největší (globální maximum) hodnoty. Říká to „vícerozměrná“ Weierstrassova věta v prvním tvrzení věty 9.3.

Soustředíme se pro jednoduchost už jen na případ spojitě funkce na kompaktní množině. Předpokládejme, že funkce má třeba globální minimum v bodě (a, b) uvnitř množiny M , tj. na množině $\text{int } M$. Podle definice globálního minima platí pro každý bod $(x, y) \in M$ nerovnost $f(x, y) \geq f(a, b)$. Protože však je bod (a, b) bodem vnitřku množiny M , existuje takové jeho okolí $\mathcal{O}(a, b)$, které je v tomto vnitřku obsaženo (viz odstavec 9.1.2), tj. $\mathcal{O}(a, b) \subset \text{int } M \subset M$. Bod (a, b) proto vyhovuje i definici lokálního minima. Pokud bod, v němž má funkce globální minimum, není bodem vnitřku množiny M , pak musí být na její hranici. Stejně úvahy platí pro globální maximum. Postup hledání globálních extrémů je již jasný — nejprve najdeme lokální extrémy uvnitř množiny M , a pak prošetříme její hranici. Pro případy, kdy má funkce uvnitř množiny M spojitě parciální derivace do druhého řádu včetně, jsme postup hledání lokálních extrémů již důkladně popsali. A takové případy bývají v praktických situacích nejčastější.

Příklad 9.60: Na kompaktní množině M musí mít spojitá funkce globální extrémy

V úvodu tohoto odstavce jsme na obrázku 9.32 sledovali graf funkce $z = f(x, y) = 1000 - (x^4 + y^4) + 32(x^2 + y^2)$ na množině $M = \bar{K} = [-6, 5] \times [-5, 6]$. Také jsme z grafu, resp. jednoduchou úvahou vycházející z tvaru funkce zjistili její extrémy. Nyní provedeme příslušné výpočty, jak se sluší a patří. Nejprve najdeme lokální extrémy uvnitř množiny M , tj. na množině $\text{int } M = K = (-6, 5) \times (-5, 6)$. Platí

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 64x = -4x(x^2 - 16), \quad f_y(x, y) = -4y^3 + 64y = -4y(y^2 - 16),$$

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 + 64, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx} = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -12y^2 + 64.$$

Parciální derivace $f_x(x, y)$ nabývá nulové hodnoty pro $x = 0$, $x = 4$ a $x = -4$, parciální derivace $f_y(x, y)$ se anulují pro $y = 0$, $y = 4$ a $y = -4$. Stacionární body funkce $f(x, y)$ jsou

$$(-4, -4), \quad (-4, 0), \quad (-4, 4), \quad (0, -4), \quad (0, 0), \quad (0, 4), \quad (4, -4), \quad (4, 0), \quad (4, 4).$$

Funkční hodnoty v nich jsou

$$f(-4, -4) = f(-4, 4) = f(4, -4) = f(4, 4) = 1512,$$

$$f(-4, 0) = f(0, -4) = f(0, 4) = f(4, 0) = 1256, \quad f(0, 0) = 1000.$$

Hodnoty smíšených druhých derivací $f_{xy}(a, b)$ jsou nulové ve všech stacionárních bodech (dokonce jsou nulové obecně), a dále je

$$f_{xx}(-4, -4) = f_{xx}(-4, 4) = f_{xx}(4, -4) = f_{xx}(4, 4) = f_{xx}(-4, 0) = f_{xx}(4, 0) = -128,$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(0, 0) &= f_{xx}(0, -4) = f_{xx}(0, 4) = 64, \\ f_{yy}(-4, -4) &= f_{yy}(-4, 4) = f_{yy}(4, -4) = f_{yy}(4, 4) = f_{yy}(0, -4) = f_{yy}(0, 4) = -128, \\ f_{yy}(0, 0) &= f_{yy}(-4, 0) = f_{yy}(4, 0) = 64. \end{aligned}$$

Podle kvadratické formy $\kappa(\xi, \eta)$ se pokusíme rozhodnout, o jaké stacionární body se jedná. Jak víme z věty 9.9, může se to podařit, ale nemusí.

- Body $(-4, -4)$, $(-4, 4)$, $(4, -4)$, $(4, 4)$:
 $\kappa(\xi, \eta) = -128\xi^2 - 128\eta^2$, forma je negativně definitní a v těchto bodech má funkce ostrá lokální maxima.
- Body $(-4, 0)$, $(4, 0)$, resp. $(0, -4)$, $(0, 4)$:
 $\kappa(\xi, \eta) = -128\xi^2 + 64\eta^2$, resp. $\kappa(\xi, \eta) = 64\xi^2 - 128\eta^2$, forma je v obou případech indefinitní a v uvedených bodech extrém nenastává.
- Bod $(0, 0)$:
 $\kappa(\xi, \eta) = 64\xi^2 + 64\eta^2$, jedná se o pozitivně definitní kvadratickou formu, ve stacionárním bodě $(0, 0)$ má funkce ostré lokální, nikoli však globální minimum (zdůvodněte).

Zbývá prošetřit hranici množiny M , která je sjednocením stran čtverce $\overline{K} = [-6, 5] \times [-5, 6]$, tj.

$$hM = \{(-6, y) \mid -5 \leq y \leq 6\} \cup \{(x, -5) \mid -6 \leq x \leq 5\} \cup \{(5, y) \mid -5 \leq y \leq 6\} \cup \{(x, 6) \mid -6 \leq x \leq 5\}.$$

Postupně vyčíslíme funkci $f(x, y)$ na jednotlivých stranách čtverce:

- Množina $\{(-6, y) \mid -5 \leq y \leq 6\}$:
 $g_1(y) = f(-6, y) = 1000 - [(-6)^4 + y^4] + 32[(-6)^2 + y^2] = 856 - y^4 + 32y^2$, $g_1'(y) = -4y(y^2 - 16)$,
stacionární body funkce $g_1(y)$ jsou $y = 0$, $y = -4$, $y = 4$, odpovídající hodnoty funkce $f(x, y)$ na této části hranice jsou $f(-6, -4) = 1112$, $f(-6, 0) = 856$, $f(-6, 4) = 1112$, v bodech $(-6, -5)$ a $(-6, 6)$ je $f(-6, -5) = 1031$, $f(-6, 6) = 712$.
- Množina $\{(x, -5) \mid -6 \leq x \leq 5\}$:
 $h_1(x) = f(x, -5) = 1000 - [x^4 + (-5)^4] + 32[x^2 + (-5)^2] = 1175 - x^4 + 32x^2$, $h_1'(x) = -4x(x^2 - 16)$,
stacionární body funkce $h_1(x)$ jsou $x = 0$, $x = -4$, $x = 4$, odpovídající hodnoty funkce $f(x, y)$ na této části hranice jsou $f(-4, -5) = 1431$, $f(0, -5) = 1175$, $f(4, -5) = 1431$, v bodě $(5, -5)$ je $f(5, -5) = 1350$.
- Množina $\{(5, y) \mid -5 \leq y \leq 6\}$:
 $g_2(y) = f(5, y) = 1000 - [5^4 + y^4] + 32[5^2 + y^2] = 1175 - y^4 + 32y^2$, $g_2'(y) = -4y(y^2 - 16)$,
stacionární body funkce $g_2(y)$ jsou $y = 0$, $y = -4$, $y = 4$, odpovídající hodnoty funkce $f(x, y)$ na této části hranice jsou $f(5, -4) = 1431$, $f(5, 0) = 1175$, $f(5, 4) = 1431$, v bodě $(5, 6)$ je $f(5, 6) = 1031$.
- Množina $\{(x, 6) \mid -6 \leq x \leq 5\}$:
 $h_2(x) = f(x, 6) = 1000 - [x^4 + 6^4] + 32[x^2 + 6^2] = 856 - x^4 + 32x^2$, $h_2'(x) = -4x(x^2 - 16)$,
stacionární body funkce $h_2(x)$ jsou $x = 0$, $x = -4$, $x = 4$, odpovídající hodnoty funkce $f(x, y)$ na této části hranice jsou $f(-4, 6) = 1112$, $f(0, 6) = 856$, $f(4, 6) = 1112$.

Z předchozích výpočtů je vidět, že své největší hodnoty $f_{\max} = 1521$ na množině M nabývá funkce $f(x, y)$ hned ve čtyřech bodech $(-4, -4)$, $(-4, 4)$, $(4, -4)$ a $(4, 4)$. Jsou to stacionární body, které se nám již před chvílí podařilo klasifikovat jako ostrá lokální maxima. Teď vidíme, že v nich má funkce i globální maximum. Své nejnižší hodnoty $f_{\min} = 712$ na množině M nabývá funkce v jediném jejím bodě $(-6, 6)$.

Obecně nemusí být prošetřování globálních extrémů vůbec jednoduché. Závisí to, jak jsme si již řekli, jak na tvaru funkce $f(x, y)$, tak na volbě množiny M . Pokud by třeba funkce neměla potřebné parciální derivace, těžko by se nám hledaly lokální extrémy — viděli jsme to

u Riemannovy funkce v příkladu 9.53. Podobně obtížné je vyšetřování globálních extrémů na množině M , když třeba není kompaktní. S takovými „divokými“ případy se však v praxi příliš neseťkáme, a proto nám stačí postupy hledání extrémů, které jsme si zatím vysvětlili.

Něco málo o vázaných extrémech

Vraťme se k obrázku 9.31, na němž jsme zkoumali graf funkce $z = f(x, y) = 100 - (x^2 + y^2)$. Konstatovali jsme, že v bodě $(2, 0)$ má funkce vázané ostré lokální maximum vzhledem k množině $A = \{(2, y) \mid y \in [-8, 4]\}$. Jak jsme na to přišli a co je to vůbec vázaný extrém? Vázaný extrém funkce znamená, že nehledáme extrémy funkce na celém jejím definičním oboru, ale pouze na nějaké jeho podmnožině. Pro funkci $f(x, y) = 100 - (x^2 + y^2)$ a množinu A to znamená, že zkoumáme hodnoty funkce pouze v těch bodech oboru $\bar{K} = [-8, 4] \times [-8, 4]$, jejichž x -ová souřadnice je $a = 2$. Funkce v těchto bodech nabývá hodnot $g(y) = 100 - (2^2 + y^2) = 96 - y^2$. Grafem funkce $g(y)$ je křivka, která vznikne řezem grafu funkce $f(x, y)$ rovinou kolmou k půdorysně a obsahující přímkou o rovnici $x = a = 2$. Extrémy funkce $g(y)$ můžeme vyšetřit podle pravidel pro funkci jedné proměnné. Platí $g'(y) = -2y$, $g''(y) = -2$. V bodě $b = 0$ má funkce $g(y)$ ostré lokální maximum. Funkce $f(x, y)$ má proto v bodě $(a, b) = (2, 0)$ ostré lokální maximum „vázané“ na množinu A , neboli *vzhledem k množině A* . Nabývá v něm hodnoty $f(2, 0) = 96$.

Situace ovšem není vždy takto jednoduchá. Množinou A v našem příkladu byla úsečka. Co když to ale bude nějaká obecná křivka? Zase si s tím poradíme.

Příklad 9.61: Vázané extrémy funkce dvou proměnných vzhledem ke křivce

Uvažujme stále o jednoduché funkci $z = f(x, y) = 100 - (x^2 + y^2)$, její vázané extrémy však budeme hledat vzhledem k množině $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 - 9 = 0\}$. Je to kružnice se středem v bodě $(-1, 0)$ a poloměrem $r = 3$. Tu můžeme parametrizovat a vyčíslit na ní hodnoty funkce $f(x, y)$ v závislosti na parametru,

$$x = -1 + 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad g(t) = f(-1 + 3 \cos t, 3 \sin t) = 90 + 6 \cos t.$$

Vidíme, že tato funkce parametru t nabývá největší hodnoty pro $t = 0$ a nejmenší pro $t = \pi$, $g(0) = 96$, $g(\pi) = 84$. Můžeme to ještě ověřit vyšetřením průběhu funkce $g(t)$. Platí $g'(t) = -6 \sin t$, $g''(t) = -6 \cos t$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = -6$, $g'(\pi) = 0$, $g''(\pi) = 6$. V bodě $t = 0$ má funkce $g(t)$ ostré lokální maximum, v bodě $t = \pi$ pak ostré lokální minimum.

Ale co když je křivka zadaná kartézskou rovnicí $h(x, y) = 0$ a není jen tak snadné ji parametrizovat, jako se to podařilo s kružnicí $h(x, y) = (x+1)^2 + y^2 - 9 = 0$ v předchozím příkladu? K zodpovězení této otázky nám opět pomůže geometrická úvaha. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ a $h(x, y)$ mají na nějaké otevřené množině D parciální derivace, které jsou spojité. Body $(x, y, f(x, y)) \in G_f$, jejichž půdorysné průměty (x, y) (průměty do souřadnicové roviny xy) leží na křivce \mathcal{C}_h o rovnici $h(x, y) = 0$, vytvoří na grafu funkce $f(x, y)$ rovněž nějakou křivku \mathcal{C} . Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $(a, b) \in D$, který zároveň leží na křivce \mathcal{C}_h , vázaný lokální extrém, musí být tečna ke křivce \mathcal{C} v bodě $(a, b, f(a, b))$ rovnoběžná s půdorysnou a současně

s tečnou ke křivce \mathcal{C}_h v bodě (a, b) , která v půdorysně přímo leží. Označíme-li jednotkový směrový vektor této tečny $\vec{s} = (s_x, s_y)$, je zřejmé, že derivace funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) ve směru \vec{s} je nulová,

$$\partial_{\vec{s}} f(a, b) = f_x(a, b)s_x + f_y(a, b)s_y = 0, \implies \vec{s} \perp \text{grad } f(a, b),$$

vektor \vec{s} je kolmý ke gradientu funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) . Současně je však kolmý i ke gradientu funkce $h(x, y)$ v bodě (a, b) , neboť je tečný ke křivce \mathcal{C}_h . Proč je tomu tak? Protože křivka \mathcal{C}_h je vrstevnicí funkce $h(x, y)$ (hodnota funkce $h(x, y)$ je podél ní nulová, tedy konstantní). Dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{s} \perp \text{grad } f(a, b), \quad \vec{s} \perp \text{grad } h(a, b) &\implies \text{grad } f(a, b) \parallel \text{grad } h(a, b) \implies \\ \text{grad } f(a, b) &= \lambda \text{grad } h(a, b), \end{aligned} \quad (9.43)$$

kde λ je konstanta zvaná *Lagrangeův multiplikátor*. Gradient funkce $f(x, y)$ v bodě vázaného extrému je násobkem gradientu funkce $h(x, y)$ v tomto bodě. Vztah (9.43) představuje nutnou podmínku *vázaného extrému funkce $f(x, y)$ vzhledem k množině $A = \{(x, y) \in D \mid h(x, y) = 0\}$* . Tato podmínka přepsaná do tvaru

$$f_x(a, b) - \lambda h_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) - \lambda h_y(a, b) = 0 \quad (9.44)$$

znamená nutnou podmínku lokálního extrému funkce $\phi(x, y) = f(x, y) - \lambda h(x, y)$, na niž již žádná vazební podmínka není kladena. Problém nalezení vázaného extrému funkce $f(x, y)$ jsme převedli na problém nalezení nevázaného extrému jiné funkce. Vztahy (9.44) spolu s vazební podmínkou $h(x, y) = 0$ představují soustavu tří rovnic pro neznámé souřadnice možného vázaného extrému a a b a Lagrangeův multiplikátor λ . Postup nalezení vázaných extrémů, který jsme právě popsali, se nazývá *metoda Lagrangeových multiplikátorů*. Zkusíme ji aplikovat na zadání příkladu 9.61.

Příklad 9.62: Když je vazební podmínka zadána implicitně

Pro zadání příkladu 9.61 platí

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 100 - (x^2 + y^2), \quad h(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 - 9 = 0, \\ \text{grad } f(x, y) &= (-2x, -2y), \quad \text{grad } h(x, y) = (2(x + 1), 2y). \end{aligned}$$

Funkce, jejíž nevázané extrémy hledáme, je

$$\phi(x, y) = 100 - (x^2 + y^2) - \lambda [(x + 1)^2 + y^2 - 9].$$

Rovnice pro extrém (obecně stacionární bod) a Lagrangeův multiplikátor jsou

$$-2x - 2\lambda(x + 1) = 0, \quad -2y - 2\lambda y = 0, \quad (x + 1)^2 + y^2 - 9 = 0.$$

Mají dvě řešení $(a, b) = (-4, 0)$, $\lambda = -\frac{4}{3}$, a $(a, b) = (2, 0)$, $\lambda = -\frac{2}{3}$. V bodě $(-4, 0)$ nabývá funkce $f(x, y)$ vzhledem k množině A své nejmenší hodnoty $f(-4, 0) = 84$ (ostré lokální minimum), v bodě $(2, 0)$ pak své největší hodnoty $f(2, 0) = 96$ vzhledem k množině A (ostré lokální maximum).

V následujících příkladech se budeme snažit předchozí výsledek získaný v příkladu 9.62 postupně zobecnit na hledání vázaných extrémů funkce n proměnných vzhledem k obecné k -rozměrné množině. Nejprve však musíme pojem vázaného extrému pořádně definovat.

Řekneme, že funkce $z = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ definovaná na množině D má v bodě $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ vzhledem k množině $A \subset D$

- *lokální minimum*, jestliže existuje takové okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a , že pro všechny body $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{O}(a) \cap A$ platí $f(x) \geq f(a)$,
- *ostré lokální minimum*, jestliže existuje takové okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a , že pro všechny body $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{O}(a) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) > f(a)$,
- *lokální maximum*, jestliže existuje takové okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a , že pro všechny body $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{O}(a) \cap A$ platí $f(x) \leq f(a)$,
- *ostré lokální maximum*, jestliže existuje takové okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a , že pro všechny body $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{O}(a) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) < f(a)$.

Další úvahy a příklady se budou týkat pouze praktických situací vyznačujících se tím, že studované funkce budou mít spojité parciální derivace do potřebného řádu, přinejmenším prvního.

Příklad 9.63: O dimenzi výš

Postupme oproti příkladu 9.62 „o dimenzi výš“. Hledejme extrémy funkce tří proměnných $w = f(x, y, z)$, definované na otevřené množině D , vzhledem k množině $A \subset D$, která je zadána jednou implicitní rovnicí $h(x, y, z) = 0$. O funkci $h(x, y, z)$ přitom předpokládejme, že je definována také na množině D . $A = \{(x, y, z) \in D \mid h(x, y, z) = 0\}$ je tedy množinou konstantní (konkrétně nulové) funkční hodnoty funkce $w = h(x, y, z)$. Mohli bychom ji nazvat „nulovou vrstevnicí“. Předpokládejme, že v každém bodě definičního oboru D funkce $h(x, y, z)$ je alespoň jedna z parciálních derivací $h_x(x, y, z)$, $h_y(x, y, z)$, $h_z(x, y, z)$ nenulová, takže hodnota Jacobiho matice zobrazení $h : D \rightarrow \mathbf{R}$ je rovna jedné. Tento požadavek také zaručuje, že gradient funkce $h(x, y, z)$ je vždy nenulový vektor. Množinou A je určitá plocha v \mathbf{R}^3 a vektor $\text{grad } h$ je k ní v každém jejím bodě kolmý (viz odstavec 9.2.4, popřípadě příklad 9.46 pro křivku v \mathbf{R}^2). Plochu A můžeme vyjádřit také parametricky. Při praktickém počítání to nebudeme dělat, nyní to však napomůže naší představě. Parametry označme podobně jako v kapitole 5 u a v ,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Funkce $w = f(x, y, z)$ nabývá na množině A hodnot

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

takže lokální extrémy funkce $f(x, y, z)$ vzhledem k množině A jsou lokální extrémy funkce $F(u, v)$. Označme (a, b, c) bod lokálního extrému funkce $f(x, y, z)$ vzhledem k množině A a (u_0, v_0) hodnoty parametrů, které tomuto bodu odpovídají, tj. $a = x(u_0, v_0)$, $b = y(u_0, v_0)$, $c = z(u_0, v_0)$. Pak můžeme psát nutnou podmínku lokálního extrému ve tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = 0, \quad (9.45)$$

příčměž parciální derivace funkce $f(x, y, z)$ podle proměnných x, y a z se vyčíslují v bodě (a, b, c) a parciální derivace funkcí $x(u, v)$, $y(u, v)$ a $z(u, v)$ v bodě (u_0, v_0) . Označme

$$\vec{\tau}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}, \quad \vec{\tau}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}.$$

Tyto vektory jsou tečné k ploše A , takže jsou kolmé ke gradientu funkce $h(x, y, z)$. Zároveň však ze vztahů (9.45) vidíme, že jsou kolmé i ke gradientu funkce $f(x, y, z)$, neboť jejich skalární součiny s gradientem funkce $f(x, y, z)$ jsou nulové. Znamená to, že vektory $\text{grad } f(x, y, z)$ a $\text{grad } h(x, y, z)$ jsou v bodě (a, b, c) , v němž má předpokladu funkce $f(x, y, z)$ lokální extrém vzhledem k množině A , rovnoběžné. Existuje tedy číslo λ tak, že platí $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{grad } h(x, y, z)$ pro $(x, y, z) = (a, b, c)$. Jako nutnou podmínku vázaného extrému tak dostáváme opět vztahy (9.43) a (9.44), jenže pro funkci tří proměnných.

Příklad 9.64: Co když množinou A bude křivka?

Setrvejme u funkce tří proměnných $w = f(x, y, z)$ definované na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^3$, ale v roli množiny A si představme nějakou křivku. Konkrétně ji zadejme jako průsečnici dvou ploch A_1 a A_2 o rovnicích $h_1(x, y, z) = 0$ a $h_2(x, y, z) = 0$. Předpokládejme zase, že funkce $h_1(x, y, z)$ a $h_2(x, y, z)$ jsou zadány také na otevřené množině D a že Jacobiho matice zobrazení $h : D \ni (x, y, z) \rightarrow (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z)) \in \mathbf{R}^2$ má v každém bodě definičního oboru D hodnotu 2, tj. maximální možnou. Geometricky to znamená, že gradienty funkcí $h_1(x, y, z)$ a $h_2(x, y, z)$ jsou v každém bodě definičního oboru D nejen nenulové, ale dokonce lineárně nezávislé. Proč je takový požadavek potřebný? Pokud se plochy A_1 a A_2 protínají v křivce, je směr jejího tečného vektoru v každém bodě dán vektorovým součinem $\text{grad } h_1 \times \text{grad } h_2$. Situaci pro plochy

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0\}, \\ A_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z = 0\}, \\ A &= A_1 \cap A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2, z = 1\} \end{aligned} \quad (9.46)$$

znázorňuje obrázek 9.36. Křivkou, v níž se plochy A_1 a A_2 protínají, je kružnice o poloměru $\sqrt{2}$, která leží v rovině $z = 1$ a má střed na ose z . Pro názornost jsou na obrázku v bodě $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ zakresleny jednotkové vektory \vec{g}_1 a \vec{g}_2 ve směru gradientů funkcí $h_1(x, y, z)$ a $h_2(x, y, z)$ a jednotkový vektor \vec{s} ve směru jejich vektorového součinu. Platí

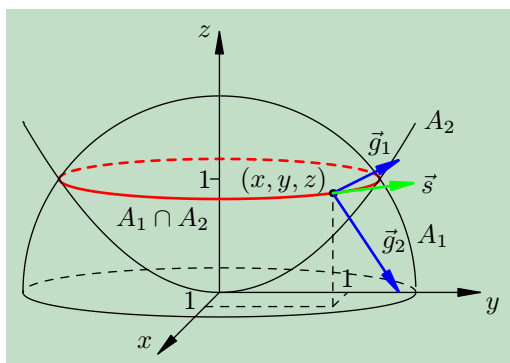
$$\vec{G}_1 = \text{grad } h_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z), \quad \vec{G}_2 = \text{grad } h_2(x, y, z) = (2x, 2y, -2),$$

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{G}_1}{|\vec{G}_1|}, \quad \vec{g}_2 = \frac{\vec{G}_2}{|\vec{G}_2|}, \quad \vec{s} = \frac{\vec{G}_1 \times \vec{G}_2}{|\vec{G}_1 \times \vec{G}_2|},$$

pro $z = 1$ a $x^2 + y^2 = 2$ je

$$\vec{G}_1 \times \vec{G}_2 = (-8y, 8x, 0) \implies \vec{s} = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right) = \left(-\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Kdyby vektory $\vec{G}_1 = \text{grad } h_1$ a $\vec{G}_2 = \text{grad } h_2$ byly lineárně závislé, byl by jejich vektorový součin nulový a nedefinoval by tečný vektor křivky. Předpokládejme, že průsečnice ploch A_1 a A_2 má parametrické vyjádření $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Na této průsečnici nabývá funkce $f(x, y, z)$ hodnot $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$.



Obr. 9.36 Křivka jako průsečnice dvou ploch.

Nutná podmínka lokálního extrému funkce $f(x, y, z)$ v bodě $(a, b, c) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ vzhledem k množině A je

$$F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} \dot{x}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b,c)} \dot{y}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} \dot{z}(t_0) = 0.$$

Z předchozí podmínky plyne, že tečný vektor $\vec{\tau} = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$ je kolmý ke gradientu funkce $f(x, y, z)$ v bodě (a, b, c) . Současně ale víme, že je kolmý i ke gradientům funkcí $h_1(x, y, z)$ a $h_2(x, y, z)$ v tomto bodě. Vektory $\text{grad } f(a, b, c)$, $\text{grad } h_1(a, b, c)$ a $\text{grad } h_2(a, b, c)$ jsou tím pádem rovnoběžné s toutéž rovinou, kolmou na vektor $\vec{\tau}$. Vektor $\text{grad } f(a, b, c)$ tak můžeme napsat jako lineární kombinaci vektorů $\text{grad } h_1(a, b, c)$ a $\text{grad } h_2(a, b, c)$,

$$\text{grad } f(a, b, c) = \lambda_1 \text{grad } h_1(a, b, c) + \lambda_2 \text{grad } h_2(a, b, c).$$

Jak lze tušit, nazývají se čísla λ_1 a λ_2 *Lagrangeovy multiplikátory*. Namísto vázaných extrémů funkce $f(x, y, z)$ tak hledáme (nevázané) extrémy funkce

$$\phi(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda_1 h_1(x, y, z) - \lambda_2 h_2(x, y, z). \quad (9.47)$$

Řešíme soustavu rovnic

$$\phi_x(x, y, z) = 0, \quad \phi_y(x, y, z) = 0, \quad \phi_z(x, y, z) = 0, \quad h_1(x, y, z) = 0, \quad h_2(x, y, z) = 0$$

pro neznámé a, b, c (souřadnice možného extrému) a λ_1, λ_2 (Lagrangeovy multiplikátory).

Vyzkoušejme metodu Lagrangeových multiplikátorů v konkrétní situaci. Budeme hledat možné extrémy třeba u funkce $w = f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ na množině (9.46). Můžeme je totiž snadno najít i jinak a tak funkčnost nové metody prověřit. Množinu A (kružnici) popsanou vztahem (9.46) můžeme parametrizovat velmi snadno. Snadno také získáme funkci $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Platí

$$x(t) = \sqrt{2} \cos t, \quad y(t) = \sqrt{2} \sin t, \quad z(t) = 1, \quad t \in [0, 2\pi),$$

$$F(t) = 2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t + 1 = 2 \cos 2t + 1, \quad F'(t) = -4 \sin 2t, \quad F'' = -8 \cos 2t.$$

Derivace funkce $F(t)$ se anulují v bodech $t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \pi, t_4 = \frac{3\pi}{2}$. Hodnoty funkce $F(t)$ a její druhé derivace v těchto bodech jsou

$$F(t_1) = 3, \quad F(t_2) = -1, \quad F(t_3) = 3, \quad F(t_4) = -1,$$

$$F''(t_1) = -8, \quad F''(t_2) = 8, \quad F''(t_3) = -8, \quad F''(t_4) = 8.$$

Vzhledem k množině A má funkce extrémy v bodech $(a_j, b_j, c_j) = (\sqrt{2} \cos t_j, \sqrt{2} \sin t_j, 1)$, $t_j = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

$t_1 = 0,$	$(a_1, b_1, c_1) = (\sqrt{2}, 0, 1),$	ostré lokální maximum,
$t_2 = \frac{\pi}{2},$	$(a_2, b_2, c_2) = (0, \sqrt{2}, 1),$	ostré lokální minimum,
$t_3 = \pi,$	$(a_3, b_3, c_3) = (-\sqrt{2}, 0, 1),$	ostré lokální maximum,
$t_4 = \frac{3\pi}{2},$	$(a_4, b_4, c_4) = (0, -\sqrt{2}, 1),$	ostré lokální minimum.

A teď metoda Lagrangeových multiplikátorů. Funkce $\phi(x, y, z)$ (vztah (9.47)) má tvar

$$\phi(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2) - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 3) - \lambda_2(x^2 + y^2 - 2z).$$

Její parciální derivace jsou

$$\phi_x = 2x(1 - \lambda_1 - \lambda_2), \quad \phi_y = -2y(1 + \lambda_1 + \lambda_2), \quad \phi_z = 2(z - \lambda_1 z + \lambda_2).$$

Jejich anulováním a připojením rovnic množiny A dostaneme soustavu rovnic pro souřadnice možných extrémů a Lagrangeovy multiplikátory,

$$\begin{aligned} 2x(1 - \lambda_1 - \lambda_2) &= 0, \\ -2y(1 + \lambda_1 + \lambda_2) &= 0, \\ 2(z - \lambda_1 z + \lambda_2) &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Řešení této soustavy je také snadné a je shodné s výsledky, které jsme získali pomocí parametrického vyjádření množiny A . Pro body $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$ vyjdou hodnoty Lagrangeových multiplikátorů $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1$, pro body $(\pm\sqrt{2}, 0, 1)$ pak $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 0$.

Nyní můžeme získané názorné závěry o Lagrangeových multiplikátorech zobecnit ve větě.

Věta 9.10 (O Lagrangeových multipliktorech): *Nechť na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ je definováno k funkcí $h_j : D \ni x \rightarrow h_j(x) \in \mathbf{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq j \leq k$, které mají na D spojité parciální derivace prvního řádu, a necht' hodnota Jacobiho matice zobrazení*

$$h : D \ni x \longrightarrow h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x)) \in \mathbf{R}^k,$$

$$Dh(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_n(x)}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial h_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (9.48)$$

je k ve všech bodech definičního oboru D . Označme $A \subset D$ množinu, jejíž body vyhovují rovnicím $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$. Dále předpokládejme, že na množině D je zadána funkce $f(x)$, která zde rovněž má spojité parciální derivace prvního řádu. Je-li bod $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ lokálním extrémem funkce $f(x)$ vzhledem k množině A , pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tak, že funkce

$$\phi : D \ni x \longrightarrow \phi(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k \lambda_j h_j(x) \quad (9.49)$$

má v bodě a stacionární bod, tj.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i} = 0. \quad (9.50)$$

Abychom ukázali podstatu věty, stačí sledovat předchozí úvahy vedené v prostorech s nižší dimenzí, kde jsme měli k dispozici i nějakou geometrickou představu nebo dokonce obrázek. Teď se sice o nic takového přímo opřít nemůžeme, budeme však pracovat s analogiemi a samozřejmě s korektními výpočty.

Bude se nám hodit trocha algebry a také pojem tečného prostoru k euklidovskému prostoru \mathbf{R}^n v jeho obecném bodě, který jsme zavedli v odstavci 9.2.3. Stručné připomenutí — tečný prostor $T_x \mathbf{R}^n$ je n -rozměrným vektorovým prostorem vázaných vektorů umístěných v bodě $x \in \mathbf{R}^n$.

Všechny gradienty funkcí $h_1(x)$ až $h_k(x)$ v bodě x jsou samozřejmě prvky tohoto tečného prostoru. Uvědomíme-li si, že sloupce Jacobiho matice (9.48) jsou tvořeny složkami těchto gradientů, je požadavek maximální hodnosti matice $Dh(x)$ geometricky jasný — chceme, aby gradienty byly lineárně nezávislé. Vektorový podprostor $L(h) = [\text{grad } h_1(x), \dots, \text{grad } h_k(x)] \subset T_x \mathbf{R}^n$ tečného prostoru, generovaný právě těmito gradienty, je proto k -rozměrný. Jako obvykle také předpokládáme, že v tečných prostorech $T_x \mathbf{R}^n$ je zaveden standardní skalární součin, tj. pro libovolné vázané vektory $\xi, \eta \in T_x \mathbf{R}^n$, jejichž složky ve standardní bázi tečného prostoru jsou $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, resp. $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, platí $(\xi, \eta) = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n$. Máme-li ovšem tečný prostor vybavený skalárním součinem, můžeme k podprostoru L_h definovat ortogonální doplněk $L(h)_\perp$ (viz odstavec 6.1.3). Jeho dimenze je $n - k$.

Přemýšlejme teď o významu rovnosti $h(x) = 0$, tj. $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$, jíž je ve větě 9.10 definována množina A . Uvažujme třeba o množině

$$A_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in D \mid h_1(x) = h_1(x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

která je „nulovou vrstevnicí“ funkce $h_1(x)$. Stejně jako v nízkorozměrných situacích si představme její parametrické vyjádření,

$$x_1 = x_{11}(t_1, \dots, t_{n-1}), \quad \dots, \quad x_n = x_{1n}(t_1, \dots, t_{n-1}),$$

kde $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ jsou parametry. První index v parametrických rovnicích je shodný s indexem funkce $h_1(x)$, druhý čísluje jednotlivé rovnice. Pro každý bod $x \in A_1$ zadaný předchozími parametrickými rovnicemi označme vektory

$$\sigma_{11}(x) = \left(\frac{\partial x_{11}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x_{1n}}{\partial t_1} \right), \quad \dots, \quad \sigma_{1,n-1}(x) = \left(\frac{\partial x_{11}}{\partial t_{n-1}}, \dots, \frac{\partial x_{1n}}{\partial t_{n-1}} \right).$$

Jak víme, je význam vrstevnice takový, že podél žádného z vektorů z vektorového podprostoru $L_1 \subset T_x \mathbf{R}^n$ generovaného vektory σ_{11} až $\sigma_{1,n-1}$ se hodnota funkce $h_1(x)$ nemění. Parciální derivace složené funkce

$$F_1(t) = F_1(t_1, \dots, t_{n-1}) = h_1(x_{11}(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, x_{1n}(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

podle všech proměnných t_1 až t_{n-1} jsou proto nulové,

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_j} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_{11}}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_{1n}}{\partial t_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq n - 1.$$

Parciální derivace funkce $h_1(x)$ jsou brány v bodě $x = (x_{11}(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, x_{1n}(t_1, \dots, t_{n-1}))$. Všimněte si významu získaných rovností: Skalární součin každého z vektorů $\sigma_{1j}(x)$ s gradientem funkce $h_1(x)$ je nulový, takže $(n - 1)$ -rozměrný vektorový podprostor L_1 je v tečném prostoru $T_x \mathbf{R}^n$ ortogonálním doplňkem jednorozměrného vektorového prostoru $[\text{grad } h_1(x)]$, generovaného gradientem funkce $h_1(x)$. Nazveme-li vektory $\sigma_{11}(x)$ až $\sigma_{1,n-1}(x)$ *tečnými* k množině A_1 a

L_1 tečným prostorem k A_1 bodě x , bude to jistě odpovídat geometrické interpretaci, na kterou jsme zvyklí z méněrozměrných situací.

Stejnou úvahu můžeme pochopitelně provést i pro funkce $h_2(x)$ až $h_k(x)$. Můžeme již jednoduše učinit důležitý závěr: Vektorový podprostor $L_1 \cap \dots \cap L_k$ je ortogonálním doplňkem vektorového podprostoru $L(h)$ generovaného všemi gradienty zobrazení $h(x)$, tj.

$$L(h)_\perp = L_1 \cap \dots \cap L_k.$$

Získali jsme tak tečný prostor $T_x A \subset T_x \mathbf{R}^n$ k množině $A = A_1 \cap \dots \cap A_k$.

Zbývá dokončit úvahu o extrémech funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ vzhledem k množině A . Budeme k ní potřebovat směrovou derivaci a gradient funkce n proměnných (viz vztahy (9.30) a (9.31)). Dejme tomu, že v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ má funkce jeden z takových extrémů. Pak je její derivace ve směru kteréhokoli (jednotkového) vektoru $s = (s_1, \dots, s_n)$ ležícího v tečném prostoru $T_a A = L(h)_\perp$ v bodě a k množině A nulová, tj.

$$\partial_s f(a) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_a s_1 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_a s_n = 0.$$

Předchozí výraz je však současně skalárním součinem gradientu funkce $f(x)$ s vektorem s . Znamená to, že vektory $\text{grad } f(x)$ a s jsou ortogonální. Gradient funkce $f(x)$ proto leží v prostoru $L(h)$ a je lineární kombinací gradientů $\text{grad } h_1(x)$ až $\text{grad } h_k(x)$. Označíme-li koeficienty této lineární kombinace λ_1 až λ_k , dostáváme vztah (9.50).

Všimli jste si zajímavé věci ve větě 9.10? Z předpokladu, že bod $a \in A$ je lokálním extrémem funkce $f(x)$ vzhledem k množině A , vyplývá pouze to, že je stacionárním bodem funkce $\phi(x)$. Znamená to, že nemusí být jejím extrémem? Je tomu skutečně tak — nemusí. Ukážeme si to na jednoduchém příkladu.

Příklad 9.65: Kdy je stacionární bod vázaným extrémem?

Na obrázku 9.37 je graf funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$, připomínající sedlo. Hledejme vázané extrémy funkce $f(x, y)$ pro případ, kdy „vazební množinou“ je obecná přímka $h(x, y) = Ax + By + C = 0$. Sestavíme funkci $\phi(x, y)$ a najdeme její stacionární body:

$$\phi(x, y) = x^2 - y^2 - \lambda(Ax + By + C), \quad \phi_x(x, y) = 2x - \lambda A = 0, \quad \phi_y(x, y) = -2y - \lambda B = 0 \implies x = \frac{\lambda A}{2}, \quad y = -\frac{\lambda B}{2}.$$

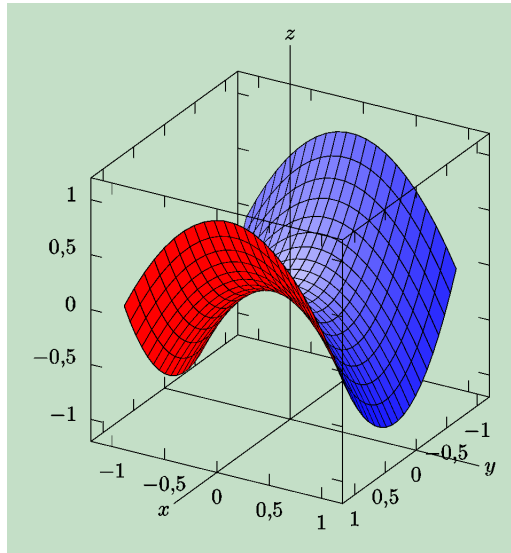
Dosažením x a y do rovnice vazby získáme hodnotu λ a polohu stacionárního bodu (a, b) :

$$\frac{\lambda A^2}{2} - \frac{\lambda B^2}{2} + C = 0 \implies \lambda = \frac{2C}{B^2 - A^2}, \quad a = \frac{AC}{B^2 - A^2}, \quad b = -\frac{BC}{B^2 - A^2},$$

$$(a, b) = \left(\frac{AC}{B^2 - A^2}, -\frac{BC}{B^2 - A^2} \right).$$

(Případ vazební přímky $y = \pm x + k$, tj. $A^2 = B^2$, je nutné řešit zvlášť. Ještě se k němu vrátíme.) Nyní vypočteme druhé derivace, pomocí nichž určíme kvadratickou formu $\kappa(\xi, \eta)$ ve stacionárním bodě,

$$\phi_{xx}(a, b) = 2, \quad \phi_{xy}(a, b) = \phi_{yx}(a, b) = 0, \quad \phi_{yy}(a, b) = -2, \quad \kappa(\xi, \eta) = 2\xi^2 - 2\eta^2, \quad A^2 \neq B^2.$$



Obr. 9.37 K příkladu 9.65.

Pokud by byla kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ ve stacionárním bodě pozitivně, resp. negativně definitní, věděli bychom, že funkce $\phi(x, y)$ zde má ostré lokální minimum, resp. maximum. Bod (a, b) by byl současně bodem vázaného ostrého lokálního minima, resp. maxima. Kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ je však indefinitní, a proto funkce $\phi(x, y)$ v bodě (a, b) lokální extrém nemá. Znamená to snad, že funkce $f(x, y)$ nemá lokální vázaný extrém na přímce $h(x, y) = 0$? To jistě ne! Stačí se podívat na obrázek 9.37.

Pro existenci vázaného extrému není totiž rozhodující kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ samotná, ale pouze její „zúžení“ na tečný prostor k vazbě. „Zúžením“ zde rozumíme skutečnost, že se zajímáme pouze o to, jaké jsou hodnoty (přesněji řečeno znaménka hodnot) kvadratické formy $\kappa(\xi, \eta)$ pro případ, že vektory $\vec{u} = (\xi, \eta)$ jsou prvky tečného prostoru k vazební křivce $h(x, y) = 0$. Je-li ovšem vektor $\vec{u} = (\xi, \eta)$ tečný ke křivce $h(x, y) = 0$, je kolmý ke gradientu funkce $h(x, y)$, tj.

$$\vec{u} \text{ grad } h = (\xi, \eta) (A, B) = A\xi + B\eta = 0 \implies \eta = -\frac{A}{B}\xi.$$

(Poslední krok můžeme udělat pro případ, kdy $B \neq 0$, situaci $B = 0$ rozeberte sami.) Dosadíme nyní obecný vektor tečný k vazbě do kvadratické formy $\kappa(\xi, \eta)$:

$$\begin{pmatrix} \xi & -\frac{A}{B}\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ -\frac{A}{B}\xi \end{pmatrix} = 2 \left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right) \xi^2.$$

Rozlišíme tyto případy:

- Pro $(1 - \frac{A^2}{B^2}) < 0$, tj. $|A| > |B|$, je kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ „zúžená“ na tečný prostor k vazbě v bodě (a, b) negativně definitní, nastává zde ostré vázané lokální maximum.
- Pro $(1 - \frac{A^2}{B^2}) > 0$, tj. $|A| < |B|$, je kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ „zúžená“ na tečný prostor k vazbě v bodě (a, b) pozitivně definitní, nastává zde ostré vázané lokální minimum.
- Pro $(1 - \frac{A^2}{B^2}) = 0$, tj. $B = \pm A$, je $\kappa(\xi, \eta)$ „nulovou“ kvadratickou formou. Před chvílí jsme si řekli, že tyto případy je třeba řešit od začátku zvlášť. Odpovídají vazebním přímkám $A(x \pm y) + C = 0$. Ověřte, že pro $C \neq 0$ nemá funkce $\phi(x, y)$ žádný stacionární bod, pro $C = 0$ je funkce $f(x, y)$ na těchto vazebních přímkách konstantní (nulová).

Vidíme, že vázané lokální minimum, nebo maximum může nastat i v těch stacionárních bodech, kde samotná funkce $\phi(x, y)$ lokální extrém nemá. Pro náš konkrétní případ funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ a vazební přímky $Ax + By + C = 0$ jsme zjistili, že na přímkách, jejichž směrnice má absolutní hodnotu větší než jedna, nastává ve stacionárním bodě (a, b) vázané lokální maximum, zatímco na přímkách se směrnicí v intervalu $(-1, 1)$ je v bodě (a, b) vázané lokální minimum.

Zajímavou geometrickou interpretaci má případ $C = 0$ pro $B \neq \pm A$, kdy vazební přímka $h(x, y) = Ax + By = 0$ prochází počátkem. Pro tento případ vychází $\lambda = 0$, a proto $\phi(x, y) = f(x, y)$. Interpretace tohoto zdánlivě divného výsledku je jednoduchá — funkce $f(x, y)$ samotná má v bodě $(0, 0)$ svůj stacionární bod (ověřte tuto skutečnost a zjistěte typ stacionárního bodu). Její gradient v bodě $(0, 0)$ je nulový vektor. A nulový vektor je přece násobkem jakéhokoli vektoru s koeficientem $\lambda = 0$. Tento výsledek lze zobecnit: Prochází-li vazba stacionárním bodem původní funkce $f(x, y)$, je tento bod zároveň stacionárním bodem funkce $\phi(x, y)$ pro $\lambda = 0$, a to bez ohledu na konkrétní tvar vazby.

Zadání množiny A soustavou rovnic není samozřejmě jediný způsob, jak formulovat problém vázaných extrémů. Často se hledají extrémy funkcí vzhledem k množinám zadaným nerovnostmi, popřípadě kombinací nerovností a rovnic. Pro základní orientaci v problematice vázaných extrémů lze však předchozí výklad považovat za dostačující.

9.2.6 Jeden „prémiový“ příklad

Přestože se snažíme všechna tvrzení dokazovat, pokud je to jen trochu možné, v kapitole 7 jsme tento zvyk zatím nedodrželi u dvou klíčových vět, Peanovy (věta 7.1) a Picardovy (věta 7.2), neboť jsme k tomu neměli dostatečnou matematickou výbavu. V prvním případě tento nedostatek ani teď nenapravíme (důkaz je obtížný a zdlouhavý). V případě druhém se již nyní můžeme do důkazu pustit. Bude dokonce, jak jsme se již zmínili v kapitole 7, velmi poučnou ukázkou skloubení znalostí z různých oblastí matematiky, konkrétně z analýzy funkcí více proměnných a z teorie konvergence posloupností a řad funkcí. Ty jsme zatím neměli k dispozici, nyní však jsme již jimi vybaveni. Čtenář, který i tak Picardově větě raději věří a zajímají jej spíše návody na řešení diferenciálních rovnic než teorie, může tento odstavec vynechat. Čtenář, který si naopak teorii oblíbil a má rád opravdovou důkladnost, může odstavec rovněž vynechat a obrátit svou pozornost k textu A. Ženíška „K základům teorie obyčejných diferenciálních rovnic“, citovaném v kapitole 7 i v seznamu literatury.

V odstavci 7.2 jsme tvrdili, že počáteční úlohu

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

dokážeme vyřešit pomocí Picardových aproximací. Také jsme si to názorně vyzkoušeli v příkladu 7.3, kde jsme pomocí grafu pozorovali, jak se Picardovy aproximace „přibližují“ řešení úlohy, které jsme dokázali spočítat přímo. Jenže sebenázornější představa není důkaz. Naopak, již vícekrát jsme se mohli přesvědčit, že představa bývá často zavádějící. V příkladu 7.3 se sice první tři Picardovy aproximativní výrazy, které jsme spočítali, přibližovaly řešení úlohy lépe a

lépe, avšak tím není zaručeno, že nějaká další z takto počítaných funkcí se nemůže od řešení významně odchýlit. A nekonečně mnoho konkrétních funkcí spočítat nemůžeme. Jednotlivé Picardovy aproximace však můžeme považovat za členy posloupnosti funkcí a můžeme se pokusit prozkoumat, zda tato posloupnost konverguje (samozřejmě stejnoměrně) a zda její limitou je řešení naší počáteční úlohy. Výbavu z teorie řad funkcí již k dispozici máme, můžeme se do důkazu pustit. Uvedeme však pro tento účel Picardovu větu v podobě, která se od té naší, prezentované ve větě 7.2, trochu liší, představuje však také jednu z velmi obvyklých formulací. Místo zadání problému na otevřené souvislé množině obsahující bod (t_0, x_0) použijeme zadání na uzavřeném obdélníku

$$\bar{D} = [t_A, t_B] \times [x_A, x_B] = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b].$$

O takové možnosti jsme již psali v poznámce, která předcházela větě 7.1. Je-li totiž (t_0, x_0) bod otevřené souvislé množiny, pak vždy existuje takový obdélník \bar{D} , který je v ní obsažen a zároveň obsahuje bod (t_0, x_0) . Důvodem volby uzavřeného obdélníka není jen pohodlnost. Podstatnějším důvodem je to, že Picardova věta pro uzavřený obdélník přináší ještě další informace o definičním oboru řešení počáteční úlohy. A navíc, pomocí její modifikace, kterou za chvíli dokážeme, lze již velmi rychle dokázat samotnou větu 7.2.

Picardova věta trochu jinak: Předpokládejme, že funkce $f(t, x)$ je spojitá na množině $\bar{D} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ a má v \bar{D} ohraničenou parciální derivaci podle proměnné x . Pak existuje jediné řešení počáteční úlohy $\dot{x}(t) = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, které je definováno a spojitě na intervalu $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, kde

$$\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{\mu} \right\}, \quad \mu = \max \{ |f(t, x)|, (t, x) \in \bar{D} \}.$$

Především si všimněme důsledků předpokladů věty. Ze spojitosti funkce $f(t, x)$ na kompaktní množině \bar{D} vyplývá podle věty 9.3 existence jejího maxima μ na této množině. Ohraničenost parciální derivace funkce $f(t, x)$ podle x znamená, že existuje takové číslo M , pro které je

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| < M \quad \text{pro všechny body } (t, x) \in \bar{D}.$$

Tento předpoklad však zaručuje, že funkce $f(t, x)$ splňuje na \bar{D} Lipschitzovu podmínku — o tom jsme se mohli přesvědčit v příkladu 7.4.

Nyní je třeba dokázat, že se posloupnost Picardových aproximací

$$x_0(t) = x_0,$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_0(\tau)) \, d\tau, \\
x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_1(\tau)) \, d\tau, \\
\dots\dots\dots, \\
x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_{n-1}(\tau)) \, d\tau, \\
\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{9.51}$$

opravdu „blíží“ k řešení naší počáteční úlohy. Co to přesně znamená? Co musíme dokázat?

- Picardovy aproximace tvoří posloupnost funkcí $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$. Je třeba dokázat, že tato posloupnost konverguje, samozřejmě stejnoměrně, a zjistit, na jakém oboru.
- Je třeba zjistit, zda limita posloupnosti má derivaci (to proto, že má být řešením rovnice $\dot{x}(t) = f(t, x)$, která tuto derivaci obsahuje).
- Je třeba dokázat, že limita posloupnosti Picardových aproximací je řešením zadané počáteční úlohy, a zjistit, na jakém oboru.
- Je třeba dokázat, že žádná jiná funkce není řešením počáteční úlohy.

Postupně vyřešíme všechny naznačené úkoly.

Kde leží Picardovy aproximace?

Nejprve odpovíme na otázku, zda grafy Picardových aproximací na intervalu $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ leží v obdélníku \bar{D} . Proč? Protože na tento obdélník jsme omezili definiční obor funkce $f(t, x)$, neměli bychom z něj proto „vyjít“. Pro nultou Picardovu aproximaci je věc jednoduchá. Platí pro ni $x_0(t) = x_0 \in [x_0 - b, x_0 + b]$, tj. bod $(t, x_0(t)) \in \bar{D}$ pro všechna $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ a tím spíše pro $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [t_0 - a, t_0 + a]$. Dále budeme postupovat matematickou indukcí. Nechť $n \in \mathbf{N}$. Jako indukční předpoklad bereme v úvahu, že pro libovolné $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ je $x_n(t) \in [x_0 - b, x_0 + b]$. Dokážeme, že pak také $x_{n+1}(t) \in [x_0 - b, x_0 + b]$. Předpokládejme od této chvíle pro určitost, že $t > t_0$ (pro opačnou nerovnost se důkaz vede obdobně). Platí

$$|x_{n+1}(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) \, d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_n(\tau))| \, d\tau \leq$$

$$\leq \mu \int_{t_0}^t d\tau = \mu|t - t_0| \leq \mu\delta = \mu \min \left\{ a, \frac{b}{\mu} \right\} \leq b.$$

Pozn.: V předchozím odhadu jsme použili nerovnost typu

$$\left| \int_a^b h(\tau) d\tau \right| \leq \int_a^b |h(\tau)| d\tau,$$

kterou jsme uváděli již v dodatku K prvního dílu jako přímý důsledek definice určitého integrálu pomocí horních a dolních součtů. V tomto odstavci ji použijeme ještě několikrát.

Konvergence posloupnosti Picardových aproximací

Odhadněme nyní, oč se od sebe mohou lišit sousední Picardovy aproximace. Proč to potřebujeme vědět? Třeba už jen proto, že z tvrzení týkajících se konvergence posloupností víme, že členy konvergentních posloupností se k sobě libovolně přiblíží pro dostatečně velké n . Uvidíme, že získaných odhadů se nám podaří dobře využít, budeme-li n -tý člen posloupnosti Picardových aproximací chápat jako n -tý částečný součet „šikovně“ zvolené řady.

Při odhadu rozdílů $x_n(t) - x_{n-1}(t)$ budeme potřebovat jak omezenost funkce $f(t, x)$, tak Lipschitzovu podmínku

$$|f(\tau, x_n) - f(\tau, x_{n-1})| \leq M|x_n - x_{n-1}|$$

pro jisté M a jisté okolí bodu (t_0, x_0) . (Nerovnost získanou pro $|x_k(t) - x_{k-1}(t)|$ postupně pro $k = 1, 2, \dots$, vždy vzápětí využijeme při následujícím odhadu funkce $|x_{k+1}(t) - x_k(t)|$, v němž bude za integrálem vystupovat $|x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)|$.) Platí

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0(\tau)) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_0(\tau))| d\tau \leq \mu(t - t_0),$$

$$\begin{aligned} |x_2(t) - x_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau))] d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq M \int_{t_0}^t |x_1(\tau) - x_0(\tau)| \leq \mu M \int_{t_0}^t (\tau - t_0) d\tau = \frac{\mu M}{2} (t - t_0)^2, \end{aligned}$$

$$|x_3(t) - x_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))] d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))| d\tau \leq$$

$$\leq M \int_{t_0}^t |x_2(\tau) - x_1(\tau)| \leq \frac{1}{2} \mu M^2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^2 d\tau = \frac{\mu M^2}{6} (t - t_0)^3,$$

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, x_{n-1}(\tau)) - f(\tau, x_{n-2}(\tau))] d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_{n-1}(\tau)) - f(\tau, x_{n-2}(\tau))| d\tau \leq M \int_{t_0}^t |x_{n-1}(\tau) - x_{n-2}(\tau)| \leq \\ &\leq \frac{\mu M^{n-1}}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n-1} d\tau = \frac{\mu M^{n-1}}{n!} (t - t_0)^n. \end{aligned}$$

Správně bychom získaný obecný vztah měli dokázat pomocí matematické indukce. Tento úkol ponecháme do cvičení.

Nyní se můžeme pustit do důkazu stejnoměrné konvergence posloupnosti Picardových aproximací $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$, a to na intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$. Protože máme k dispozici odhad rozdílů $x_1(t) - x_0(t)$, $x_2(t) - x_1(t)$, atd., pokusme se vyjádřit n -tý člen posloupnosti $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$ pomocí nich. Platí

$$x_n(t) = x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \cdots + [x_n(t) - x_{n-1}(t)].$$

Vidíme, že funkci $x_n(t)$ můžeme chápat jako n -tý částečný součet řady funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t), \quad g_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t) \text{ pro } n \in \mathbf{N}, \quad g_0(t) = x_0(t).$$

A už je význam odhadu rozdílů $x_n(t) - x_{n-1}(t)$ jasný. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ platí

$$|g_n(t)| = |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{\mu M^{n-1}}{n!} (t - t_0)^n \leq \frac{\mu M^{n-1}}{n!} \delta^n \quad \text{pro } t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

Číselná řada s nezápornými členy (s možnou výjimkou x_0)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{\mu M^{n-1}}{n!} \delta^n \quad \text{pro } n \in \mathbf{N}, \quad a_0 = x_0,$$

je majorantou řady $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje podle limitního podílového kritéria (viz věta 8.7), neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\delta}{n+1} = 0.$$

Podle Weierstrassova kritéria (věta 8.11, první vlastnost) konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ stejnoměrně. Posloupnost jejích částečných součtů $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$ je tedy stejnoměrně konvergentní posloupností funkcí na intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t).$$

Označme tuto limitu jako $x(t)$. Hned pro ni také použijeme další vlastnosti stejnoměrně konvergentních funkcí. Picardovy aproximace jsou spojité funkce, takže i limita jejich posloupnosti je spojitá (první vlastnost ve větě 8.9).

Je limita posloupnosti Picardových aproximací řešením počáteční úlohy?

Teď musíme dokázat, že funkce $x(t)$ je řešením zadané počáteční úlohy. Především je třeba prověřit, zda má na intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$ derivaci. Všechny funkce $x_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$, na intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$ derivaci mají, neboť

$$\dot{x}_n(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(\tau, x_{n-1}(\tau)) d\tau = f(t, x_{n-1}(t)) \quad \text{pro } n \in \mathbf{N} \quad \text{a} \quad \dot{x}_0(t) = \dot{x}_0 = 0.$$

Zkoumejme posloupnost těchto derivací $\{\dot{x}_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}} = \{f(t, x_{n-1}(t))\}$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $\dot{x}_0 = 0$. Pro libovolné hodnoty $n, m \in \mathbf{N}$ platí díky Lipschitzově podmínce

$$|\dot{x}_{n+m+1}(t) - \dot{x}_{n+1}(t)| = |f(t, x_{n+m}) - f(t, x_n(t))| \leq M|x_{n+m}(t) - x_n(t)|.$$

Zvolme libovolně číslo $\varepsilon > 0$. Protože je posloupnost $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$ stejnoměrně konvergentní (před chvílí jsme to dokázali), pak existuje index N , samozřejmě *nezávislý na* $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, tak, že pro všechna $n > N$ a všechna $m \in \mathbf{N}$ je $|x_{n+m}(t) - x_n(t)| < \frac{\varepsilon}{M}$, a to pro libovolný bod $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Znamená to, že pro všechna $n > N$, všechna $m \in \mathbf{N}$ a všechny body $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ je

$$|\dot{x}_{n+m+1}(t) - \dot{x}_{n+1}(t)| < \varepsilon.$$

Posloupnost derivací $\{\dot{x}_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$ proto na intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$ konverguje stejnoměrně podle Cauchyova–Bolzanova kritéria (věta 8.8). Použití předposlední vlastnosti z věty 8.9 je již jasné. Funkce $x(t)$, která je limitou posloupnosti Picardových aproximací, má na intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$ derivaci (v krajních bodech jde, přesněji řečeno, o derivace jednostranné), pro kterou platí

$$\dot{x}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\dot{x}_n(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(t, x_{n-1}(t))\} = f(t, x(t)). \quad (9.52)$$

Pozn.: Pozorný čtenář bude jistě vyžadovat zdůvodnění poslední rovnosti. Může na ně přijít sám, vyřeší-li si úlohu 25 ve cvičení. Z návodu a řešení této úlohy, stejně jako z předchozího důkazu, je vidět, jak „všemocná“ je Lipschitzova podmínka.

Z právě získaného vztahu (9.52) také hned vidíme, že funkce $x(t)$ opravdu splňuje diferenciální rovnici $\dot{x} = f(t, x)$. Protože pro t_0 platí pro všechny Picardovy aproximace $x_n(t_0) = x_0$, splňuje funkce $x(t)$ i podmínku $x(t_0) = x_0$. Je proto řešením naší počáteční úlohy.

Jednoznačnost řešení

Zbývá poslední úkol, důkaz jednoznačnosti řešení. Povedeme jej sporem a bude vyžadovat trochu více pozornosti. Předpokládejme, že nějaká jiná spojitá funkce $\bar{x}(t)$ je také řešením dané počáteční úlohy. Pak se od funkce $x(t)$ musí lišit alespoň v jednom bodě intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$. Vezměme nejmenší hodnotu $t_1 \in [t_0, t_0 + \delta]$, pro niž $x(t) = \bar{x}(t)$ na intervalu $[t_0, t_1]$, ale v jakkoli malém pravém okolí bodu t_1 již existují body, v nichž $x(t) \neq \bar{x}(t)$. Ze spojitosti ovšem plyne, že bude existovat pravé okolí $\mathcal{O}(t_1) \subset [t_1, t_0 + \delta]$, v němž je $x(t) \neq \bar{x}(t)$. Zvolme kladné číslo ε tak, aby platilo

$$\varepsilon < M^{-1}, \quad \text{tj} \quad M\varepsilon < 1,$$

kde M je konstanta z Lipschitzovy podmínky, kterou jsme používali v předchozích částech důkazu. Na intervalu $[t_1, t_1 + \varepsilon]$ je funkce $|x(t) - \bar{x}(t)|$ spojitá a není na něm identicky nulová. Označme θ kterýkoli z bodů intervalu $[t_1, t_1 + \varepsilon]$, v němž tato funkce nabude (podle věty 2.2) své největší hodnoty λ . Zřejmě je $\lambda > 0$ a $\theta \in (t_1, t_1 + \varepsilon]$. (Vysvětlete, proč nemůže být $\theta = t_1$.) Platí

$$\begin{aligned} \lambda = |x(\theta) - \bar{x}(\theta)| &= \left| \int_{t_1}^{\theta} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \bar{x}(\tau))] \right| \leq \int_{t_1}^{\theta} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \bar{x}(\tau))| \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{\theta} M|x(\tau) - \bar{x}(\tau)| \, d\tau \leq M\lambda(\theta - t_1) < \lambda M\varepsilon < \lambda. \end{aligned}$$

Opět jsme použili Lipschitzovu podmínku! Dospěli jsme ke sporu — nemůže platit $\lambda < \lambda$. Jednoznačnost řešení $x(t)$ je rovněž dokázána.

Souvislost s větou 7.2

Věnujme se ještě chvíli diskusi o odchylkách ve formulaci Picardovy věty v kapitole 7 (věta 7.2) od formulace použité v tomto příkladu.

- Ve větě 7.2 jsme předpokládali, že funkce $f(t, x)$ je definována (a spojitá) na *otevřené souvislé množině* D obsahující bod (t_0, x_0) , nikoli na uzavřeném obdélníku $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$. Vadí to? Jistěže ne. Díky znalosti vlastností množin popsaných v odstavci 9.1 víme, že spolu s každým bodem $(t_0, x_0) \in D$ můžeme do množiny D „vnutit“ uzavřený obdélník se středem (t_0, x_0) , tj. že existují čísla a a b tak, že $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$.

- Ve větě 7.2 jsme předpokládali spojitost funkce $f(t, x)$ na otevřené souvislé množině D . Nebylo tam třeba přidat ještě předpoklad ohraničenosti této funkce? Vždyť pro uzavřený obdélník je ohraničenost funkce důsledkem její spojitosti, pro otevřenou množinu však nikoli. Stačí vzít třeba funkci $f(t, x) = x^{-1}$, která je například na obdélníku $(t_A, t_B) \times (0, x_B)$ spojitá pro libovolné hodnoty t_A, t_B a x_B , není však na něm ohraničená (víte proč?). Východisko je zřejmé: Jak bylo řečeno v odpovědi na předchozí otázku, pro každý bod $(t_0, x_0) \in (t_A, t_B) \times (0, x_B)$ můžeme najít uzavřený obdélník $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset (t_A, t_B) \times (0, x_B)$. Na něm již ohraničenost ze spojitosti plyne.
- Ve větě 7.2 jsme nepředpokládali ohraničenost parciální derivace funkce $f(t, x)$ podle proměnné x . Není to na závadu? Odpověď je opět záporná. Ohraničenost derivace se v důkazu Picardovy věty uvedeném v tomto příkladu objevila pouze ve dvou místech: vyplynulo z ní splnění Lipschitzovy podmínky a zajistila, že Picardovy aproximace „nevyběhnou“ z definičního obdélníka, tj. že body $(t, x_n(t))$, $n \in \mathbf{N}$, leží v množině $\bar{D} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$. Ve větě 7.2 jsme ovšem rovnou předpokládali splnění Lipschitzovy podmínky v každém bodě definičního oboru D funkce $f(t, x)$. A pokud jde o obor hodnot Picardových aproximací, vždy můžeme pracovat na dostatečně malém okolí bodu (t_0, x_0) tak, aby potřebné požadavky byly splněny.

Z předchozích úvah je zřejmé, že důkaz, který jsme v tomto odstavci provedli pro poněkud modifikovanou formulaci Picardovy věty oproti větě 7.2, je beze zbytku použitelný i jako důkaz věty 7.2.

9.2.7 Cvičení

1. Určete definiční obor D následujících funkcí dvou proměnných a zakreslete jej v \mathbf{R}^2 . Ve všech případech rozhodněte o topologických vlastnostech množiny D (otevřenost, uzavřenost, kompaktnost, souvislost, omezenost):

a) $f(x, y) = \arcsin(x - y)$,

e) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1-x^2-9y^2}{x^2+y^2-\frac{1}{4}}}$,

b) $f(x, y) = \arccos(|x| + |y|)$,

f) $f(x, y) = \ln(4 - x^2) + \sqrt{\ln|x + y|}$,

c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}$,

g) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{1-x^2-y^2}} + \sqrt{\frac{x+y}{x^2+y^2}}$.

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) + \sqrt{x - y}$,

2. V případech funkcí a), b) a c) z předchozí úlohy určete a zakreslete také vrstevnice funkcí.
3. V následujících případech vypočítejte limitu funkce $f(x, y)$ v daném bodě $a = (x_0, y_0)$ vzhledem k zadaným množinám A_i :

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in A_i} \frac{\arctg(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid |x| = |y|\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x = y) \wedge (x > 0)\}$, $A_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x = y) \wedge (x < 0)\}$, $A_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid x = -y\}$, $A_5 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1), (x,y) \in A_i} \frac{\sin(x-y)}{\sqrt{x^2-2xy+y^2}}$, $A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (x=1) \wedge (x \neq y)\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x=y\}$,
 $A_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x > y\}$, $A_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (y=1) \wedge (x < 1)\}$, $A_5 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x \neq y\}$.
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0), (x,y) \in A_i} \frac{y\sqrt{1-x^2-y^2}}{1-x}$, $A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (x < 1) \wedge (0 < y < \sqrt{1-x^2})\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (x^2 + y^2 = 1) \wedge (y \neq 0)\}$, $A_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y = \sqrt{1-x}\}$, $A_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (x \neq 1) \wedge (y = 0)\}$, $A_5 = D$.
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in A_i} \frac{y^4 x}{x^3 + y^6}$, $A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} | y = kx\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} | y = kx^2\}$, $A_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} | x = ky^2\}$, $A_4 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $A_5 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} | (x = 0) \vee (y = 0)\}$.

4. Vypočtete následující limity:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy}{\sin x^2 y}$, e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$,
 b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$, f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4}}{x^2 + y^2}$,
 c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{e^{x+y}}{x^5 + y^5}$, g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^3 - y^3}$,
 d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$, h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^6 + y^6}$.

5. Určete body nespojitosti u následujících funkcí:

- a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ pro $x \neq y$, $f(x,y) = 0$ pro $x = y$.
 b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{xy}$ pro $|x| > |y|$ a $y \neq 0$, $f(x,y) = 1 + \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{xy}$ pro $|y| > |x|$ a $x \neq 0$, $f(x,y) = 0$ pro $xy = 0$,
 c) $f(x,y) = \frac{1}{\cos x \sin y}$ pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ a $y \neq n\pi$, $n, k \in \mathbf{Z}$ $f(x,y) = 1$ pro $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ nebo $y = n\pi$, $k, n \in \mathbf{Z}$,
 d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|xy|}\right)$ pro $xy \neq 0$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2}$ pro $x = 0$ nebo $y = 0$.

6. Vypočtete parciální derivace a gradient u následujících funkcí. Ke každé z funkcí запиšte výraz pro úplný diferenciál. Vypočtete druhé parciální derivace.

- a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2)$, d) $f(x,y) = \arccos \frac{x}{y} + e^{x^2 + y^2}$,
 b) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$, e) $f(x,y,z) = ze^{\frac{y}{x}}$,
 c) $f(x,y) = \frac{x}{y} \ln(xy)$, f) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + xy$.

7. Pomocí diferenciálu funkcí dvou, resp. tří proměnných vypočtete přibližně následující hodnoty:

- a) $\sqrt[3]{(2,02)^5 + (1,97)^5}$, d) $\sqrt{3,96} e^{\frac{1,02}{0,98}}$,
 b) $\operatorname{arctg} \frac{0,96}{1,01}$, e) $\frac{\sqrt{(2,02)^4 + (2,97)^2}}{(1,01)^3}$,
 c) $\ln(\sqrt{1,02} + 0,01)$, f) $\arccos \frac{1,02}{1,96}$.

8. Určete směrové derivace následujících funkcí v zadaném bodě a , ve směru zadaného jednotkového vektoru \vec{s} :

- a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $a = (2,1)$, $\vec{s} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

864 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a = (3, 4)$, $\vec{s} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$,

c) $(x, y, z) = xy + yz + xz$, $a = (1, 1, 1)$, $\vec{s} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

*9. Nechť $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce definovaná a spojitá na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ a $H = f(D)$ je otevřená množina v \mathbf{R} . Ukažte, že

a) vzor $f^{-1}(V)$ libovolné otevřené množiny $V \subset \mathbf{R}$ je opět otevřená množina,

b) vzor $f^{-1}(V)$ libovolné uzavřené množiny $V \subset \mathbf{R}$ je opět uzavřená množina.

Zamyslete se nad tím, zda je nutné předpokládat otevřenost množiny D , resp. H (definičního oboru, resp. oboru hodnot funkce f). Můžete se pokusit dokázat i tvrzení: „Podmínky a) a b) jsou ekvivalentní a vyplývá z nich spojitost funkce f .“

Návod: Využijte skutečnosti, že každou otevřenou množinu $V \neq \emptyset$ lze zapsat jako sjednocení otevřených intervalů, tedy jako sjednocení nějakých okolí jejích bodů. Z definice spojitosti má funkce v každém bodě D limitu, která je rovna funkční hodnotě. Uvažujte o bodech množiny V jako o „limitách“ funkce f , použijte definici limity a zkonstruujte množinu $f^{-1}(V)$ jako sjednocení otevřených množin (okolí jejích bodů). V úloze b) aplikujte stejný postup na doplněk množiny V v množině H_f . Uvědomte si, že $f^{-1}(V) = f^{-1}(H_f \cap V) = \{x \in D \mid f(x) \in V\}$.

10. Najděte příklady funkce f spojitě na $D \subset \mathbf{R}^n$ takové, že

a) obraz $f(U)$ nějaké otevřené množiny $U \subset D$ není otevřená množina,

b) obraz $f(U)$ nějaké uzavřené množiny $U \subset D$ není uzavřená množina.

11. Charakterizujte body, pro které definice limity (formulovaná před příkladem 9.15) splývá s obecnější definicí limity (formulovanou před příkladem 9.22), a ukažte, že pojem limity je v těchto případech také totožný s pojmem „limita vzhledem k množině D “.

Návod: Uvědomte si, jaká je nutná a postačující podmínka pro bod, v němž limitu počítáme, aby obě definice limity byly ekvivalentní?

12. Zamyslete se nad tím, které z vlastností limit uvedených ve větě 9.2 platí i pro případ limity vzhledem k množině A , resp. pro případ obecnější definice limity (formulované před příkladem 9.22) a zformulujte je. Návod naleznete v textu.

*13. Dokažte, že pro případ vlastní limity funkce ve vlastním bodě platí následující tvrzení, které často bývá formulováno v podobě definice ekvivalentní definici limity uvedené v odstavci 9.2.1:

Nechť množina $D \subset \mathbf{R}^n$ obsahuje jisté ryzí okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_n)$. Číslo L je vlastní limitou funkce $f : D \ni x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}$ v bodě a právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existují kladná čísla $\delta_1, \dots, \delta_n$ tak, že pro každý bod

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in (a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1) \times \dots \times (a_n - \delta_n, a_n + \delta_n) \setminus \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\},$$

tj. pro $0 < |x_i - a_i| < \delta_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, platí

$$|f(x_1, \dots, x_n) - L| < \varepsilon.$$

Návod: Důkaz se snadno provede použitím definice pro speciální volbu okolí jak bodu L , tak bodu a .

14. Formulujte tvrzení o spojitosti (v daném bodě) součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou (v tomtéž bodě) spojitých funkcí a tvrzení o spojitosti (v daném bodě) funkce vzniklé složením dvou (v kterých bodech?) spojitých funkcí. S využitím věty 9.2 tvrzení dokažte.

*15. Dokažte Weierstrassovu větu (první vlastnost v větě 9.3).

Návod: Využijte výsledku příkladu 9.26.

16. Definujte na otevřené množině $D = (-a, a) \times (-b, b)$ spojitou funkci $f : D \ni (x, y) \rightarrow \mathbf{R}$ tak, aby obrazem množiny D byl uzavřený interval.

Návod: Pokuste se nejprve o definici funkce jedné proměnné $f : (-a, a) \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ takové, že obrazem intervalu $(-a, a)$, tj. $f(-a, a)$ je uzavřený interval.

17. Určete rovnice vrstevnic a spádnic pro funkce

a) $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$,

b) $f(x, y) = y - x^2$,

v obecném bodě definičního oboru. Určete rovnice tečné roviny v obecném bodě (x_0, y_0) definičního oboru.

*18. Z definice ukažte, že funkce $f(x, y) = |x + y|$ není diferencovatelná v bodě $(0, 0)$.

19. Zopakujte si pravidla pro součet, rozdíl, součin a podíl derivací funkcí jedné proměnné (Věta 2.4 prvního dílu), přeformulujte je a dokažte pro parciální derivace funkcí více proměnných.

*20. Vymyslete další příklady situací, kdy si smíšené parciální derivace f_{xy} a f_{yx} nejsou v nějakém bodě rovny, resp. situací, kdy si v nějakém bodě rovny jsou, přestože v něm nejsou spojitě.

Návod: Inspirujte se příklady 9.31 a 9.32.

21. Převeďte následující parciální diferenciální rovnice do nových proměnných a vyřešte je:

a) $f_{xx} - f_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = x - y$,

c) $x^2 f_{xx} - y^2 f_{yy} + x f_x - y f_y = 0$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

b) $f_{xx} - y^4 f_{yy} - 2y^3 f_y = 0$, $u = x + \frac{1}{y}$, $v = x - \frac{1}{y}$,

22. Určete rozložení tlaku v kapalině pro případ, že na kapalinové těleso nepůsobí žádné vnější síly.

23. Rozhodněte, zda následující výrazy jsou úplným diferenciálem nějaké funkce dvou proměnných, v kladném případě tuto funkci určete:

a) $(2xy - y^2 - \sin x) dx + (x^2 - 2xy) dy$,

e) $\left(\frac{y}{x}\right) dx + \left(\frac{y}{x}\right) dy$,

b) $\left(ye^{xy} + \frac{y}{2\sqrt{xy}}\right) dx + \left(xe^{xy} + \frac{x}{2\sqrt{xy}}\right) dy$,

f) $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{1}{x}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \cos y\right) dy$,

c) $(x^2 y) dx + (y^2 x) dy$,

d) $\left(2x - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(2y + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$,

g) $(2xy) dx - (2xy) dy$.

24. Pomocí matematické indukce dokažte obecný vztah pro odhad rozdílů sousedních Picardových aproximací

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{\mu M^{n-1}}{n!} (t - t_0)^n,$$

odvozený v odstavci 9.2.6.

Návod: Pro $n = 1$ jsme nerovnost přímo prověřili v textu. Nerovnost pro $|x_n(t) - x_{n-1}(t)|$ vezměte jako indukční předpoklad a vyjádřete pomocí něj nerovnost pro $|x_{n+1}(t) - x_n(t)|$.

25. V odstavci 9.2.6 jsme dokázali, že posloupnost Picardových aproximací $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$ je stejnoměrně konvergentní v intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$, číslo δ bylo v odstavci 9.2.6 rovněž definováno. Limitu této posloupnosti jsme označili $x(t)$. Dokažte, že posloupnost funkcí $\{\dot{x}_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$, kde $\dot{x}_n(t) = f(t, x_{n-1}(t))$ pro $n = 1, 2, \dots$ a $\dot{x}_0(t) = 0$, konverguje (stejněměrně) k funkci $f(t, x(t))$.

Návod: Zapište Lipschitzovu podmínku pro výraz $|f(t, x_{n-1}(t)) - f(t, x(t))|$ a využijte skutečnosti, že posloupnost $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$ konverguje na $[t_0, t_0 + \delta]$ stejnoměrně k $x(t)$.

26. Najděte příklady funkcí, pro něž je bod (a, b) stacionárním bodem a platí:

- a) V bodě (a, b) má funkce $f(x, y)$ neostře lokální maximum.
 b) V bodě (a, b) má funkce $f(x, y)$ neostře lokální minimum.
 c) V bodě (a, b) má funkce $f(x, y)$ ostré lokální minimum a kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ je pozitivně semidefinitní.
 d) V bodě (a, b) má funkce $f(x, y)$ ostré lokální maximum a kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ je negativně semidefinitní.
 e) V bodě (a, b) má funkce $f(x, y)$ ostré lokální maximum a $\kappa(\xi, \eta)$ je „nulová“ kvadratická forma.
 f) V bodě (a, b) má funkce $f(x, y)$ ostré lokální minimum a $\kappa(\xi, \eta)$ je „nulová“ kvadratická forma.
 g) V bodě (a, b) nemá funkce $f(x, y)$ extrém a $\kappa(\xi, \eta)$ je „nulová“ kvadratická forma.
 h) v bodě (a, b) nemá funkce $f(x, y)$ extrém a kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ je negativně semidefinitní.
 i) v bodě (a, b) nemá funkce $f(x, y)$ extrém a kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$ je pozitivně semidefinitní.

27. Nalezněte stacionární body následujících funkcí a rozhodněte, o jaký typ stacionárního bodu se jedná:

- a) $f(x, y) = x^2y - 2xy + y^2$,
 b) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{3}$,
 c) $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2 - y^2}$,
 d) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x + 1}$,
 e) $f(x, y) = 1 - x^2 - xy - y^2 - 3y$.

Návod: Nepodaří-li se o typu stacionárního bodu rozhodnout pomocí kvadratické formy κ , pokuste se o to úvahou vycházející přímo z definice extrému a tvaru funkce $f(x, y)$.

28. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M :

- a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $M = (0, 1) \times (0, 1)$,
 b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $M = (0, 1] \times (0, 1]$,
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$,
 d) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$, $M = \{(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2] \mid x \neq 0, y \neq 0\}$,
 e) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1$, $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

29. Najděte stacionární body (a, b) funkce $z = f(x, y)$ vzhledem k množině $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid h(x, y) = 0\}$. Úlohu řešte jak pomocí vhodné parametrizace množiny A , tak metodou Lagrangeových multiplikátorů. Výsledky obou způsobů porovnejte. Pomocí metody vhodné parametrizace množiny A určete také typ stacionárního bodu.

- a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $h(x, y) = x + y - 1$,
 b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $h(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1$,
 c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $h(x, y) = x + y - 1$,
 d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $h(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1$,
 e) $f(x, y) = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$, $h(x, y) = x + y - 1$,
 f) $f(x, y) = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$, $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $p > q$,
 g) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $h(x, y) = xy - 1$,

h) $f(x, y) = x + y, h(x, y) = x^2 + y - 1.$

30. Určete polohu vázaných lokálních extrémů u funkcí z předchozího příkladu také pomocí geometrické představy. Zakreslete vrstevnice funkce $f(x, y)$ a množinu A v rovině xy .
31. Nalezněte nejvyšší a nejnižší bod, ve kterém plášť kužele $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ protíná plášť eliptického válce o rovnici $2x^2 + y^2 - 1 = 0$.
32. Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů ukažte, že
 - a) mezi všemi obdélníky konstantního obvodu má největší obsah čtverec,
 - b) mezi všemi obdélníky konstantního obsahu má nejmenší obvod čtverec,
 - c) mezi všemi kvádry konstantního povrchu má největší objem krychle,
 - d) mezi všemi kvádry konstantního objemu má nejmenší povrch krychle.
33. Nalezněte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně:
 - a) $F(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 - zx + 3 = 0,$
 - b) $F(x, y, z) = z^2 - yz - x^2 - y^2 + 4y - 16 = 0.$

9.3 Vektorové funkce více proměnných

Vektorové funkce více proměnných, resp. vektorové funkce vektorové proměnné pro nás již nebudou něčím zcela novým. V příkladech předchozích odstavců se jim nedalo vyhnout. V tomto odstavci si však všimneme podrobněji některých jejich charakteristik, zejména Jacobiho zobrazení, na něž jsme již také narazili v kapitole 5, a integrálních křivek, které mají značný fyzikální význam jako siločáry, indukční čáry, proudnice, apod.

9.3.1 Derivace vektorové funkce — Jacobiho zobrazení

Nejprve vektorovou funkci pořádně definujeme. S výhodou můžeme použít pojmů, které jsme zavedli v odstavci 9.2. Nebudeme je proto již podrobně rekapitulovat.

Vektorovou funkcí n proměnných x_1, \dots, x_n definovanou na množině $D \subset \mathbf{R}^n$ rozumíme zobrazení

$$f : D \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x) \in \mathbf{R}^m, \tag{9.53}$$

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Často značíme $y = f(x)$ a

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) & \text{nebo} & & y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) & \text{nebo} & & y_2 &= y_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots & & & & \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) & \text{nebo} & & y_m &= y_m(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{9.54}$$

Zkráceně také píšeme

$$y_\alpha = f_\alpha(x_i), \quad \text{nebo} \quad y_\alpha = y_\alpha(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Vztahy (9.54) jsou *rovnice zobrazení* f . Funkce $f_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ jsou *složky* vektorové funkce f . Pro jednoduchost nepíšeme v obecném případě nad symboly f, x, y šipky, ty rezervujeme pro situace s fyzikálním významem.

Vektorovou funkci tedy jednoduše určíme zadáním m skalárních funkcí, které jsou jejími složkami. Podobně jako v případě skalární funkce rozumíme *přirozeným definičním oborem* vektorové funkce $y = f(x)$ „největší“ množinu $D \subset \mathbf{R}^n$, na níž jsou definovány všechny složky. Vektorová funkce se nazývá *spojitá* v bodě $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$, jsou-li v tomto bodě spojité všechny její složky.

Připomeňte si definici derivace funkce jedné proměnné a zejména definici diferencovatelnosti skalární funkce více proměnných (9.19) a (9.20). Definice derivace vektorové funkce bude velmi podobná a její formální zápis bude stejný dokonce úplně.

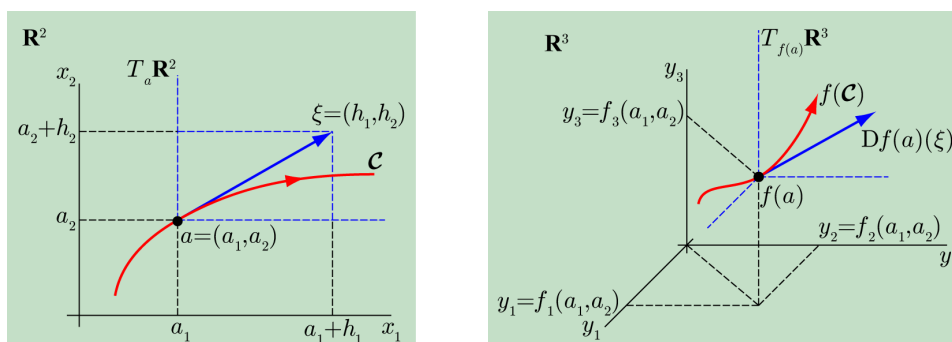
Symbolem $|f(x)|$, značícím absolutní hodnotu, budeme standardně rozumět velikost vektoru $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$,

$$|f(x)| = \sqrt{[f_1(x_1, \dots, x_n)]^2 + \dots + [f_m(x_1, \dots, x_n)]^2},$$

stejně jako zápis

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

představuje velikost vektoru proměnných $x = (x_1, \dots, x_n)$. Tuto symboliku budeme potřebovat v definici derivace vektorové funkce. Co ještě budeme potřebovat, jsou tečné *vektorové* prostory $T_x \mathbf{R}^n$, resp. $T_{f(x)} \mathbf{R}^m$ umístěné v bodech $x \in \mathbf{R}^n$, resp. $f(x) \in \mathbf{R}^m$ euklidovských *topologických* prostorů \mathbf{R}^n , resp. \mathbf{R}^m (viz podrobné vysvětlení v odstavci 9.2.3). Derivace vektorové funkce bude opět lineární zobrazení tečných prostorů. Samozřejmě ne jakékoli, ale definované tak, aby vystihovalo, jak se v lineárním přiblížení změní hodnoty vektorové funkce se změnou hodnot proměnné. Schematicky znázorňuje situaci obrázek 9.38 pro $n = 2$ a $m = 3$. V obrázku jsou vyznačeny prostory $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^3$, jejich tečné prostory v bodech $a = (a_1, a_2)$ a $f(a) = (f_1(a_1, a_2), f_2(a_1, a_2), f_3(a_1, a_2))$, vektor „přírůstků“ $\xi = (h_1, h_2) \in T_a \mathbf{R}^2$ a vektor $\varphi(a)(\xi) = Df(a)(\xi) \in T_{f(a)} \mathbf{R}^3$. Význam křivek \mathcal{C} a $f(\mathcal{C})$, k nimž jsou vektory ξ a $Df(a)(\xi)$ tečné, vysvětlíme v příkladu 9.66.



Obr. 9.38 K definici derivace vektorové funkce.

Vektorovou funkci $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ definovanou v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ a jistém jeho okolí nazveme *diferencovatelnou v bodě a* , jestliže existuje lineární zobrazení

$$\varphi : T_a \mathbf{R}^n \ni \xi \longrightarrow \varphi(\xi) \in T_{f(a)} \mathbf{R}^m,$$

$$\xi = (h_1, \dots, h_n), \quad \varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_n))$$

tak, že platí

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{|f(a + \xi) - f(a) - \varphi(\xi)|}{|\xi|} = 0. \quad (9.55)$$

Lineární zobrazení φ pak nazýváme *derivace funkce $f(x)$* , nebo také *Jacobiho zobrazení v bodě a* , a značíme $\varphi = Df(a)$.

Pozn.: Součet $a + \xi$ neznamená nedovolené sčítání bodu a vektoru, nýbrž formálně vyjadřuje fakt, že pomocí vektoru $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, vázaného v bodě $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, se „posouváme“ do bodu $(a_1 + \xi_1, \dots, a_n + \xi_n) \in \mathbf{R}^n$.

S názvem Jacobiho zobrazení jsme se setkali již v kapitole 5. Jednalo se tam o zobrazení, které vektorům báze kartézské soustavy souřadnic, tečným k souřadnicovým přímkám, přímo přiřazovalo vektory báze soustavy křivočarých souřadnic, tečné k odpovídajícím souřadnicovým křivkám. Jaká je souvislost mezi Jacobiho zobrazením z kapitoly 5 a předchozí definicí? Za chvíli uvidíme, že velmi úzká — Jacobiho zobrazení při souřadnicových přechodech je speciálním případem této obecné definice. Už z názvu je jistě zřejmé, že tomu tak musí být. V kapitole 5 jsme Jacobiho zobrazení mezi prostory stejné dimenze definovali spíše názorně geometricky. Nyní tuto představu uvedeme do souladu s definicí analytickou. Co je pro to třeba udělat? Derivace obecné vektorové funkce je definována jako určité lineární zobrazení vektorového prostoru dimenze n do vektorového prostoru dimenze m . A to je reprezentováno nějakou maticí typu n/m (kdo to zapomněl, ať se vrátí ke kapitole 4). Naším cílem bude tuto matici najít. Jistě

tušíte, že bude tvořena parciálními derivacemi funkcí $f_1(x_1, \dots, x_n)$ až $f_m(x_1, \dots, x_n)$ podle jednotlivých proměnných.

Předpokládejme, že vektorová funkce $f : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}^m$, vyjádřená rovnicemi (9.54), je diferencovatelná v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$. Lineární zobrazení vystupující v definici diferencovatelnosti označme φ . Víme o něm, že existuje, a tušíme, že bude určeno jednoznačně, podobně jako v případě skalární funkce více proměnných. Matici, která zobrazení φ reprezentuje, označme $(D_{i\alpha})$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, m$. Označíme-li složky vektoru $\xi = (h_1, \dots, h_n)$ a složky vektoru $\varphi(\xi) = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$, platí

$$(\zeta_1 \ \zeta_1 \ \dots \ \zeta_m) = (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n) \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1m} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad \zeta_\alpha = \sum_{i=1}^n h_i D_{i\alpha}.$$

Vyjádríme-li definiční limitu derivace funkce $f(x)$ (9.55) pomocí složek funkce f (přičemž složky ostatních vektorů a souřadnice bodů pro jednoduchost rozepisovat nebudeme), dostaneme

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{[f_1(a + \xi) - f_1(a) - \sum_{i=1}^n h_i D_{i1}]^2 + \dots + [f_m(a + \xi) - f_m(a) - \sum_{i=1}^n h_i D_{im}]^2}}{|\xi|} = 0.$$

Protože pro každé jednotlivé $\alpha = 1, \dots, m$ platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|f_\alpha(a + \xi) - f_\alpha(a) - \sum_{i=1}^n h_i D_{i\alpha}|}{|\xi|} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{[f_1(a + \xi) - f_1(a) - \sum_{i=1}^n h_i D_{i1}]^2 + \dots + [f_m(a + \xi) - f_m(a) - \sum_{i=1}^n h_i D_{im}]^2}}{|\xi|}, \end{aligned}$$

můžeme pro limity použít větu o sevření (předposlední vlastnost ve větě 9.2) a určit pro jednotlivá α limitu

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{|f_\alpha(a + \xi) - f_\alpha(a) - \sum_{i=1}^n h_i D_{i\alpha}|}{|\xi|} = 0.$$

Porovnáme-li výsledek s definicí diferencovatelnosti skalární funkce (9.20), vidíme, že každá z funkcí $f_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ je v bodě a diferencovatelná a příslušný úplný diferenciál $\varphi_\alpha = Df_\alpha(a)$ je reprezentován maticí typu $n/1$, $(D_{i\alpha})$, $i = 1, \dots, n$. Z vlastností diferenciálu skalární funkce již ale víme, že pokud je diferencovatelná, je její úplný diferenciál určen jednoznačně a je reprezentován maticí tvořenou parciálními derivacemi této funkce. Matici $(D_{i\alpha})$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, m$, tak nezbyvá, než aby byla tvaru

Jacobiho matice

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x_i} \right)_{x=a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=a}.$$

Předchozí úvahou jsme současně ukázali, že také derivace vektorové funkce je určena jednoznačně, stejně jako tomu bylo u funkce skalární.

Příklad 9.66: Křivky a tečné vektory aneb trocha geometrie ...

V komentáři k obrázku 9.38 jsme slíbili, že vysvětlíme význam křivek \mathcal{C} a $f(\mathcal{C})$, které jsou v něm vyznačeny. Obrázek je sice nakreslen pro $n = 2$ a $m = 3$, ale výpočet zvládneme v obecné podobě. Předpokládejme, že křivka \mathcal{C} v prostoru \mathbf{R}^n procházející bodem a je například parametrizovaným obloukem

$$\mathcal{C} : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \longrightarrow \mathcal{C}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n, \quad a = x(0).$$

Tak jako vždy, a také v kapitole 5, si ji představíme jako trajektorii nějaké částice a její tečný vektor ξ v bodě a spočteme jako rychlost částice,

$$\xi = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))_{t=0}, \quad \text{tj. } \xi_i = \dot{x}_i(0) \text{ pro } i = 1, \dots, n.$$

Zobrazíme-li křivku \mathcal{C} pomocí funkce $f(x)$, dostaneme křivku $f(\mathcal{C})$ v prostoru \mathbf{R}^m . Její parametrické vyjádření je

$$\begin{aligned} f(\mathcal{C}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t &\longrightarrow f(\mathcal{C})(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)) \in \mathbf{R}^m, \\ y_\alpha(t) &= f_\alpha(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad f(a) = f(x(0)). \end{aligned}$$

Tečný vektor k této „deformované“ křivce je prvkem tečného prostoru $T_{f(a)}\mathbf{R}^m$ a jeho složky opět zjistíme jako derivace parametrického vyjádření křivky,

$$\zeta = (\dot{y}_1(t), \dots, \dot{y}_m(t))_{t=0}.$$

K provedení výpočtu stačí, abychom si vzpomněli, jak se derivuje složená funkce. Pro libovolné $\alpha = 1, \dots, m$ je

$$\zeta_\alpha = \dot{y}_\alpha(0) = \left(\frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \cdots + \frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x_n} \dot{x}_n(t) \right)_{t=0} = \sum_{i=1}^n \xi_i D_{i\alpha}(a).$$

Závěr je možná pro mnohého čtenáře očekávaný. Tečný vektor $\zeta \in T_{f(a)}\mathbf{R}^m$ v bodě $f(a)$ ke křivce $f(\mathcal{C})$, která vznikla „zdeformováním“ původní křivky \mathcal{C} funkcí f , je *Jacobiho obrazem* tečného vektoru $\xi \in T_a\mathbf{R}^n$ v bodě a k původní křivce \mathcal{C} .

Příklad 9.67: ... a trocha terminologie

Předchozí úvahy ukazují jasnou souvislost analytických a geometrických pojmů — derivace vektorové funkce a zobrazení tečných prostorů. Vše, co jsme zjistili, je v souladu s jednou z klíčových vět algebry, že totiž lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze. Skutečně, zobrazíme-li Jacobiho zobrazením libovolný vektor standardní báze $e_i = (0, \dots, 0, 1_i, 0, \dots, 0)$ tečného prostoru $T_x \mathbf{R}^n$, získáme obraz $\zeta_i = ((\zeta_i)_1, \dots, (\zeta_i)_m)$,

$$(\zeta_i)_\alpha = \sum_{j=1}^n (e_i)_j \frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x_i},$$

kde δ_{ij} je staré známé Kroneckerovo delta. Symbol 1_i ve vyjádření vektoru e_i ve složkách znamená, že jednička stojí na i -té pozici.

Je zde také souvislost se směrovou derivací. Vypočteme třeba směrovou derivaci skalární funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ podle vektoru e_i ,

$$\partial_{e_i} f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} (e_i)_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} (e_i)_n = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Výsledek je takto jednoduchý proto, že vektor e_i má pouze i -tou složku nenulovou a rovnou jedné. Směrová derivace funkce podle vektoru báze je přímo rovna parciální derivaci funkce podle příslušné proměnné. Na základě této souvislosti také někdy zapisujeme vektory báze a obecný vektor jako jejich lineární kombinaci ve tvaru

$$(e_1, \dots, e_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad \xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

s použitím Einsteinovy sčítací symboliky v závěru zápisu.

Pozn.: Interpretujeme-li Jacobiho zobrazení jako zobrazení tečných prostorů, jak to lépe odpovídá geometrické představě (příklad 9.66), značíme je často jako

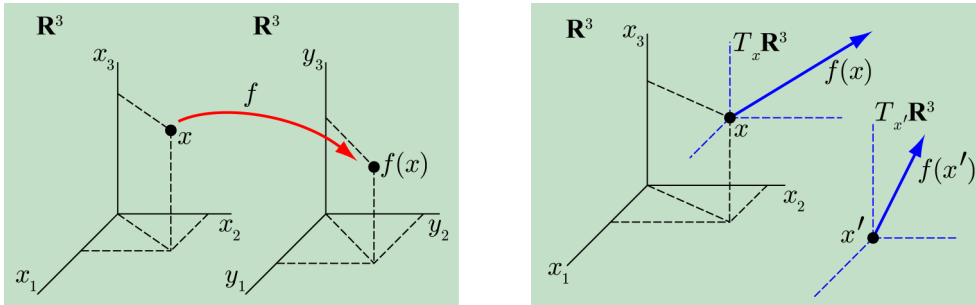
$$T_x f : T_x \mathbf{R}^n \ni \xi \longrightarrow \zeta \in T_{f(x)} \mathbf{R}^m, \quad \zeta = T_x f(\xi) = Df(x)(\xi) \quad (9.56)$$

a nazýváme je *tečné zobrazení k funkci f v bodě x* .

9.3.2 Proudnice, siločáry a jiné integrální čáry vektorových polí

Pojem *pole* známe dobře z fyziky. Dokonce nefyzikové, laici a školní mládež intuitivně vědí, co to znamená, když řekneme, že v okolí Země je gravitační pole, elektrický náboj vytváří elektrické či magnet magnetické pole. A většina lidí se již jistě setkala se slovy siločára nebo indukční čára a různí senzibilové nebo věstci je používají běžně. V této kapitole jsme již také mluvili o silovém poli, jeho práci a odpovídající potenciální energii, šlo-li o pole konzervativní. Nyní nám však půjde o přesnější matematický popis těchto objektů. Základem popisu je pojem *vektorového pole*. V podstatě jde o známou věc — o vektorovou funkci více proměnných, avšak pro $m = n$,

$$f : D \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbf{R}^n.$$



Obr. 9.39 K interpretaci vektorového pole.

Toto zobrazení přiřazuje bodu v \mathbf{R}^n opět bod v \mathbf{R}^n , jak ukazuje obrázek 9.39 vlevo pro trojrozměrný případ. Mohli bychom si myslet, že o takovém zobrazení již vše potřebné víme z předchozího odstavce. Jistě, stačilo by tam položit $m = n$. V pravé části obrázku však vidíme jinou možnost, jak vektorové pole interpretovat. Do bodu $x \in D \subset \mathbf{R}^n$ umístíme tečný prostor $T_x\mathbf{R}^n$ k prostoru \mathbf{R}^n . Obdobně do bodu $x' \in D \subset \mathbf{R}^n$ umístíme tečný prostor $T_{x'}\mathbf{R}^n$. Pro jednoduchost označíme jako $T\mathbf{R}^n$ sjednocení všech tečných prostorů v bodech $x \in D$. Funkce $f_1(x), \dots, f_n(x)$ tvořící vektorovou funkci $f(x)$ budeme interpretovat jako složky *vázaného vektoru* umístěného právě v bodě x . Tuto interpretaci jsme již koneckonců tak trochu používali v předchozím odstavci. Takto to uděláme pro všechny body definičního oboru, o němž obvykle předpokládáme, že je otevřenou množinou v \mathbf{R}^n , nebo je to přímo celý prostor \mathbf{R}^n (samozřejmě jsou možné i jiné situace).

Nechť $D \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Zobrazení

$$f : D \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x) \in T\mathbf{R}^n, \quad (9.57)$$

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)),$$

se nazývá *vektorové pole* na množině D . Vektorové pole f se nazývá *spojité*, resp. *diferencovatelné*, jsou-li všechny jeho složky $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, spojité, resp. diferencovatelné funkce proměnných x_1 až x_n .

Pozn.: Někoho možná napadne, zda už těch prostorů není trochu mnoho. Je jich právě správný počet. Jen je potřeba se v nich dobře vyznat. \mathbf{R}^n je jako obvykle *n-rozměrný topologický prostor* s euklidovskou topologií danou otevřenými kvádry (viz odstavce 9.1.1). Tečný prostor k \mathbf{R}^n v libovolném bodě x , $T_x\mathbf{R}^n$, je *n-rozměrný vektorový prostor*, v němž jsou definovány algebraické operace s vektory — sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, v našem případě reálným číslem. Množina $T\mathbf{R}^n$, kterou jsme zavedli jako sjednocení všech tečných prostorů v bodech definičního oboru vektorového pole, nemá zatím žádnou strukturu. Lze a je i vhodné na ní zavést strukturu topologickou, to však je pro náš účel zbytečné.

Z definice také vidíme, proč pro tuto interpretaci vektorové funkce potřebujeme rovnost $m = n$. Tečný prostor k \mathbf{R}^n musí mít stejnou dimenzi. Grafická představa vektorového pole je nenáročná. Z každého bodu definičního oboru „trčí“ jedna šipka. Má však své nevýhody. Nemůžeme přece nakreslit šipky do všech bodů definičního oboru, protože je jich nekonečně mnoho. A kdybychom se snažili nakreslit šipek co nejvíce, bojovali bychom za chvíli s nepřehledností. Daleko přehlednější grafické znázornění vektorového pole získáme prostřednictvím jeho *integrálních křivek*. Jsou to právě ty křivky, které pak v případě gravitačního či elektrostatického pole nazýváme siločarami, v případě magnetického pole indukčními čarami, v případě proudící tekutiny proudnicemi. Pojem integrální křivky vektorového pole je jednoduchý. Dejme tomu, že v prostoru \mathbf{R}^n je definováno vektorové pole $f(x)$. A představme si v tomto prostoru křivku, parametrizovanou třeba ve tvaru $\mathcal{C} : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n$, takovou, že vektor $f[x(t)]$ je jejím tečným vektorem v bodě $x(t)$. Platí-li to pro všechny přípustné hodnoty parametru t , je křivka \mathcal{C} integrální křivkou vektorového pole $f(x)$. Skutečnost, že nějaký vektor je tečným vektorem určité křivky, již však vyjádřit umíme. Mnohokrát jsme k tomu použili analogie z mechaniky — vztah mezi křivkou a jejím tečným vektorem je totéž co vztah trajektorie a rychlosti částice. Má-li onou „rychlostí“ pro „trajektorii“ \mathcal{C} v daném bodě $x(t)$ být právě vektor $f[x(t)]$, je zápis snadný:

Integrální křivkou vektorového pole $f(x)$ definovaného na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ rozumíme každou křivku

$$\mathcal{C} : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n,$$

pro kterou platí

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)] \quad (9.58)$$

pro všechna $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pro která $x(t) \in D$.

Vektorová rovnice (9.58) je soustavou n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámé funkce $x_1(t)$ až $x_n(t)$ představující parametrické vyjádření integrálních křivek. Platí zde „vícezměrná verze“ Picardovy věty 7.2: Jsou-li všechny složky vektorové funkce

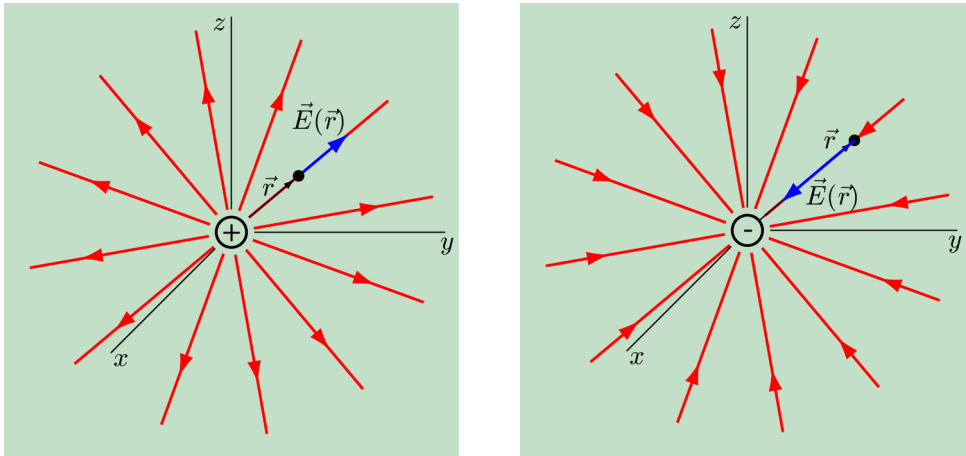
$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

na D spojitě a v každém bodě množiny $(-\varepsilon, \varepsilon) \times D$ splňují Lipschitzovu podmínku, prochází každým bodem této množiny právě jedno řešení soustavy (9.58). Obecné řešení soustavy obsahuje n libovolných konstant. Ty určíme, zadáme-li n souřadnic bodu, kterým křivka prochází. Každým bodem, v němž je řešení soustavy definováno, tak prochází právě jedna křivka. Křivky se neprotínají. Konkrétně si jejich chování ukážeme na několika následujících příkladech. Podobně jako v předchozích částech textu budeme i tentokrát psát nad vektory šipky, budeme-li

mít co do činění s dimenzemi představujícími obvyklou geometrickou či fyzikální realitu, tj. $n \leq 3$.

Příklad 9.68: Siločáry elektrostatického pole bodového náboje

Obrázek 9.40 je znám snad již ze základní školy. Znázorňuje siločáry elektrostatického pole kladného a záporného bodového náboje. Siločáry jsou radiální a u kladného náboje míří ven, u záporného dovnitř. To vyjadřuje známý fakt, že elektrostatická síla, kterou působí náboj budící pole na kladný náboj umístěný do tohoto pole, má směr spojnice „budícího“ a „testovacího“ náboje a je odpudivá, resp. přitažlivá. Zkusme nyní



Obr. 9.40 Siločáry elektrostatického pole bodového náboje.

vypočítat integrální křivky elektrostatického pole ve vakuu a přesvědčit se, že jsou to právě siločáry. Intenzita elektrostatického pole od budícího náboje Q (síla vztažená na jednotkový kladný testovací náboj) je vektorové pole tvaru

$$\vec{E} : \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \ni \vec{r} \longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \in T_{\vec{r}}\mathbf{R}^3 \subset T\mathbf{R}^3,$$

kde $\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor testovacího náboje vzhledem k budícímu, nebo, umístíme-li budící náboj do počátku soustavy souřadnic, polohový vektor daného místa elektrostatického pole. Konstanta $\epsilon_0 \doteq 8,85 \cdot 10^{-12}$ F m⁻¹ je permitivita vakua. Soustava diferenciálních rovnic (9.58) pro integrální křivky vektorového pole $\vec{E}(\vec{r})$ má tvar

$$\dot{x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \dot{y} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \dot{z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

nebo vektorově

$$\dot{\vec{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Aniž bychom rovnice skutečně integrovali, vidíme, že tečný vektor $\dot{\vec{r}}$ vázaný v bodě \vec{r} je souhlasně, resp. nesouhlasně rovnoběžný s polohovým vektorem \vec{r} pro $Q > 0$, resp. $Q < 0$. To platí pro *každý* bod \vec{r} definičního oboru vektorového pole elektrostatické intenzity $\vec{E}(\vec{r})$. Siločáry jsou tedy skutečně takové, jak je známe ze základní výuky elektřiny.

Přesto se pokusme rovnice siločar „pochtivě“ zintegrovat. První z rovnic vynásobme \dot{x} , druhou \dot{y} , třetí \dot{z} a všechno sečteme, pro jednoduchost ještě označme $K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$. Vyjde

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = K \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \implies$$

$$\implies \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right] = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{w}{2} \right) = \frac{K}{\sqrt{w}}.$$

Při poslední úpravě jsme použili dalšího zjednodušujícího označení $w = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Předchozí rovnici již snadno dále upravíme a zintegrujeme,

$$\int \frac{1}{2} \sqrt{w} \, dw = Kt + C \implies w\sqrt{w} = 3(Kt + C).$$

Použijeme-li například počáteční podmínku $w(0) = w_0$, dostaneme

$$w\sqrt{w} = 3Kt + r_0^3, \quad r_0 = \sqrt{w_0}.$$

Dosazením do původních rovnic integrálních křivek pak

$$\dot{x} = \frac{Kx}{3Kt + r_0^3}, \quad \dot{y} = \frac{Ky}{3Kt + r_0^3}, \quad \dot{z} = \frac{Kz}{3Kt + r_0^3}.$$

Odtud například pro funkci $x(t)$ dostaneme

$$\ln x = \frac{1}{3} \ln(3Kt + r_0^3) + \text{konst.} \implies x(t) = k_x \sqrt[3]{3Kt + r_0^3}.$$

Podobně pro funkce $y(t)$ a $z(t)$ je

$$y(t) = k_y \sqrt[3]{3Kt + r_0^3}, \quad z(t) = k_z \sqrt[3]{3Kt + r_0^3}, \quad k_x = \frac{x_0}{r_0}, \quad k_y = \frac{y_0}{r_0}, \quad k_z = \frac{z_0}{r_0}.$$

Pokud z tohoto parametrického vyjádření není přímo vidět, že se jedná o přímky směřující do počátku, stačí, označíme-li $\tau = \frac{1}{r_0} \sqrt[3]{3Kt + r_0^3}$ jako nový parametr. Pak

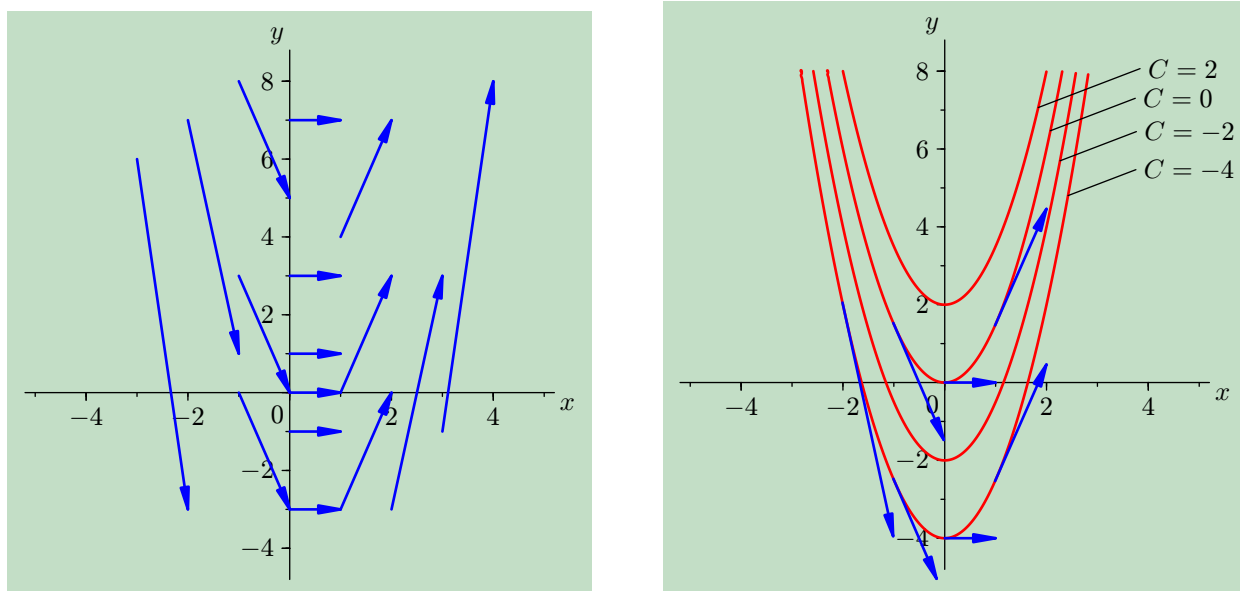
$$x = x_0\tau, \quad y = y_0\tau, \quad z = z_0\tau$$

a parametrické rovnice přímky s počátečním bodem $(0, 0, 0)$ a směrovým vektorem (x_0, y_0, z_0) hned poznáváme. Bod $(0, 0, 0)$ integrální křivky samozřejmě neobsahují, neboť v něm vektorové pole není definováno. Pouze z něj „vycházejí“, nebo do něj „vcházejí“. Bod $(0, 0, 0)$, v němž je umístěn náboj Q , je *zřídlem*, tj. zdrojem, nebo místem zániku siločar. Podrobněji se s touto interpretací seznámíme v odstavci 9.4.1.

Příklad 9.69: Proudění v \mathbf{R}^2

Představme si, že v prostoru \mathbf{R}^2 (euklidovské rovině) sledujeme *ustálené proudění* kapaliny. Slovo „ustálené“ znamená, že rychlost elementu kapaliny je plně určena pouze bodem $\vec{r} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, v němž se element právě nachází, a nezávisí na tom, kdy, tj. v kterém okamžiku, se element v tomto bodě ocitne. V rovině \mathbf{R}^2 je tedy zadáno vektorové pole rychlosti $\vec{v}(\vec{r}) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$. Zadejme je konkrétně třeba jako $\vec{v}(\vec{r}) = (1, 3x)$, tj. $v_1(x, y) = 1$, $v_2(x, y) = 3x$. Naším úkolem je zjistit parametrické vyjádření integrálních křivek, nazývaných v této fyzikální situaci *proudnice*. Vektorové pole $\vec{v}(\vec{r})$ ve vybraných bodech roviny je znázorněno na obrázku 9.41. Pro složky vektorů je použito stejné měřítko jako pro složky bodů. Zkuste si složky znázorněných vektorů spočítat sami a porovnat s obrázkem. Můžete obrázek doplnit o další vektory. Z obrázku vlevo se již tak trochu rýsuje, jak by asi mohly proudnice vypadat. Určíme je z rovnic integrálních křivek (9.58):

$$\dot{x} = v_1(x, y), \quad \dot{y} = v_2(x, y) \implies \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 3x.$$



Obr. 9.41 Proudnice vektorového pole rychlosti v rovině.

Rovnice jsou velice jednoduché. Integrací první z nich, $x(t) = t + x_0$, a dosazením do druhé dostaneme

$$\dot{y} = 3(t + x_0) \implies y = \frac{3}{2}t^2 + 3x_0t + y_0.$$

Hodnoty x_0 a y_0 jsou integrační konstanty a mají význam souřadnic bodu na proudnici, jemuž odpovídá nulová hodnota parametru t . Získali jsme parametrické vyjádření soustavy parabol. Že jde o paraboly, uvidíme ještě zřetelněji, vyloučíme-li z parametrických rovnic parametr a získáme rovnice kartézské,

$$t = x - x_0 \implies y = \frac{3}{2}(x - x_0)^2 + 3x_0(x - x_0) + y_0,$$

$$y = \frac{3}{2}x^2 + C, \quad C = y_0 - \frac{3}{2}x_0^2.$$

Vzhledem k tomu, že x_0 a y_0 jsou libovolné integrační konstanty, je i C libovolná konstanta. Proudnice jsou tvořeny soustavou parabol s vrcholy na ose y . Jedná se o tzv. *jednoparametrickou soustavu křivek*, každá z nich je popsána *jednou* hodnotou konstanty C . I tuto situaci ukazuje obrázek 9.41.

9.3.3 Křivkový integrál druhého druhu

V příkladu 9.39 jsme počítali práci síly (silového pole) $\vec{F}(\vec{r})$ po prostorové křivce \mathcal{C} za předpokladu, že elementární práce této síly byla vyjádřena úplným diferenciálem kmenové funkce. Složky síly byly parciálními derivacemi této funkce podle jednotlivých proměnných. Jak ale vypočteme celkovou práci síly po křivce \mathcal{C} , jestliže elementární práce *nebude* úplným diferenciálem? Jak jsme v příkladu 9.39 upozornili, povede řešení této úlohy k zavedení pojmu křivkového

integrálu druhého druhu. Z hlediska diskuse, zda δA je či není úplným diferenciálem, by mohla úloha na výpočet práce náležet do odstavce 9.2.3. Protože však je silové pole polem vektorovým a křivkový integrál druhého druhu je pojem definovaný obecněji než pro případ vyjádření elementární práce úplným diferenciálem kmenové funkce, zařadili jsme jej do odstavce o vektorových polích.

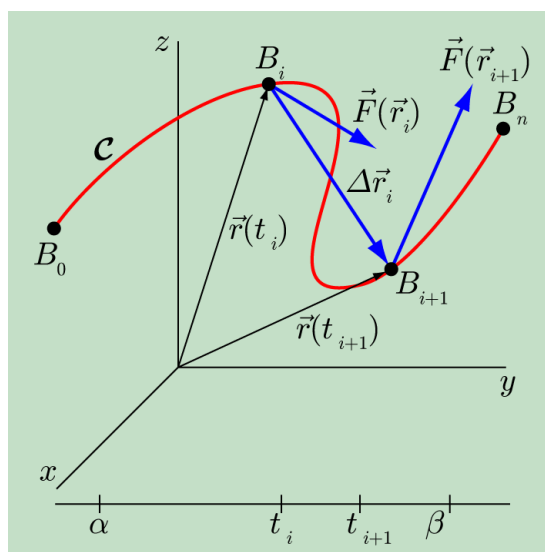
Ve shodě s příkladem 9.39 předpokládejme, že je parametricky zadán po částech hladký rektifikovatelný oblouk

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3.$$

(Definici oblouku si můžete připomenout v odstavci 2.3. prvního dílu.) Na otevřené množině D , která křivku \mathcal{C} obsahuje, zadejme vektorové pole

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)),$$

kteřé je přinejmenším spojitě. Podle potřeby můžeme požadovat i diferencovatelnost, popřípadě spojitost parciálních derivací (v některých příkladech dalších odstavců to skutečně bude třeba a ještě na to upozorníme). Po vzoru postupu v odstavci 2.3.5 rozdělme oblouk na úseky, jak schematicky ukazuje obrázek 9.42. Body množiny



Obr. 9.42 K definici křivkového integrálu druhého druhu.

$$D = \{\alpha = t_0, t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n = \beta\}$$

tvorí dělení intervalu parametrů $[\alpha, \beta]$ a odpovídají jim postupně body $B_0, \dots, B_i, B_{i+1}, \dots, B_n$ na oblouku \mathcal{C} . (Od značení v odstavci 2.3.5, kde byly body na oblouku značeny písmeny A s indexem, zde upouštíme, neboť symbol A zůstane rezervován pro práci — abeceda prostě

někdy nestačí.) Hodnoty vektorového pole $\vec{F}(\vec{r})$ v dělicích bodech jsou $\vec{F}(\vec{r}_i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Nahradíme-li skutečný průběh trajektorie \mathcal{C} mezi body B_i a B_{i+1} úsečkou a skutečný průběh síly mezi nimi konstantním vektorem $\vec{F}(\vec{r}_i)$, můžeme přibližně vyčíslit práci vykonanou silovým polem $\vec{F}(\vec{r})$ mezi body B_i a B_{i+1} . Celková práce je pak, opět přibližně, vyjádřena součtem těchto příspěvků,

$$\Delta A_i \doteq \vec{F}(\vec{r}_i) \Delta \vec{r}_i, \quad A(\mathcal{C}) \doteq A_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \Delta \vec{r}_i,$$

$$A_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^{n-1} \{F_1(x(t_i), y(t_i), z(t_i))[x(t_{i+1}) - x(t_i)] + F_2(x(t_i), y(t_i), z(t_i))[y(t_{i+1}) - y(t_i)] + F_3(x(t_i), y(t_i), z(t_i))[z(t_{i+1}) - z(t_i)]\},$$

kde

$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i) = (x(t_{i+1}) - x(t_i), y(t_{i+1}) - y(t_i), z(t_{i+1}) - z(t_i)).$$

Stejně jako v odstavci 2.3.5 využijeme pro vyjádření složek vektoru $\Delta \vec{r}_i$ Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Podle ní existují uvnitř intervalu $[t_i, t_{i+1}]$ čísla ξ_i , η_i a ζ_i tak, že platí

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= \dot{x}(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= \dot{y}(\eta_i)(t_{i+1} - t_i), \\ z(t_{i+1}) - z(t_i) &= \dot{z}(\zeta_i)(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Hodnotu $A_{\mathcal{D}}$, která přibližně vyjadřuje celkovou práci $A(\mathcal{C})$ a odpovídá dělení \mathcal{D} , tak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$A_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n-1} \{F_1(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\dot{x}(\xi_i) + F_2(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\dot{y}(\eta_i) + F_3(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\dot{z}(\zeta_i)\}(t_{i+1} - t_i).$$

Označme

$$W(t) = F_1(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{v}(t).$$

Funkce $W(t)$ je na intervalu $[\alpha, \beta]$ spojitá a existuje proto integrál

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} W(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{v}(t) dt.$$

Právě tento výraz je definiční pro křivkový integrál druhého druhu.

Pro vektorové pole $\vec{F}(\vec{r})$ spojitě na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^3$ a hladký rektifikovatelný oblouk $\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \mathbf{R}^3$, pro který $\mathcal{C}([\alpha, \beta]) \subset D$, značíme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{v}(t) dt, \quad (9.59)$$

kde $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}$. Hovoříme o *křivkovém integrálu druhého druhu* z vektorového pole \vec{F} po oblouku \mathcal{C} .

K tomu, abychom si byli jisti, že tento integrál skutečně *přesně* určuje práci silového pole $\vec{F}(\vec{r})$ po oblouku \mathcal{C} , musíme ještě dokázat, že $\lim_{\nu(\mathcal{D})} |A_{\mathcal{D}} - A(\mathcal{C})| = 0$ („praktici“ mohou rovnou přejít k příkladu 9.70). Je zde totiž problém. Vzhledem k tomu, že obecný i -tý sčítanec ve výrazu $A_{\mathcal{D}}$ obsahuje funkční hodnoty zúčastněných funkcí nejen v jediném bodě intervalu $[t_{i+1}, t_i]$ (kromě bodu t_i jsou ve hře neznámé a hlavně obecně různé body $\xi, \eta, \zeta \in (t_{i+1}, t_i)$), nelze výraz $A_{\mathcal{D}}$ jednoduše hned odhadnout pomocí dolních a horních součtů funkce $W(t)$. Musíme postupovat opatrněji a připomenout si Dodatek K prvního dílu. Označme $M = \max\{|F_1(t)|, |F_2(t)|, |F_3(t)| \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ a počítejme rozdíl $|A_{\mathcal{D}} - \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i)(t_{i+1} - t_i)|$. Platí

$$\begin{aligned} \left| A_{\mathcal{D}} - \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \{F_1(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i)) [\dot{x}(\xi_i) - \dot{x}(t_i)] + \right. \\ &+ F_2(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i)) [\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(t_i)] + F_3(x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i)) [\dot{z}(\zeta_i) - \dot{z}(t_i)]\} (t_{i+1} - t_i) \left. \right| \leq \\ &\leq M \sum_{i=0}^{n-1} \{|\dot{x}(\eta_i) - \dot{x}(t_i)| + |\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(t_i)| + |\dot{z}(\zeta_i) - \dot{z}(t_i)|\} (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Například pro rozdíl horního a dolního součtu funkce $\dot{x}(t)$ při dělení \mathcal{D} platí

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\dot{x}(\xi_i) - \dot{x}(t_i)|(t_{i+1} - t_i) \leq U(\dot{x}, \mathcal{D}) - L(\dot{x}, \mathcal{D}).$$

(Dokážete to zdůvodnit?) Podle prvního kritéria integrability aplikovaného na funkci $\dot{x}(t)$ (Dodatek K, věta K.1) existuje k číslu $\frac{\varepsilon}{3M}$, $\varepsilon > 0$, takové dělení \mathcal{D}_1 intervalu $[\alpha, \beta]$, že platí

$$U(\dot{x}, \mathcal{D}_1) - L(\dot{x}, \mathcal{D}_1) < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Podobně pro funkce $\dot{y}(t)$ a $\dot{z}(t)$ dostaneme

$$U(\dot{y}, \mathcal{D}_2) - L(\dot{y}, \mathcal{D}_2) < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad U(\dot{z}, \mathcal{D}_3) - L(\dot{z}, \mathcal{D}_3) < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Pro dělení \mathcal{D} , které bude společným zjemněním dělení \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 a \mathcal{D}_3 , dostaneme nakonec $|A_{\mathcal{D}} - \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i)(t_{i+1} - t_i)| < \varepsilon$. Tato nerovnost zůstane v platnosti pro všechna dělení ještě jemnější než \mathcal{D} , tj.

$$\lim_{\nu(\mathcal{D}) \rightarrow 0} |A_{\mathcal{D}} - A(\mathcal{C})| = 0.$$

Příklad 9.70: Práce po různých obloucích

Pro jednoduchost uvažujme o práci vektorového pole jen v rovině. Znamená to, že je zadáno silové (vektorové) pole v \mathbf{R}^2 , $\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, a oblouk $\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$ je také rovinný. Konkrétně zadejme třeba $\vec{F}(\vec{r}) = (px^2y, q(x-y))$, kde $p = 1 \text{ N m}^{-3}$ a $q = 1 \text{ N m}^{-1}$ jsou jen rozměrové konstanty a dále je nebudeme vypisovat. Zajímá nás, jakou práci vykoná toto silové pole působící na částici při přemístění z bodu $A = (0, 0)$ m do bodu $B = (1, 1)$ m po úsečce $y = x$, resp. po části paraboly $y = x^2$.

Použijeme definičního vztahu pro křivkový integrál, který má pro rovinný případ tvar

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [F_1(x(t), y(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t))\dot{y}(t)] dt.$$

Provedme výpočet nejprve pro úsečku \mathcal{U} , kterou parametrizujeme třeba tak, že proměnnou x budeme považovat přímo za parametr, tj. $x(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Pak také $y(t) = t$, neboť body na úsečce splňují kartézskou rovnici $y = x$. Odtud $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = 1$ a

$$F_1(x(t), y(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t))\dot{y}(t) = t^3 \implies A(\mathcal{U}) = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}.$$

(Práce vyšla v jednotkách joule.) Obdobně jednoduchý je výpočet pro parabolu \mathcal{P} . Opět považujeme x za parametr, $x(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Pak $y(t) = t^2$, $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = 2t$,

$$F_1(x(t), y(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t))\dot{y}(t) = t^4 + 2t(t - t^2) = t^4 - 2t^3 + 2t^2,$$

$$A(\mathcal{P}) = \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + 2t^2) dt = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{30}.$$

Skutečnost, že práce silového pole závisí obecně na tvaru oblouku, není překvapivá. Čekali jsme to, neboť výraz pro elementární práci v našem příkladu není úplným diferenciálem.

Všimli jste si, že jsme v příkladu 9.70 vnesli do výpočtu ještě další upřesnění? Stanovili jsme totiž ještě *předtím*, než jsme oblouk parametrizovali, jeho počáteční a koncový bod. Tím jsme řekli, jak je oblouk *orientován*. Abychom tuto orientaci zachovali, nemůžeme už volit parametrizaci zcela libovolně, ale tak, aby byla dodržena orientace oblouku. Znamená to, že nejnižší hodnotě parametru musí odpovídat počáteční bod oblouku a nejvyšší hodnotě bod koncový. Každá taková parametrizace se nazývá *slučitelná*, nebo též *kompatibilní*, se zvolenou orientací oblouku. Parametrizace, která by orientaci oblouku „otočila“, je s ní *neslučitelná*, čili *nekompatibilní*. Z hlediska orientace oblouku můžeme porovnávat parametrizace i navzájem. Dvě parametrizace slučitelné s orientací oblouku, stejně jako dvě parametrizace s ní neslučitelné,

jsou *souhlasné*, dvě parametrizace, z nichž jedna je s orientací oblouku slučitelná a druhá ne, jsou *nesouhlasné*.

Příklad 9.71: Závisí práce na parametrickém vyjádření daného oblouku?

Někomu se otázka položená v názvu příkladu může zdát zbytečná. Někomu proto, že uvažuje tak, že silovému poli „je jedno“, jak si my parametrizujeme oblouk, takže práce na parametrizaci nezávisí. Jiný uvažuje hlouběji a uvědomí si, že různé parametrizace oblouku znamenají, že se dvě částice, jejichž trajektorie je takto různě parametrizována, pohybují po křivce, kterou opisují, různě rychle, do téhož bodu dorazí v různých okamžicích, atd. Proč by tedy práce neměla na parametrizaci záviset?

Než obecně ukážeme, jak to je, vypočteme práci pro zadání z předchozího příkladu třeba pro dvě různé parametrizace paraboly souhlasné s orientací oblouku od bodu $A = (0, 0)$ m do bodu $B = (1, 1)$ m. Výpočet pro jednu takovou parametrizaci jsme již provedli, zvolme tedy jinou, například $x(t) = -1 + 2t$, $y = (-1 + 2t)^2$, $\dot{x}(t) = 2$, $\dot{y}(t) = 4(-1 + 2t)$, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Ověřte si její správnost i kompatibilitu s orientací oblouku. Při této parametrizaci platí

$$\begin{aligned} F_1(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t)) \dot{y}(t) &= 2(-1 + 2t)^4 + 4[(-1 + 2t) - (-1 + 2t)^2](-1 + 2t) = \\ &= 2(-1 + 2t)^2 [(-1 + 2t)^2 + 2 - 2(-1 + 2t)], \\ A'(\mathcal{P}) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 2(-1 + 2t)^2 [(-1 + 2t)^2 + 2 - 2(-1 + 2t)] dt. \end{aligned}$$

Po substituci $u = (-1 + 2t)$ vyjde

$$A'(\mathcal{P}) = \int_0^1 (u^4 - 2u^3 + 2u^2) du = \frac{11}{30}.$$

Výsledek je pro obě parametrizace stejný. Je to náhoda? Porovnáte-li tvar integrandu po provedení substituce s integrandem v předchozím příkladu, hned vás napadne, že o náhodu nejde. Jeden příklad samozřejmě není důkazem a je třeba prodiskutovat vliv parametrizace obecně.

Příklad 9.71 naznačuje, že práce silového pole po oblouku, tj. obecně křivkový integrál druhého druhu, nezávisí na konkrétním parametrickém vyjádření oblouku. Uvažujme tedy obecně o dvou souhlasných parametrizacích téhož orientovaného oblouku v \mathbf{R}^3 ,

$$\bar{\mathcal{C}} : [\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \ni u \longrightarrow (\bar{x}(u), \bar{y}(u), \bar{z}(u)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3, \quad \mathcal{C}([\alpha, \beta]) = \bar{\mathcal{C}}([\bar{\alpha}, \bar{\beta}]),$$

a vektorovém poli v \mathbf{R}^3 ,

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Skutečnost, že $\bar{\mathcal{C}}$ a \mathcal{C} jsou pouze dvě různé parametrizace téhož hladkého oblouku, znamená, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $[\alpha, \beta]$ na interval $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$

$$\psi : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow u = \psi(t) \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \quad x(t) = \bar{x}[\psi(t)], \quad y(t) = \bar{y}[\psi(t)], \quad z(t) = \bar{z}[\psi(t)].$$

Jde-li o souhlasné parametrizace, jak předpokládáme, je $\bar{\alpha} = \psi(\alpha)$, $\bar{\beta} = \psi(\beta)$. Je-li funkce $u = \psi(t)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$ prostá a spojitá, musí na něm být buď rostoucí, nebo klesající. První případ odpovídá souhlasným, druhý nesouhlasným parametrizacím.

Vyjádříme nyní nejprve křivkový integrál druhého druhu z vektorového pole $\vec{F}(\vec{r})$ při parametrizaci \mathcal{C} ,

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} \{F_1(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + F_3(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t)\} dt, \quad (9.60)$$

a dosadíme $x(t) = \bar{x}[\psi(t)]$, $\dot{x}(t) = \bar{x}'(u)\dot{\psi}(t)$, a podobně pro $y(t)$ a $z(t)$. Symbolem $\bar{x}'(u)$ jsme označili derivaci funkce $\bar{x}(u)$ podle parametru u . Získáme vztah, který je složitý jen zdánlivě,

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} \{F_1(\bar{x}(\psi(t)), \bar{y}(\psi(t)), z(\psi(t))) \bar{x}'(\psi(t)) +$$

$$+ F_2(\bar{x}(\psi(t)), \bar{y}(\psi(t)), z(\psi(t))) \bar{y}'(\psi(t)) + F_3(\bar{x}(\psi(t)), \bar{y}(\psi(t)), z(\psi(t))) \bar{z}'(\psi(t))\} \dot{\psi}(t) dt.$$

Zjednodušíme jej substitucí $u = \psi(t)$ a použitím substituční metody I pro určitý integrál z odstavce 2.3.2 prvního dílu na tvar

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \{F_1(\bar{x}(u), \bar{y}(u), \bar{z}(u)) \bar{x}'(u) + F_2(\bar{x}(u), \bar{y}(u), \bar{z}(u)) \bar{y}'(u) + F_3(\bar{x}(u), \bar{y}(u), \bar{z}(u)) \bar{z}'(u)\} du. \quad (9.61)$$

Uvědomíte si, co jsme dostali? Přece křivkový integrál druhého druhu z vektorového pole $\vec{F}(\vec{r})$ po oblouku s parametrickým vyjádřením $\bar{\mathcal{C}}$. A právě takový výsledek jsme očekávali: $A(\mathcal{C}) = A(\bar{\mathcal{C}})$.

Pozn.: Co kdybychom uvažovali o dvou nesouhlasných parametrizacích oblouku? Pak by platilo $\psi(\alpha) = \bar{\beta}$ a $\psi(\beta) = \bar{\alpha}$. Integrály vypočtené pro tyto parametrizace by se lišily znaménkem. Souvisí to bezprostředně se substituční metodou I pro určitý integrál (odstavec 2.3.2 prvního dílu) a s vlastností integrálu změnit znaménko při záměně mezí.

Věta 9.11 (Nezávislost na parametrizaci): *Nechť*

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

je diferencovatelné vektorové pole definované na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^3$. Předpokládejme, že C je hladký rektifikovatelný oblouk ležící v D . Pak křivkový integrál z vektorového pole $\vec{F}(\vec{r})$ po oblouku C

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}}(t) \, dt$$

nezávisí na volbě parametrizace $C : [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \vec{r}(t)$ oblouku C , až na případné znaménko.

Poznamenejme ještě, že křivkový integrál druhého druhu z vektorového pole po oblouku, který je po částech hladký a složený z N hladkých částí, se počítá jako součet všech integrálů po hladkých částech oblouku,

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \, d\vec{r} + \dots + \int_{C_N} \vec{F} \, d\vec{r}.$$

Zdůrazníme ještě jednu důležitou vlastnost křivkového integrálu druhého druhu, které jsme si všimli v příkladu 9.39. Byla to nezávislost práce konzervativního silového pole na tvaru oblouku. Tento výsledek nyní zobecníme na křivkový integrál druhého druhu z vektorového pole, aniž bychom mu připisovali fyzikální význam. Nejprve uvedeme dva ilustrační příklady.

Příklad 9.72: Práce centrálního silového pole v rovině

Centrální silové pole v rovině je dáno například vektorovou funkcí

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right),$$

definovanou na množině $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, která je dvojnásobně souvislou oblastí. Integrand ve výrazu pro práci tohoto silového pole po křivce (křivkový integrál druhého druhu) je

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy. \quad (9.62)$$

Existuje k němu kmenová funkce? Protože jsme již vyřešili příklad 9.43, nemusíme teď už nic počítat. Víme z něj, že kmenovou funkcí je například funkce

$$f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Je definována dokonce na celé oblasti D , přestože je to oblast „děravá“ (není jednoduše souvislá). Práce po uzavřeném oblouku \mathcal{C} ležícím v D by měla vyjít nulová. Zkusíme provést výpočet pro kružnici o poloměru R se středem v počátku soustavy souřadnic. Parametrizujeme ji vztahy $x(\varphi) = R \cos \varphi$, $y(\varphi) = R \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Platí pak

$$\begin{aligned} A(\mathcal{C}) &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dx + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{R \cos \varphi}{R^3} (-R \sin \varphi) + \frac{R \sin \varphi}{R^3} (R \cos \varphi) \right\} \, d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Z fyzikálního pohledu nás výsledek nepřekvapuje. Jedná se totiž o velice speciální případ, kdy tečna k oblouku, určující směr elementárního posunutí působitě síly, je v každém bodě kolmá k síle. Odpovídající elementární práce je proto nulová a stejně tak výsledný integrál, jako „součet“ elementárních prací.

Příklad 9.73: Práce necentrálního silového pole v rovině

V tomto příkladu zvolme jiné silové pole, definované však opět na oblasti $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \left(-\frac{y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)} \right).$$

Připadá vám povědomé? Ano — setkali jsme se s ním v příkladu 9.41, kde však jeho složky byly označeny jako $p(x, y)$ a $q(x, y)$. Z příkladu 9.41 již víme, že parciální derivace první složky podle proměnné y a parciální derivace druhé složky podle x jsou na oblasti D spojitě a jsou si rovny. Nemusíme je už počítat. Také známe kmenovou funkci

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

popřípadě

$$g(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pro } y > 0 \text{ a } (y = 0) \wedge (x < 0), \quad g(x, y) = 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pro } y < 0.$$

Na podmnožinách oblastí $D_f, D_g \subset D$, na nichž jsou obě tyto funkce definovány, se liší o konstantu. Definiční obory D_f a D_g jsou ovšem různé. Konkrétně si vzpomeňte, že $D_f = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbf{R}\}$, $D_g = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$.

Vypočteme křivkový integrál z vektorového pole $\vec{F}(\vec{r})$ po stejné kružnici jako v příkladu 9.72. I když máme k dispozici kmenovou funkci (pro určitost vezměme třeba $g(x, y)$), nemůžeme vyčíslit hodnotu křivkového integrálu jako rozdíl funkčních hodnot funkce $g(x, y)$ v koncovém a počátečním bodě integračního oblouku. Byl by to sice výpočet velice pohodlný (koncový bod uzavřeného oblouku splývá s počátečním, jako výsledek by proto vyšla nula), ale nesprávný. Uzavřený oblouk obcházející „obstrukční“ bod $(0, 0)$ musí totiž vždy překřížit zakázanou část osy x a projít tak bodem, v němž kmenová funkce není definována. Uvidíme to při přímém výpočtu integrálu. Platí

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy \right) = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \, d\varphi = 2\pi.$$

„Díra“ v bodě $\{(0, 0)\}$ způsobila příspěvek 2π k hodnotě integrálu. Kdybychom kružnici obešli dvakrát, byl by příspěvek 4π , pokud bychom ji parametrizovali tak, že by byla orientována v záporném smyslu, dostali bychom výsledek $-2\pi k$ podle počtu oběhů k , atd.

Všimněme si ještě fyzikálního významu nenulového výsledku: vektor $\vec{r} = (x, y)$ je k integrační křivce (kružnici) v každém jejím bodě kolmý, vektor elementárního posunutí $d\vec{r} = (-R \sin \varphi d\varphi, R \cos \varphi d\varphi)$ je naopak ke kružnici tečný. Vektor síly je ke kružnici v každém jejím bodě rovněž tečný a je souhlasně orientovaný s kladným směrem oběhu po kružnici. Elementární práce je tedy v každém bodě kladná a „součet“ elementárních prací, daný právě křivkovým integrálem druhého druhu, je také kladný.

Ještě se nabízí otázka, jak by to dopadlo s křivkovým integrálem, kdyby uzavřený oblouk, který je integračním oborem, nepřekračoval „zakázanou“ poloosu x , takže by celý ležel v jednoduše souvislé oblasti $D_g = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$, na niž existuje kmenová funkce. V takovém případě lze integrál počítat jako rozdíl funkčních hodnot kmenové funkce v koncovém a počátečním bodě integračního oblouku. Výsledkem je nulová hodnota.

A nyní již směřujeme ke slíbenému tvrzení pro křivkový integrál v trojrozměrném případě.

Vektorové pole $\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ se nazývá *konzervativní na oblasti D* , jestliže na D existuje funkce $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ tak, že výraz $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ je jejím úplným diferenciálem.

Věta 9.12 (Nezávislost na tvaru oblouku): Předpokládejme, že vektorové pole $\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ je konzervativní na oblasti D . Pak křivkový integrál druhého druhu z $\vec{F}(\vec{r})$ po oblouku C ležícím v D nezávisí na tvaru oblouku, ale pouze na jeho počátečním bodu A a koncovém bodu B . Platí

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = f(B) - f(A),$$

kde f je libovolná z kmenových funkcí výrazu $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$. Je-li C uzavřená křivka, tj. počáteční bod splývá s koncovým, je integrál z konzervativního vektorového pole nulový.

Uvědomme si, jak máme větu 9.12 správně číst. Napomůže nám výsledek příkladu 9.73. Vektorové pole

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

jehož práci jsme počítali, bylo sice definováno na oblasti $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, avšak kmenová funkce k němu existovala pouze na oblasti $D' = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$, oproti D zmenšené o kladnou poloosu x a tedy již jednoduše souvislé. Vektorové pole $\vec{F}(\vec{r})$ nebylo konzervativní na celé oblasti D , ale pouze na D' . Větu 9.12 lze proto aplikovat pouze na oblouk, který leží v D' , a nepřekračuje žádnou „zakázanou hranici“, v tomto případě nezápornou poloosu x . Správnou interpretaci věty bychom si také mohli pojistit zesíleným předpokladem, že oblast D

je jednoduše souvislá.

K větě 9.12 dodejme, že při změně orientace oblouku, tj. při záměně koncového bodu za počáteční, se změní znaménko integrálu. Z hlediska fyzikální interpretace křivkového integrálu druhého druhu například jako práce silového pole po křivce to znamená, že při jednom směru pohybu částice po její trajektorii síla $\vec{F}(\vec{r})$ práci *koná*, $A > 0$, při změně směru na opačný práci *spotřebává*, $A < 0$. Větu nemusíme dokazovat, stačí se vrátit k příkladu 9.39. Pokud se tedy například částice pohybuje v gravitačním poli Země tak, že se po jakkoli dlouhé a jakkoli křivolaké pouti vrátí do výchozího bodu, je celková práce vykonaná gravitační silou nulová. Práce vykonaná se kompenzovala prací spotřebovanou.

Pozn.: Předchozí výsledek se může zdát neslučitelný s praxí a tak trochu „proti zdravému rozumu“. Vždyť přece, budeme-li konat pěší okružní cestu s těžkým závažím, bude práce gravitační síly po absolvování okruhu nulová, ale my se velice „nadřeme“. Odpověď na tuto fyzikální otázku je snadná. Její základ spočívá v tom, že naše „dřina“ se neměří jen fyzikální prací gravitační síly. Ve hře jsou síly další a některé z nich nejsou konzervativní (síly působící při smršťování a povolování svalstva, apod.)

9.3.4 Cvičení

1. Určete Jacobiho matice následujících vektorových polí $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ na $D \subset \mathbf{R}^3$:

$$\text{a) } \vec{F} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + y, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + x, \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \cos z \right),$$

$$\text{b) } \vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - 2z, \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + z^2, \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - 2x + 2yz \right),$$

$$\text{c) } \vec{F} = \left(\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, \frac{z}{xy} \right),$$

$$\text{d) } \vec{F} = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z^2, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} + 2xz \right),$$

$$\text{e) } \vec{F} = \left(xyz^2 + \sin x, x^2yz + \frac{1}{y}, y^2xz \right),$$

$$\text{f) } \vec{F} = \left(2xy^2z + \frac{1}{1+x^2}, \frac{y}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}} + 2x^2yz, \frac{z}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}} + x^2y^2 \right).$$

2. Pro vektorová pole z předchozí úlohy rozhodněte, zda jsou konzervativní (pro jednoduchost uvažujte všechna pole na takové podmnožině D jejich definičního oboru, která je jednoduše souvislou oblastí). V kladném případě určete kmenovou funkci f výrazu $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

3. Určete a zakreslete integrální křivky následujících vektorových polí na $D \subset \mathbf{R}^2$:

$$\text{a) } \vec{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right), D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

$$\text{b) } \vec{F} = \left(\frac{1}{1+(x+y)^2}, \frac{1}{1+(x+y)^2} \right), D = \mathbf{R}^2,$$

$$\text{c) } \vec{F} = \left(\frac{2x}{y}, -\frac{x^2}{y^2} \right), D = (0, \infty) \times (0, \infty),$$

$$d) \vec{F} = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2} \right), D = \mathbf{R}^2.$$

Návod: Parametrické rovnice $x = x(s)$, $y = y(s)$ vektorového pole $\vec{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ splňují soustavu rovnic $\dot{x} = F_1[x(s), y(s)]$, $\dot{y} = F_2[x(s), y(s)]$. V úloze c) ukažte, že $\dot{y} = \left(-\frac{x}{2y}\right)\dot{x}$, a odtud $\frac{d}{ds}(y^2 + \frac{1}{2}x^2) = 0$. V úloze d) postupujte podobně a ukažte, že pro integrální křivky platí $\frac{d}{ds}(y^2 - x^2) = 0$.

4. Vypočítejte práci vektorového pole \vec{F} po zadané křivce \mathcal{C} . V případě konzervativních polí ověřte správnost výpočtu použitím kmenové funkce.

$$a) \vec{F} = (-x, -y, -z), \mathcal{C} \text{ je jeden závit šroubovice } x = \cos t, y = \sin t, z = t, t \in [0, 2\pi],$$

$$b) \vec{F} = (yz, xz, xy), \mathcal{C} \text{ je oblouk paraboly } x = t, y = t, z = t^2, t \in [0, 1],$$

$$c) \vec{F} = (yz, xz, xy), \mathcal{C} \text{ je úsečka } x = t, y = t, z = t, t \in [0, 1],$$

$$d) \vec{F} = (xyz, xyz, xyz), \mathcal{C} \text{ je oblouk paraboly } x = t, y = t, z = t^2, t \in [0, 1],$$

$$e) \vec{F} = (xyz, xyz, xyz), \mathcal{C} \text{ je úsečka } x = t, y = t, z = t, t \in [0, 1],$$

$$f) \vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, 3y^2, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \right), \mathcal{C} \text{ je závit šroubovice } x = \cos t, y = 2t, z = \sin t, t \in [0, 2\pi].$$

9.4 Diferenciální operátory

I když jsme se o diferenciálních operátorech ještě explicitně nezmínili, už jsme se s nimi setkali dokonce několikrát. Za nejjednodušší diferenciální operátor můžeme považovat „příkaz k provedení derivace“ funkce jedné proměnné. Stačí derivaci vhodně zapsat:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)].$$

Operátor derivace „působí“ na funkci $f(x)$ a výsledkem tohoto působení je derivace funkce. Korektnější slovní popis toho, co je to operátor derivace, je rovněž jednoduchý. Jde o zobrazení množiny $C^1(a, b)$ diferencovatelných funkcí na intervalu (a, b) do množiny $\mathcal{F}(a, b)$ (obecně všech) funkcí definovaných na (a, b) ,

$$\frac{d}{dx} : C^1(a, b) \ni f(x) \longrightarrow \frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x) \in \mathcal{F}(a, b).$$

Pozn.: Označením $C(a, b)$ rozumíme množinu všech funkcí spojitých na (a, b) , značíme také $C^0(a, b)$, označením $C^k(a, b)$, $k \leq 1$ pak množinu všech funkcí majících na (a, b) derivace do řádu k včetně.

Diferenciálním operátorem je i derivace (diferencovatelné) vektorové funkce na $D_f \subset \mathbf{R}^n$

$$D : C^1(D_f) \ni f(x) \longrightarrow Df(x) \in \mathcal{F}(D_f).$$

Nebo také gradient přiřazující skalární funkci (nebo též skalárnímu poli) $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ vektorové pole $\text{grad } f(x)$,

$$\text{grad} : f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right).$$

Konečně i rotaci, o níž jsme se předběžně zmínili v odstavci 9.2.4, lze chápat jako diferenciální operátor. Ten přiřazuje vektorové funkci $\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$, či přesněji vektorovému poli, opět vektorové pole

$$\begin{aligned} \text{rot} : \vec{F}(\vec{r}) &\longrightarrow \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \\ &= \left(\frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial z}, \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

V tomto odstavci si všimneme diferenciálních operátorů podrobněji a uvedeme je do souvislosti i s fyzikálními motivacemi a aplikacemi.

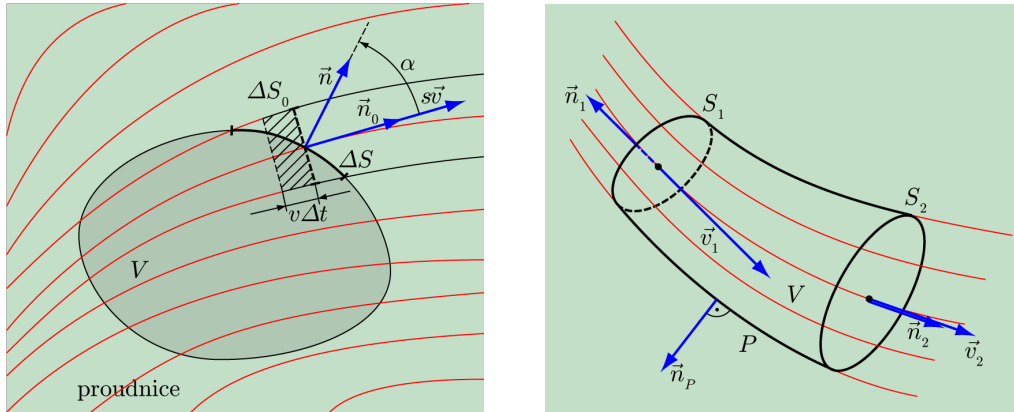
9.4.1 Zřídla a víry — divergence a rotace vektorové funkce

Pojmu „zřídlo“ jsme se dotkli v příkladu 9.68 o siločarách elektrostatického pole. Vzpomeňme si, že siločáry jakoby vycházely z náboje, nebo do něj vcházely. Naproti tomu proudnice v příkladu 9.69 „nikde nevznikají ani nezanikají“. Tato odlišnost souvisí s výsledkem působení dalšího diferenciálního operátoru, operátoru *divergence*, na dané vektorové pole.

Příklad 9.74: Zákon zachování hmotnosti při proudění tekutiny

Příklad zdánlivě nesouvisí s nějakými zřídly nebo diferenciálními operátory. Pomůže nám však vybudovat potřebný aparát pro matematický zápis zákona zachování hmotnosti při proudění a jeho prostřednictvím se pak k popisu zřidel pomocí diferenciálních operátorů dostat.

Představte si tlusté potrubí s pevnými neděravými stěnami, jímž proudí plyn. Hmotnost plynu, která na začátku potrubí do něho vteče, zase na konci vyteče. Nemůže se nikde ztrácet, ani vznikat. Připevníme-li do potrubí malý balónek naplněný plynem, bude jej plyn proudící potrubím obtékat a zase bude platit zákon zachování „co vteče, to vyteče“. Co se stane, když balónek praskne? Experimentátor, který měří průtok plynu na konci potrubí, naměří větší množství plynu než jeho kolega na začátku potrubí. Prasklý balónek se stal zdrojem plynu navíc. Otázkou je, jak to ovlivnilo obraz proudnic, které jsou integrálními křivkami vektorového pole rychlosti plynu. Pokusíme se matematicky popsat obecnou situaci. I když jde fyzikálně o jiný případ, povedeme úvahu formálně podobně, jako tomu bylo v příkladu 9.48 o rozložení tlaku v kapalině. Představme si, že nějaká tekutina (kapalina, nebo plyn) proudí prostorem. Proudění není obecně ustálené, takže se vektorové pole rychlosti a odpovídající obraz proudnic mění s časem, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$. Také hustota $s(\vec{r}, t)$ závisí na prostorových proměnných a na čase. Pro připomenutí terminologie poznamenejme, že $s : \mathbf{R}^4 \ni (x, y, z, t) \rightarrow s(x, y, z, t) \in \mathbf{R}$ je skalární funkce čtyř proměnných, $\vec{v} : \mathbf{R}^4 \ni (x, y, z, t) \rightarrow \vec{v}(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3$ je vektorová funkce týchž proměnných. V tekutině zvolme libovolný objem V obepnutý plochou S . Orientace plochy je v každém jejím bodě určena vektorem jednotkové vnější normály \vec{n} (obrázek 9.43). Hmotnost tekutiny ve vymezeném objemu V se obecně s časem mění. Hraniční plochou tekutina do objemu jedná vtéká (tam, kde proudnice míří dovnitř objemu), jedná vytéká (v místech, kde proudnice z objemu vycházejí). Celkový úbytek hmotnosti v objemu V vztahovaný na jednotku času musí být kompenzován celkovým množstvím tekutiny, která za jednotku času vyteče hraniční plochou. Přesně to je zákon zachování hmotnosti. Celkovou hmotnost a její časový úbytek vyjádříme snadno. Hmotnost elementárního objemu ΔV umístěného v bodě \vec{r} je přibližně vyjádřena vztahem $\Delta m = s(\vec{r}, t) \Delta V$. Přesnost vyjádření je tím lepší, čím je ΔV menší. (Nepřesnost vzniká tím, že skutečný průběh hustoty uvnitř ΔV nahrazeneme hodnotou v bodě \vec{r} , podobně, jak tomu bylo v příkladu 9.48, kde jsme si oprávněnost takového



Obr. 9.43 K zákonu zachování hmotnosti v proudící tekutině.

postupu zdůvodnili v poznámce 1.) Celková hmotnost a její úbytek jsou pak již přesně dány integrály

$$m(t) = \int_V s(\vec{r}, t) dV, \quad -\frac{dm(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V s(\vec{r}, t) dV = \int_V \left(-\frac{\partial s(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) dV. \quad (9.63)$$

Pozn.: Proč se v poslední úpravě najednou objevila parciální derivace funkce $s(\vec{r}, t)$, když před integrálem byla derivace obyčejná? Rozdíl spočívá právě v onom „před integrálem“ a „za integrálem“. Hmotnost $m(t)$ jsme dostali integrací v mezích všech prostorových proměnných, takže výsledek již na nich nezávisí. Derivace funkce $m(t)$, a tedy celého integrálu, je obyčejná. Pokud však operátor derivace „zasuneme“ za integrál, což je přípustné, neboť při integraci podle jiných proměnných zacházíme s proměnnou t jako s konstantou, musíme „za integrálem“ již vzít v úvahu, že funkce s je formálně funkcí více proměnných, její derivace jsou proto parciální.

Nyní je třeba, abychom vyjádřili *hmotnostní tok* tekutiny hraniční plochou. Tento problém vyžaduje trochu víc přemýšlení. Na obrázku 9.43 vlevo je vyznačena ploška ΔS s jednotkovou vnější normálou \vec{n} . Tato normála svírá s vektorem \vec{v} , a tedy i $s\vec{v}$, v daném bodě obecný úhel α . Kolik tekutiny plochou proteče, je na tomto úhlu samozřejmě závislé. Kdyby například byl roven 90° , byla by ploška tečná k proudnicím a nic by přes ni neproteklo. Naopak, nejvíc proteče, je-li $\alpha = 0^\circ$. Tuto vlastnost má jiná (čárkovaná) ploška na obrázku, kterou jsme označili ΔS_0 a zvolili její velikost tak, aby vymezovala stejné množství proudnic jako ploška ΔS , tj. $\Delta S_0 = \Delta S \cos \alpha$. Elementární hmotnostní tok $\Delta\Phi$ a $\Delta\Phi_0$ ploškami ΔS a ΔS_0 tak bude stejný. Tok tekutiny ploškou ΔS_0 se však dá snadno spočítat pomocí jednoduché úvahy. V časovém intervalu $[t, t + \Delta t]$ totiž projde ploškou ΔS_0 všechna tekutina, která je v okamžiku t „nachystaná“ v objemu o podstavě ΔS_0 a výšce $\Delta\ell = v\Delta t$, kde, pro připomenutí, $v = |\vec{v}|$. Vztaheno na jednotku času platí

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_0 = \frac{s \Delta S_0 \Delta\ell}{\Delta t} = sv \Delta S_0 = sv \Delta S \cos \alpha.$$

Kosinus úhlu α však můžeme vyjádřit pomocí skalárního součinu jednotkových normál, $\vec{n}\vec{n}_0 = \cos \alpha$. Uvážíme-li ještě, že $\vec{v} = v\vec{n}_0$, získáme pro elementární tok $\Delta\Phi$ výsledný vztah

$$\Delta\Phi = s(\vec{v}\vec{n})\Delta S = s(\vec{v}\Delta\vec{S}),$$

při standardním formálním označení $\Delta\vec{S} = \vec{n}\Delta S$. Všimněte si, že je-li úhel α ostrý, je elementární tok kladný a tekutina z objemu V vytéká, pro tupý úhel α je elementární tok záporný, tekutina do objemu vtéká. Pro výpočet celkového toku hraniční plochou S potřebujeme všechny elementární toky sečíst, což se opět děje pomocí integrálu. Tentokrát jde o integrál plošný, který také neumíme počítat. Pro naše další úvahy to však

nebude překážkou. Pokud se v dalších příkladech tento typ integrálu, zcela ojediněle, objeví, bude to vždy v natolik jednoduché situaci, že bude možné výpočet buď zjednodušit na výpočet jednonásobného integrálu, nebo bude intuitivně tak názorný, že dalšího komentáře nebude třeba. Pro celkový tok Φ plochou S platí

$$\Phi(t) = \int_S s(\vec{r}, t) (\vec{v}(\vec{r}, t) \vec{n}(\vec{r}, t)) dS = \int_S s(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) d\vec{S} = \int_S s \vec{v} d\vec{S}. \quad (9.64)$$

Zákon zachování hmotnosti, vyjádřený před chvílí kvalitativně tvrzením, že co z objemu V za jednotku času ubylo, se nemohlo nějak záhadně „zašantročit“, ale muselo to vytéct hraniční plochou, můžeme nyní již konečně zapsat matematicky

$$-\int_V \frac{\partial s}{\partial t} dV = \int_S s \vec{v} d\vec{S} \implies \int_V \frac{\partial s}{\partial t} dV + \int_S s \vec{v} d\vec{S} = 0. \quad (9.65)$$

Tento důležitý fyzikální výsledek se nazývá *rovnice kontinuity v integrálním tvaru*. Kontinuita znamená spojitost, hovoří se také o rovnici spojitosti toku.

Příklad 9.75: Malá odbočka — středoškolská rovnice kontinuity

Mnohý čtenář, který si pamatuje středoškolskou fyziku, se možná nyní podivuje nad tím, že jako rovnici kontinuity zná úplně jiný vztah, než je (9.65). Na střední škole se uváděla rovnice kontinuity pro proudění kapaliny trubicí pro dva příčné průřezy S_1 a S_2 , jimiž tekutina proudí rychlostmi \vec{v}_1 a \vec{v}_2 (obrázek 9.43 vpravo), ve tvaru $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Není tam hustota kapaliny, není tam žádný integrál, vztah se jednoduše rovnici (9.65) nepodobá. Přesto je to on, či spíše jeho speciální případ pro ustálené proudění ideální kapaliny. Pokusme se o srovnání. Jako objem V zvolme oblast vymezenou v obrázku *příčnými* průřezy S_1 a S_2 a částí P pláště trubice mezi nimi. Hraniční plocha je tedy $S = S_1 \cup S_2 \cup P$. Určíme nejprve časovou derivaci hmotnosti kapaliny v objemu V . To je jednoduchý úkol. Je-li totiž proudění ustálené, nezávisí jeho charakteristiky explicitně na čase a parciální derivace hustoty podle času je nulová. Uvnitř vymezeného objemu je stále stejné množství kapaliny, integrál vyjadřující její změnu je nulový,

$$\int_V \frac{\partial s}{\partial t} dV = 0.$$

Tok kapaliny hraniční plochou je součtem toků oběma průřezy a pláštěm,

$$\int_S s(\vec{v}\vec{n}) dS = \int_{S_1} s(\vec{v}_1\vec{n}_1) dS + \int_{S_2} s(\vec{v}_2\vec{n}_2) dS + \int_P s(\vec{v}_P\vec{n}_P) dS.$$

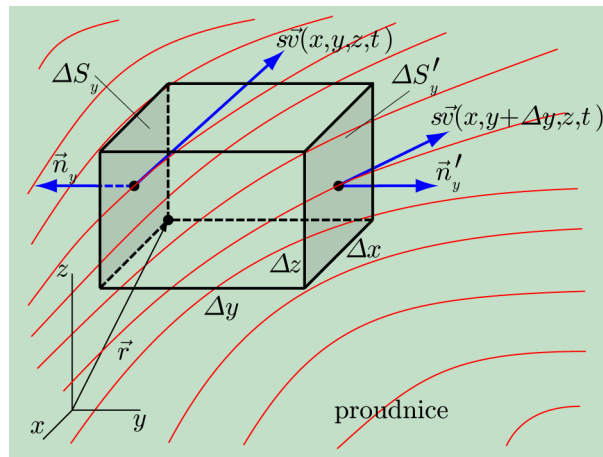
Rychlosti \vec{v}_1 a \vec{v}_2 jsou rovnoběžné s jednotkovými vnějšími normálami příčných průřezů, v prvním případě nesouhlasně, v druhém souhlasně, kromě toho je můžeme podél každého z průřezů považovat za konstantní. Proto je $\vec{v}_1\vec{n}_1 = -v_1$ a $\vec{v}_2\vec{n}_2 = v_2$. Velikost rychlosti podél pláště se sice spojitě mění z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 , rychlost je však stále kolmá k normále pláště — pláštěm nic neteče. Tok kapaliny hraniční plochou je

$$\Phi = \int_S s(\vec{v}\vec{n}) dS = s(-S_1 v_1 + S_2 v_2).$$

Dosazením do rovnice (9.65) a s uvážením, že hustota s ideální kapaliny je konstantní, vychází skutečně $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Kdyby nešlo o ideální kapalinu, ale o stlačitelnou tekutinu, dostali bychom $s_1 S_1 v_1 = s_2 S_2 v_2$. Dokážete to vysvětlit?

Příklad 9.76: Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru

Uvažujeme-li hlouběji o rovnici kontinuity v integrálním tvaru (9.65), vidíme, že musí platit pro *každý* útvar V ohraničený plochou S . Tato libovlnost musí vést k nějaké poměrně přísné podmínce pro samy funkce vystupující v integrálech, tj. $s(\vec{r}, t)$ a $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Jak ji ale zjistit? Porovnáváme totiž integrály s rozdílnými integračními obory, byť libovolnými. Můžeme něco říci o integrandech? Kdybychom měli k dispozici dostatečné matematické zázemí teorie integrálu a věděli bychom si rady s objemovými a plošnými integrály, byli bychom hotovi hned. Existují totiž věty, které umějí převádět integrál po nějaké oblasti na integrál po hranici této oblasti, tedy například integrál, jehož integračním oborem je objem V , na integrál, jehož integračním oborem je hraniční plocha S . Potřebný aparát však nemáme, musíme se proto uchýlit k podobnému „triku“, jaký jsme použili v příkladu 9.48 při výpočtu rozložení tlaku v kapalině. Když může být útvar V libovolný, nic nám nebrání volit jej ve tvaru malého kvádru. Umístíme jej do bodu $\vec{r} = (x, y, z)$ a jeho objem vyjádříme jako součin délek hran, $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Stěny a jejich normály označíme stejně, jako jsme to udělali v příkladu 9.48. Situaci vidíme na obrázku 9.44. Volíme-li objem dostatečně malý (pro vysvětlení se opět můžete vrátit k poznámce 1 v příkladu



Obr. 9.44 K rovnici kontinuity.

9.48), pak hmotnost tekutiny obsažená v objemu ΔV v daném okamžiku t a její úbytek vztážený na jednotku času jsou

$$\Delta m(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) \Delta V, \quad -\frac{\partial \Delta m}{\partial t} = -\frac{\partial s(\vec{r}, t)}{\partial t} \Delta V.$$

Tok hraniční plochou je součtem toků všemi šesti stěnami kvádru. Vypočteme tok dvojicí protilehlých ploch ΔS_y a $\Delta S'_y$. Jejich vnější normály jsou, stejně jako v příkladu 9.48, $\vec{n}_y = (0, -1, 0)$ a $\vec{n}'_y = (0, 1, 0)$, složky rychlosti \vec{v} označme jako obvykle $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Platí $\vec{v}(x, y, z, t)\vec{n}_y = -v_2(x, y, z, t)$, $\vec{v}(x, y + \Delta y, z, t)\vec{n}'_y = v_2(x, y + \Delta y, z, t)$, a pak

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_y + \Delta \Phi'_y &= -s(x, y, z, t) v_2(x, y, z, t) \Delta S_y + s(x, y + \Delta y, z, t) v_2(x, y + \Delta y, z, t) \Delta S'_y = \\ &= \frac{s(x, y + \Delta y, z, t) v_2(x, y + \Delta y, z, t) - s(x, y, z, t) v_2(x, y, z, t)}{\Delta y} \Delta V = \\ &= \frac{\partial (s(x, y, z, t) v_2(x, y, z, t))}{\partial y} \Delta V. \end{aligned}$$

Podobně vyjádříme toky dalšími dvěma dvojicemi stěn. Celkový tok je, již bez vypisování proměnných,

$$\Delta \Phi = \left[\frac{\partial (sv_1)}{\partial x} + \frac{\partial (sv_2)}{\partial y} + \frac{\partial (sv_3)}{\partial z} \right] \Delta V.$$

Operace v závorce, součet parciálních derivací složek sv_1 , sv_2 a sv_3 vektorové funkce $s\vec{v}$ podle proměnných x , y , z , se nazývá *divergence* této vektorové funkce. Značí se $\operatorname{div}(s\vec{v})$. Je to funkce skalární!

Celkový tok plochou S kompenzuje úbytek hmotnosti v objemu ΔV , tj.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial(sv_1)}{\partial x} + \frac{\partial(sv_2)}{\partial y} + \frac{\partial(sv_3)}{\partial z} \implies \\ \implies \frac{\partial s(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(s(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)) &= 0, \quad \text{zkráceně} \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(s\vec{v}) = 0. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Tento vztah je parciální diferenciální rovnicí, která uvádí v souvislost rychlost tekutiny a její hustotu nikoli již integrálně, ale v *daném bodě a v daném okamžiku*. Jedná se o *rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru*.

Prostřednictvím předchozího příkladu jsme zavedli operaci divergence vektorového pole.

Nechť $D \subset \mathbf{R}^3$ je otevřená množina a $\vec{F} : D \ni \vec{r} \rightarrow \vec{F}(\vec{r})$ diferencovatelné vektorové pole. Skalární funkce

$$D \ni \vec{r} = (x, y, z) \rightarrow \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z} \quad (9.67)$$

se nazývá *divergence* vektorového pole $\vec{F}(\vec{r})$.

Zobrazení, které přiřazuje vektorovým polím jejich divergenci, je diferenciální operátor a nazývá se *operátor divergence*.

Příklad 9.77: Speciální tvary rovnice kontinuity

Rovnice (9.66) platí zcela obecně. Ve speciálních případech se samozřejmě zjednoduší. Například pro ustálené proudění, kdy hustota ani rychlost nezávisí na čase, je parciální derivace hustoty podle času nulová a rovnice kontinuity má tvar $\operatorname{div}(s(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})) = 0$, bude-li navíc tekutina ideální kapalinou (nestlačitelná), bude $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = 0$.

Jaká je interpretace skutečnosti, že divergence nějakého vektorového pole je na nějakém oboru nulová? K pojmu divergence vektorového pole jsme přímo dospěli vyjádřením toku tohoto vektorového pole plochou ΔS tvořenou stěnami elementárního kvádru ΔV , konkrétně platilo $\Delta\Phi = \operatorname{div} \vec{F} \Delta V$. Divergence vektorového pole je nulová právě tehdy, je-li tok tohoto vektorového pole uzavřenou plochou ΔS nulový. Znamená to, že všechny integrální křivky, ať již jde o proudnice, siločáry, či cokoli jiného, které vstoupí do objemu ΔV obepnutého touto plochou, z něj zase vystoupí. Uvnitř objemu nejsou *zřídla*, tj. žádné body, v nichž by integrální křivky vznikaly (zdroje), či zanikaly (místa zániku). Nikde nezačínají ani nekončí, jsou uzavřené. Vektorové pole s nulovou divergencí se nazývá *nezřídlové*. Toto slovo sice není příliš pěkné, je však výstižné.

Vztah $\Delta\Phi = \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) \Delta V$, který jsme v příkladu 9.76 odvodili pro tok vektorového pole $\vec{F} = s\vec{v}$ povrchem elementárního kvádru, lze zobecnit na libovolný (makroskopický) objem V

a jeho hraniční plochu S , která je v každém svém bodě orientována spojitým (nebo po částech spojitým) vektorovým polem vnější jednotkové normály $\vec{n}(\vec{r})$ takto:

Předpokládejme, že diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}(\vec{r})$ je definováno na oblasti D , která obsahuje objem V obepnutý po částech hladkou (uzavřenou) plochou S orientovanou vnější normálou. Platí

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV. \quad (9.68)$$

Tento výsledek představuje jednu z integrálních vět, převádějících integrál po oblasti na integrál po její hranici, tzv. *Gaussovu-Ostrogradského větu*.

Pozn.: Hladkou plochou rozumíme takovou plochu, na níž je definováno spojitě vektorové pole normály. Po částech hladkou plochou rozumíme plochu, která je sjednocením konečného počtu hladkých částí. S plochami po částech hladkými jsme pracovali v příkladech 9.48 a 9.76.

Příklad 9.78: Záhada předchozí věty

Vezmeme-li v úvahu třeba gravitační pole Země působící na částici o hmotnosti m , můžeme předchozí větu hned aplikovat. Částici představující Zemi umístíme do počátku soustavy souřadnic. Z příkladu 9.30 můžeme totiž převzít řadu výsledků. Vektorové pole gravitační síly $\vec{F}_g(\vec{r})$, jíž působí Země na částici, je záporně vzatým gradientem potenciální energie $U(x, y, z)$ z příkladu 9.30,

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = - \left(\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \right),$$

divergence tohoto vektorového pole je

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) &= \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z} = \\ &= - \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} = -U_{11}(x, y, z) - U_{22}(x, y, z) - U_{33}(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

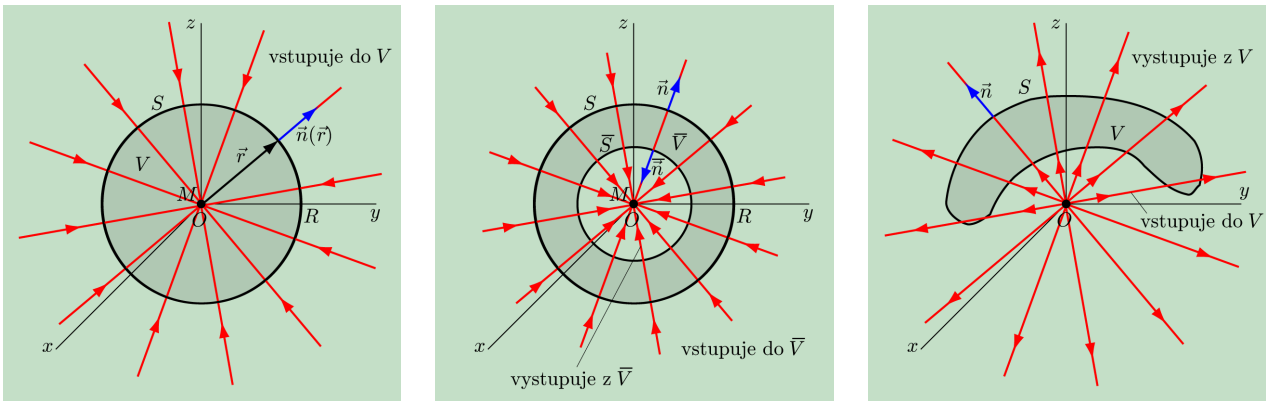
Při výpočtu jsme použili parciální derivace druhého řádu funkce $U(x, y, z)$ připravené v příkladu 9.30. Divergence vektorového pole gravitační síly je nulová, nulový je tedy i integrál na pravé straně vztahu (9.68). Na levé straně tohoto vztahu vystupuje tok vektorového pole gravitační síly libovolnou uzavřenou plochou. Je tedy také vždy nulový? Samozřejmě, že ne! Vidíme to ihned z názorného obrázku 9.45. Představíme-li si uzavřenou plochu, která obepne náboj, resp. Zemi, je okamžitě zřejmé, že siločáry do této plochy pouze vstupují. Zvolíme-li za S kulovou plochu se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R , můžeme tok snadno spočítat. V obecném bodě plochy $\vec{r} = (x, y, z) \in S$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, je vektor vnější jednotkové normály k ní dán vztahem $\vec{n}(\vec{r}) = \vec{r}^0$, kde symbol \vec{r}^0 jsme již dříve používali pro jednotkový vektor ve směru \vec{r} . Pro tok platí

$$\Phi(S) = \int_S \vec{F}_g \vec{n} dS = -\kappa m M \int_S \left(\frac{\vec{r}^0}{r^2} \right) \vec{r}^0 dS = -\frac{\kappa m M}{R^2} \int_S dS = -4\pi \kappa m M.$$

Vzali jsme v úvahu, že $\int_S dS = 4\pi R^2$ (obsah kulové plochy S).

Tok gravitačního pole kulovou plochou obepínající Zemi tedy *není nulový*. Znamená to, že jsme dospěli ke sporu s Gaussovou–Ostrogradského větou? Jistěže ne. Jen jsme nedali pozor na její předpoklady. Vektorové pole $\vec{F}_g(\vec{r})$ totiž není definováno pro $\vec{r} = \vec{0}$. Tento jediný bod chybějící v definičním oboru vektorového pole platnost vztahu (9.68) pokazí.

Ještě by nás mohlo zajímat, proč tok, který jsme vypočítali, nezávisí na poloměru kulové plochy, a zda z toho neplyne něco obecnějšího. Zvolme kromě kulové plochy S , pro kterou jsme již tok spočítali, další kulovou plochu \bar{S} , také se středem v počátku soustavy souřadnic, ale třeba s menším poloměrem $\bar{R} < R$. Situaci ukazuje obrázek 9.45, zakreslený pro přehlednost pouze dvojrozměrně. Výpočet ukázal, že poloměr se vykrátí



Obr. 9.45 K výpočtu toku gravitačního pole plochou.

a tok bude stejný. Z obrázku je to dobře vidět. Plochou S vstupují do objemu V , který tato plocha obepíná, všechny siločáry, stejně jako vstupují plochou \bar{S} do objemu, který obepíná \bar{S} . Stejná jednoduchá úvaha platí pro jakoukoli uzavřenou plochu, která obepíná počátek soustavy souřadnic, a je lhostejné, jaký má tvar. Tok všemi uzavřenými plochami obepínajícími počátek tedy musí být stejný, $\Phi = -4\pi\kappa m M$. Jak to jde dohromady se vztahem (9.68)? Budeme-li za oblast D považovat množinu $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, tj. trojrozměrný euklidovský prostor s vyjmutým počátkem soustavy souřadnic, pak za objem, který je integračním oborem na pravé straně vztahu (9.68), můžeme považovat část prostoru vymezenou plochami S a \bar{S} ,

$$\bar{V} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \bar{R}^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Plocha, která objem \bar{V} ohraničuje, je sjednocením ploch S a \bar{S} . Celkový tok touto sjednocenou plochou je součtem obou toků, ale pozor, se správným znaménkem! Vektorové pole *vnější* jednotkové normály na ploše S (s větším poloměrem) je $\vec{n}(\vec{r}) = \vec{r}^0$, na ploše \bar{S} však $\vec{n}(\vec{r}) = -\vec{r}^0 = -\vec{n}(\vec{r})$. Proto

$$\Phi = \int_S \vec{F} \vec{n} \, dS + \int_{\bar{S}} \vec{F} \vec{n} \, d\bar{S} = -4\pi\kappa m M - (-4\pi\kappa m M) = 0.$$

Naopak, pokud uzavřená plocha počátek neobepíná (obrázek 9.45 vpravo), všechny siločáry, které do ní vstoupí, z ní zase vystoupí, celkový tok je nulový v plné shodě s tím, že $\operatorname{div} \vec{F}_g = 0$ ve všech bodech, v nichž je toto vektorové pole definováno.

Získaný výsledek má obecnou platnost: Zhruba řečeno — výpočet toku uzavřenou plochou obepínající jednotlivé zřídlo vektorového pole lze nahradit výpočtem toku kteroukoli jinou, třeba podstatně jednodušší plochou, která toto zřídlo také obepíná.

Následující příklad nás přivede k jinému způsobu zavedení operátoru rotace vektorového pole, než byl ten poněkud „formalistický“, který jsme použili ve vztahu (9.33).

Příklad 9.79: Faradayův zákon elektromagnetické indukce a rotace vektorového pole

Je to opět fyzikální zákon, který je dobrou motivací pro zavedení dalších pojmů z oblasti vektorových polí. *Faradayův zákon elektromagnetické indukce*, objevený empiricky, přináší jednak kvalitativní poznatek, že časově proměnný tok magnetického pole určitou plochou je příčinou vzniku napětí indukovaného na koncích drátu ve tvaru smyčky, která tuto plochu obepíná, jednak uvádí tyto dvě veličiny do přímého vztahu i kvantitativně: Napětí U_{ind} , indukované na svorkách drátěné smyčky obepínající plochu S , je ve vhodných jednotkách přímo rovno záporně vzaté derivaci toku vektorového pole magnetické indukce \vec{B} plochou S . Zbývá jen tento fakt matematicky zapsat. Tok vektorového pole plochou už vyjádřit umíme. Je však třeba zahrnout do úvah možnost, že tok bude záviset na čase. Dílčí možnosti jsou dvě. Buď na čase závisí plocha, kterou indukční čáry magnetického pole procházejí (například smyčka rotuje nebo se deformuje), nebo je magnetická indukce sama časově proměnná, tj. $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$. Pro druhý případ je úvaha názornější, proto se na něj omezme. Orientujeme-li plochu S (diferencovatelným) vektorovým polem její normály $\vec{n}(\vec{r})$, pak

$$\Phi(t) = \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \, dS, \quad \text{zkráceně} \quad \Phi = \int_S \vec{B} \, d\vec{S},$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot \vec{n}(\vec{r}) \, dS.$$

Při poslední úpravě jsme použili stejného „triku“ zasunutí derivace podle času za integrál jako v příkladu 9.74. Také argumentace, která takový postup zdůvodňuje, je stejná.

Pozn.: Připomeňme opět, že není na závadu, že korektní definici plošného integrálu nemáme. Prozatím ji obejdeme názornou úvahou a výpočtem, stejně jako v předchozích situacích.

Jak ale vyjádříme indukované napětí? Elektrické napětí mezi dvěma body je rozdíl elektrické potenciální energie vztažený na jednotkový kladný náboj. Je to tedy práce, kterou musí vykonat elektrická síla, rovněž vztažená na jednotkový kladný náboj, aby jej mezi danými dvěma body přemístila beze změny kinetické energie. Elektrická síla vztažená na jednotkový kladný náboj je ovšem intenzita elektrického pole $\vec{E}(\vec{r}, t)$, v našem případě indukovaného. Obecně je závislá nejen na poloze bodu v prostoru, ale i na čase. A práce se koná po křivce, která ohraničuje plochu S a kterou si představujeme jako drátěnou smyčku.

Hladkou plochu, která není uzavřená, ohraničuje hladká, nebo po částech hladká uzavřená křivka \mathcal{C} . Abychom práci spočítali, je třeba křivku orientovat. Ze dvou možných orientací volíme tu, která se přenáší z orientované plochy S podle pravidla pravé ruky. Palec pravé ruky musí ukazovat ve směru zvolené normály $\vec{n}(\vec{r})$ k ploše, položíme-li prsty ve směru správné orientace křivky. Při výpočtu práce pak volíme parametrizaci křivky \mathcal{C} kompatibilní s dohodnutou orientací.

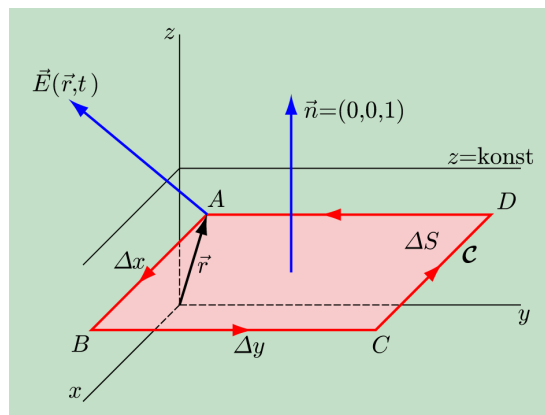
Práce intenzity $\vec{E}(\vec{r}, t)$ po křivce \mathcal{C} , udávající napětí na koncích smyčky, je

$$U_{\text{ind}} = \int_{\mathcal{C}} \vec{E}(\vec{r}, t) \, d\vec{r}.$$

Matematický zápis Faradayova zákona elektromagnetické indukce má pak tvar

$$- \int_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot \vec{n}(\vec{r}) \, dS = \int_{\mathcal{C}} \vec{E}(\vec{r}, t) \, d\vec{r}, \quad \text{zkráceně} \quad - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S} = \int_{\mathcal{C}} \vec{E} \, d\vec{r}. \quad (9.69)$$

Podobně jako u rovnice kontinuity (9.65) se jedná o zákon v integrálním tvaru. Indukce magnetického pole a intenzita pole elektrického však spolu jistě souvisí i lokálně, tj. v daném bodě prostoru. U rovnice kontinuity to bylo obdobné. Z jejího integrálního tvaru (9.65) jsme dokázali získat tvar diferenciální (9.66) a při tom jsme „objevili“ operátor divergence vektorového pole. Pokusíme se v případě Faradayova zákona o něco podobného. Zvolme plochu ΔS speciálně, ve tvaru obdélníka ležícího v rovině $z = \text{konst.}$ (rovina rovnoběžná se souřadnicovou rovinou xy), jehož strany o velikostech Δx a Δy budou rovnoběžné s osami x a y . V případě rovnice kontinuity jsme objem ΔV také volili velmi zjednodušeně — ve tvaru kvádrů s hranami rovnoběžnými se souřadnicovými osami. Ale protože zákon (9.69) platí pro každou plochu a její hranici, platí i pro tento speciální případ. Obdélník ΔS umístíme do bodu $\vec{r} = (x, y, z)$, podle obrázku 9.46. Vrcholy obdélníka jsou body $A = (x, y, z)$, $B = (x + \Delta x, y, z)$, $C = (x + \Delta x, y + \Delta y, z)$, $D = (x, y + \Delta y, z)$. Uzavřená křivka C , která jej ohraničuje, je tvořena



Obr. 9.46 K příkladu 9.79.

čtyřmi orientovanými úsečkami AB , BC , CD , DA . Orientace odpovídá orientaci plochy ΔS normálou $\vec{n} = (0, 0, 1)$ podle pravidla pravé ruky. Křivka C není hladká, ale „jen“ po částech hladká. Integrál z časově proměnného vektorového pole $\vec{E}(\vec{r}, t)$ je součtem integrálů po jednotlivých úsečkách,

$$\int_C \vec{E} d\vec{r} = \int_{AB} \vec{E} d\vec{r} + \int_{BC} \vec{E} d\vec{r} + \int_{CD} \vec{E} d\vec{r} + \int_{DA} \vec{E} d\vec{r}.$$

Parametrizujeme postupně všechny čtyři úsečky a vyjádříme příslušné integrály. Parametr označíme τ , aby se nepletl s časovou proměnnou t .

$$AB: \quad x(\tau) = \tau \in [x, x + \Delta x], \quad y(\tau) = y = \text{konst.}, \quad z(\tau) = z = \text{konst.}, \quad \dot{x}(\tau) = 1, \quad \dot{y}(\tau) = 0, \quad \dot{z}(\tau) = 0,$$

$$BC: \quad x(\tau) = x + \Delta x = \text{konst.}, \quad y(\tau) = \tau \in [y, y + \Delta y], \quad z(\tau) = z = \text{konst.}, \quad \dot{x}(\tau) = 0, \quad \dot{y}(\tau) = 1, \quad \dot{z}(\tau) = 0,$$

$$CD: \quad x(\tau) = -\tau \in [x, x + \Delta x], \quad y(\tau) = y + \Delta y = \text{konst.}, \quad z(\tau) = z = \text{konst.}, \quad \dot{x}(\tau) = -1, \quad \dot{y}(\tau) = 0, \quad \dot{z}(\tau) = 0,$$

$$DA: \quad x(\tau) = x = \text{konst.}, \quad y(\tau) = -\tau \in [y, y + \Delta y], \quad z(\tau) = z = \text{konst.}, \quad \dot{x}(\tau) = 0, \quad \dot{y}(\tau) = -1, \quad \dot{z}(\tau) = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{AB+CD} \vec{E} d\vec{r} &= \int_{AB} \vec{E} d\vec{r} + \int_{CD} \vec{E} d\vec{r} = \int_x^{x+\Delta x} E_1(\tau, y, z) d\tau - \int_x^{x+\Delta x} E_1(\tau, y + \Delta y, z) d\tau = \\ &= - \int_x^{x+\Delta x} [E_1(\tau, y + \Delta y, z) - E_1(\tau, y, z)] d\tau. \end{aligned}$$

898 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Uplatníme-li na funkci $f(\tau) = E_1(\tau, y + \Delta y, z) - E_1(\tau, y, z)$ větu o střední hodnotě integrálního počtu, tj. vztah (9.35), dostaneme

$$\int_{AB+CD} \vec{E} \, d\vec{r} = -f(\xi) \Delta x = -[E_1(\xi, y + \Delta y, z) - E_1(\xi, y, z)] \Delta x,$$

kde ξ je určitá (nevíme jaká) hodnota uvnitř intervalu $[x, x + \Delta x]$. Na rozdíl $E_1(\xi, y + \Delta y, z) - E_1(\xi, y, z)$ uplatníme Lagrangeovu větu o střední hodnotě,

$$E_1(\xi, y + \Delta y, z) - E_1(\xi, y, z) = \left. \frac{\partial E_1}{\partial y} \right|_{(\xi, \eta, z)} \Delta y,$$

kde η je zase jistá hodnota (opět nevíme jaká) uvnitř intervalu $[y, y + \Delta y]$. Dostáváme

$$\int_{AB+CD} \vec{E} \, d\vec{r} = - \left. \frac{\partial E_1}{\partial y} \right|_{(\xi, \eta, z)} \Delta x \Delta y.$$

Podobnými obraty získáme součet integrálů po úsečkách BC a DA ,

$$\int_{BC+DA} \vec{E} \, d\vec{r} = \left. \frac{\partial E_2}{\partial x} \right|_{(\bar{\xi}, \bar{\eta}, z)} \Delta x \Delta y.$$

Hodnoty $\bar{\xi}$, resp. $\bar{\eta}$ leží opět v intervalech $(x, x + \Delta x)$, resp. $(y, y + \Delta y)$, jsou však obecně různé od hodnot ξ , resp. η .

Integrál po křivce C z intenzity $\vec{E}(\vec{r}, t)$ je

$$\int_C \vec{E} \, d\vec{r} = \left(\left. \frac{\partial E_2}{\partial x} \right|_{(\bar{\xi}, \bar{\eta}, z)} - \left. \frac{\partial E_1}{\partial y} \right|_{(\xi, \eta, z)} \right) \Delta x \Delta y.$$

V limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$ a $\Delta y \rightarrow 0$ pak platí

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_C \vec{E} \, d\vec{r} = \frac{\partial E_2(x, y, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial E_1(x, y, z, t)}{\partial y}.$$

Všimli jste si, že pravá strana předchozího vztahu představuje z -ovou složku rotace časově závislého vektorového pole $\vec{E}(\vec{r}, t)$? (Časová závislost ničemu nevádí, složky vektorové funkce $\vec{E}(\vec{r}, t)$ se při výpočtu rotace derivují jen podle prostorových proměnných.)

Nyní podobně vyjádříme časovou derivaci toku magnetické indukce plochou ΔS . Tato plocha je orientována jednotkovou normálou $\vec{n}(\vec{r}) = (0, 0, 1)$. Výpočet bude opět velmi jednoduchý, neboť díky nulovosti x -ové i y -ové složky normály platí

$$-\frac{d\Phi(t)}{dt} = - \int_{\Delta S} \frac{\partial B_3(x, y, z, t)}{\partial t} \, dS.$$

Použitím věty o střední hodnotě integrálního počtu zobecněné na dvojrozměrný případ dostaneme

$$-\int_{\Delta S} \frac{\partial B_3(x, y, z, t)}{\partial t} \, dS = - \frac{\partial B_3(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, z, t)}{\partial t} \Delta x \Delta y,$$

a v limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$ a $\Delta y \rightarrow 0$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{\Delta x \Delta y} \int_{\Delta S} \frac{\partial B_3(x, y, z, t)}{\partial t} dS = -\frac{\partial B_3(x, y, z, t)}{\partial t}.$$

Můžeme tedy psát

$$\text{rot}_3 \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial B_3(x, y, z, t)}{\partial t}.$$

Zobecněním na ostatní složky, již ve zkráceném zápisu bez vypisování proměnných, dostáváme

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (9.70)$$

V tomto výsledku jistě poznávají fyzikové *třetí Maxwellovu rovnici*, která je zápisem Faradayova zákona elektromagnetické indukce *v diferenciálním tvaru*.

Poté, co jsme se přesvědčili, že pojem rotace vektorového pole má zřetelný fyzikální význam, soustředíme se opět na matematiku.

Nechť $D \subset \mathbf{R}^3$ je otevřená množina a $\vec{F} : D \ni \vec{r} \rightarrow \vec{F}(\vec{r})$ diferencovatelné vektorové pole. Vektorové pole

$$\begin{aligned} D \ni \vec{r} = (x, y, z) &\longrightarrow \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = & (9.71) \\ &= \left(\frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial z}, \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

se nazývá *rotace* vektorového pole $\vec{F}(\vec{r})$.

Zobrazení, které přiřazuje vektorovým polím jejich rotaci, je diferenciální operátor a nazývá se *operátor rotace*.

Vraťme se k převodu křivkového integrálu druhého druhu na integrál plošný. Výpočet v případě speciálně zvolené plochy ΔS znázorněné na obrázku 9.46, jak jsme jej provedli pro intenzitu elektrického pole \vec{E} , bude stejný pro jakékoli vektorové pole $\vec{F}(\vec{r})$, které si však již nekomplikujeme závislostí na čase. Platí

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\Delta S} \text{rot}_3 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{S}.$$

Zobecníme-li tento výsledek, dostaneme následující tvrzení, které udává vztah pro převod integrálu po orientované ploše na integrál po její hranici.

Předpokládejme, že diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}(\vec{r})$ je definováno na oblasti D , která obsahuje hladkou plochu S orientovanou předem zvoleným vektorovým polem jednotkové normály. Orientaci plochy S přeneseme na uzavřenou křivku C , která plochu ohraničuje (pravidlo pravé ruky). Platí

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{F} d\vec{S}. \quad (9.72)$$

Jedná se o *Stokesovu větu*, která je rovněž jednou z integrálních vět převádějících integrál po oblasti na integrál po její hranici, tentokrát z plochy na křivku.

Pozn.: Postup, kterým jsme v příkladu 9.79 „odvodili“ vztah pro převod křivkového integrálu druhého druhu na integrál plošný pro speciálně zvolenou plochu, byl matematicky korektní (funkce, s kterými jsme operovali, měly pro použité operace a tvrzení všechny potřebné vlastnosti). Pokud však jde o vztah mezi plošným a křivkovým integrálem a jeho zobecnění, to již plně přijatelné z matematického hlediska není. Stále nám totiž chybí definice některých typů integrálů a obcházíme je názornými, ale ne zcela korektními „triky“. Že vztah mezi křivkovým a plošným integrálem získaný pro speciální volbu integračních oborů lze zobecnit, tomu musíme v tuto chvíli jen věřit.

Příklad 9.80: Rotace a víry

Už jsme viděli, že nenulová divergence vektorového pole souvisí s existencí zdrojů či míst zániku integrálních křivek tohoto vektorového pole, zřídka. Nenulová rotace zase znamená, že vektorové pole není konzervativní. Jak to souvisí s nějakými „víry“? Uvažujme o jednoduše zadaném vektorovém poli $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Předpokládejme, že jde o nějaké silové pole, s tím, že u jeho složek stojí potřebné rozměrové konstanty, jejichž číselná hodnota je rovna jedné (z cvičných důvodů určete jejich fyzikální rozměr). Rotace vektorového pole \vec{F} je nenulová, neboť

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{F_1}{\partial y} \right) = (0, 0, 2).$$

Vektorové pole *není konzervativní*, práce, kterou odpovídající síla vykoná při pohybu částice po nějakém oblouku, obecně *závisí* na tvaru oblouku a práce po uzavřených křivkách obecně *není nulová*.

Zjistíme, jaký tvar mají siločáry zadaného silového pole. K jejich parametrickému vyjádření vedou podle (9.58) rovnice

$$\dot{x}(t) = -y(t), \quad \dot{y}(t) = x(t), \quad \dot{z}(t) = 1.$$

Jejich obecné řešení je

$$x(t) = A \cos t - B \sin t, \quad y(t) = A \sin t + B \cos t, \quad z = t + C,$$

kde A , B a C jsou integrační konstanty. První dvě rovnice jsou parametrickým vyjádřením kružnice o poloměru $A^2 + B^2$ (zkuste vyjádřit $x^2(t) + y^2(t)$). Průmětem siločáry do půdorysné roviny je kružnice, z -ová souřadnice roste úměrně s parametrem t . Siločáry jsou šroubovice. Takže se jaksi „krouťí“, dělají víry. Pro zajímavost vypočtěme, jakou práci vykoná silové pole po uzavřené křivce složené ze dvou částí. Z oblouku C_1 odpovídajícího

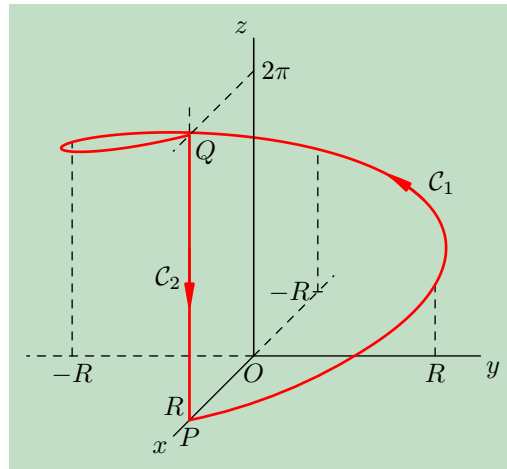
prvnímu závitů šroubovice procházející bodem $P = (R, 0, 0)$ a z úsečky C_2 spojující body $Q = (R, 0, 2\pi)$ a $P = (R, 0, 0)$ (viz obrázek 9.47). Parametrizace oblouku C_1 je

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t, \quad z(t) = t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

parametrizace úsečky C_2 je

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 2\pi - t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Práce po oblouku C_1 je



Obr. 9.47 Vírové vektorové pole.

$$\begin{aligned} A(C_1) &= \int_{C_1} \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{C_1} F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [(-R \sin t)(-R \sin t) + (R \cos t)(R \cos t) + 1] \, dt = 2\pi R^2 + 2\pi. \end{aligned}$$

Práce po úsečce C_2 je

$$A(C_2) = \int_{C_2} \vec{F} \, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -dt = -2\pi,$$

pro celkovou práci pak dostaneme

$$A(C) = 2\pi R^2.$$

Jak si tento výsledek, konkrétně to, že práce není nulová, dokážeme názorně vysvětlit? Zřejmě by nás nepřekvapil, kdyby síla závisela třeba explicitně na čase. Nebo na rychlosti, jako je tomu u sil tření nebo odporových sil prostředí — tam se nedivíme, že práce po uzavřené křivce není nulová. Třecí či odporová síla směřuje vždy *proti* rychlosti, takže při *jakémkoli* posunutí koná zápornou práci. Ať je trajektorie částice uzavřená, či neuzavřená, záporné příspěvky k práci se pořád kumulují, nikdy nebudou vykompenzovány. Když ale silové pole závisí pouze na poloze, jako je tomu v tomto příkladu, není závislost práce na tvaru trajektorie divná? Silové pole závislé pouze na poloze je polem vektorovým, můžeme k němu sestrojít siločáry, jejichž obraz se s časem nemění. Pohybuje-li

se částice po uzavřené křivce, musí se měnit směr vektoru posunutí vůči siločarám. Neměla by být záporná práce, kterou koná silové pole při pohybu proti siločarám, kompenzována kladnou prací při pohybu souběžném se siločarami? Z matematického hlediska je nám již věc jasná — naše vektorové pole není konzervativní, jeho elementární práce není úplným diferenciálem žádné kmenové funkce. Geometricky je však problém také názorný, přinejmenším kvalitativně. Siločáry nekonzervativního vektorového pole se jaksi „kroutí“, vytvářejí víry. Odtud pramení i názvosloví. Vektorové pole, jehož rotace je nulová, se také často nazývá *nevírové*. Každé konzervativní vektorové pole je tedy *nevírové*.

9.4.2 Operátor nabra a Laplaceův operátor

V předchozích odstavcích jsme hovořili o zobrazeních, která přiřazují skalárním, nebo vektorovým polím jiná skalární či vektorová pole, z původních odvozená derivováním. Šlo o operace gradientu (skalární pole \rightarrow vektorové pole), divergence (vektorové pole \rightarrow skalární pole) a rotace (vektorové pole \rightarrow vektorové pole). Hovořili jsme o nich také jako o *diferenciálních operátorech*, právě proto, že jsou založeny na derivování. Velmi častá je představa operátoru jako určitého „působení“ na skalární či vektorovou funkci, jehož vlivem vznikne jiná skalární nebo vektorová funkce. Je to podobné, jako když jsme si v odstavci 2.1.1 nebo v odstavci 9.2.1 představovali funkce jako „černé skříňky“, které přetvoří číslo nebo n -tici čísel v jiné číslo. Obvyklý zápis působení operátoru na nějaký objekt je

$$\text{OPERÁTOR (OBJEKT PŮSOBENÍ)} = \text{VÝSLEDEK PŮSOBENÍ}.$$

Příklad 9.81: Operátory parciálního a úplného derivování

Nejjednoduššími operátory jsou ty, které funkcím přiřazují přímo jejich derivace. Je-li $f = f(x_1, \dots, x_n)$ funkce n proměnných, můžeme operátor parciálního derivování podle i -té proměnné zapsat jako

$$D_i : f \longrightarrow D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} : f \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Je-li $F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ složená funkce proměnné t , zapisujeme její derivaci podle této proměnné často pomocí operátoru *úplné derivace*

$$\frac{d}{dt} : F \longrightarrow \frac{d}{dt} F = \dot{F} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \dot{x}_n.$$

Velmi používaný je *operátor nabra*, pomocí něhož lze při vhodném zápisu vyjádřit jak gradient skalárního pole, tak divergenci či rotaci vektorového pole. Má tvar

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (9.73)$$

a zachází se s ním jako s „opravdovým“ vektorem s tím, že každé „formální násobení“ tímto operátorem znamená jeho působení na vyznačený objekt. Praktické použití operátoru nabra ukazují následující vztahy.

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (9.74)$$

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}, \quad (9.75)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1, F_2, F_3) = \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (9.76)$$

Operace divergence je vyjádřena formálním skalárním součinem a operace rotace formálním vektorovým součinem vektorů $\vec{\nabla}$ a \vec{F} . Pěkně to funguje.

Dalším frekventovaným diferenciálním operátorem je *Laplaceův operátor*, který je tvořen druhými parciálními derivacemi. Je-li $f = f(x, y, z)$, definujeme jej jako zobrazení

$$\Delta : f \longrightarrow \Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (9.77)$$

Operátory ∇ a Laplaceův lze snadno zobecnit i na případ více proměnných,

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Pro tento zobecněný případ platí formálně stejné vztahy pro gradient a divergenci jako (9.74) a (9.74). Také zobecněnou rotaci by bylo možné definovat, potřebovali bychom však k tomu zobecněný vektorový součin.

Příklad 9.82: K čemu je dobrý Laplaceův operátor?

Jak nás napadlo zavést Laplaceův operátor? Motivací pro zavedení Laplaceova operátoru je několik, jsou mnohem hlubší a mají svůj původ opět ve fyzice. Nejjednodušší z nich souvisí zase s konzervativním silovým polem. Vezměme třeba gravitační pole hmotného bodu. Takové pole je záporně vzatým gradientem skalárního pole potenciální energie (viz vztah (9.32)) a jeho divergence je nulová (viz příklad 9.78). Platí tedy

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r}), \quad \text{div } \vec{F}(\vec{r}) = 0 \implies \text{div grad } U(\vec{r}) = \Delta U(\vec{r}) = 0.$$

Potenciální energie gravitačního pole splňuje, s výjimkou bodu $\vec{r} = \vec{0}$, v němž není definována, *Laplaceovu rovnici* $\Delta U(\vec{r}) = 0$. A Laplaceův operátor je „na světě“.

904 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Jiný příklad je z kvantové mechaniky. Vektor hybnosti částice je zde reprezentován diferenciálním operátorem působícím na *vlňové funkce*, které určují stav částice,

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \vec{\nabla}.$$

Operátor kinetické energie, odvozený z operátoru hybnosti pomocí klasického vztahu mezi kinetickou energií a hybností, je

$$\hat{T} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta.$$

Posledním příkladem, který zde uvedeme, je vlnová rovnice. Funkce prostorových proměnných $\vec{r} = (x, y, z)$ a časové proměnné t

$$\phi_- = \omega t - \vec{k}\vec{r} \quad \text{a} \quad \phi_+ = \omega t + \vec{k}\vec{r},$$

kde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ je konstantní vektor, pro který platí $k = \omega v^{-1}$, se nazývají *fáze*. Složky vektoru \vec{k} mají fyzikální rozměr převrácené délky, konstanta ω má rozměr převráceného času a konstanta v má rozměr rychlosti. Nazývá se *fázová rychlost*. Zvolme dvě funkce $f_1(\phi_-)$ a $f_2(\phi_+)$, které nebudou omezeny jinak než tím, že s nimi lze provádět operace, které budeme potřebovat — parciální derivace do druhého řádu včetně — a utvořme funkci

$$f(\vec{r}, t) = f_1(\phi_-) + f_2(\phi_+) = f_1(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + f_2(\omega t + \vec{k}\vec{r}).$$

Jev, který je popsán jakoukoli takovou funkcí, se ve fyzice nazývá *vlnění*. Vypočteme parciální derivace funkce f druhého řádu vždy podle stejnojmenných proměnných. Dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f_1'(\phi_-) \frac{\partial \phi_-}{\partial x} + f_2'(\phi_+) \frac{\partial \phi_+}{\partial x} = -k_x f_1'(\phi_-) + k_x f_2'(\phi_+), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= k_x^2 [f_1''(\phi_-) + f_2''(\phi_+)] \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= k_y^2 [f_1''(\phi_-) + f_2''(\phi_+)], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k_z^2 [f_1''(\phi_-) + f_2''(\phi_+)], \\ \Delta f &= k^2 [f_1''(\phi_-) + f_2''(\phi_+)]. \end{aligned}$$

Pro parciální derivace funkce f podle času platí

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \omega [f_1'(\phi_-) + f_2'(\phi_+)], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega^2 [f_1''(\phi_-) + f_2''(\phi_+)].$$

Dáme-li tyto výpočty dohromady a vezmeme-li v úvahu vztah mezi konstantami k , ω a v , vidíme, že funkce $f(\vec{r}, t)$ splňuje diferenciální rovnici

$$\Delta f(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \text{nebo} \quad \square f(\vec{r}, t) = 0, \quad \text{kde} \quad (9.78)$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

je *d'Alembertův operátor*. Rovnice (9.78) se nazývá *vlnová rovnice* a je základní diferenciální rovnicí, kterou se řídí šíření vlnění v prostoru. Ještě se k ní budeme vracet v následujícím odstavci.

Příklad 9.83: Operátory $\vec{\nabla}$ a Δ ve válcových souřadnicích

V kapitole 5 jsme zavedli křivočaré souřadnice, které jsou často užitečné při řešení geometrických či fyzikálních problémů s příslušnou symetrií. Například úlohu v \mathbf{R}^3 , která je rotačně symetrická vzhledem k ose z (při její formulaci a řešení se „nepoznají“ otočení soustavy souřadnic kolem osy z), se hodí řešit ve válcových souřadnicích. Potřebujeme-li v takové úloze počítat gradient skalární funkce, resp. divergenci či rotaci vektorového pole, měli bychom umět vyjádřit operátor $\vec{\nabla}$ ve válcových souřadnicích. Znamená to především převést derivování podle proměnných x a y na derivování podle ϱ a φ (proměnná z zůstává), a dále vyjádřit vektor gradientu v ortonormální bázi spojené s válcovými souřadnicemi, tj. v bázi tvořené tečnými vektory k souřadnicovým křivkám soustavy válcových souřadnic, avšak *normovaným* (ortogonální jsou). Stačí, abychom se zabývali převedením operátorů parciálních derivací podle x a y do polárních souřadnic, operátor $\vec{\nabla}$ pak již sestavíme snadno.

Uvažujme o funkci

$$F(x, y) = f(\varrho(x, y), \varphi(x, y)), \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

a počítejme její parciální derivace pomocí pravidla pro derivaci složené funkce. Podobný výpočet, jenže s opačným převodem, tj. z kartézských do polárních souřadnic, jsme prováděli například již v příkladu 5.12. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, & \frac{\partial \varrho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{\sin \varphi}{\varrho}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\cos \varphi}{\varrho}, \end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varrho} \cos \varphi - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \sin \varphi, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \varrho} \sin \varphi + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Funkce f , a tedy i F , byly libovolné, proto můžeme jejich psaní vynechat a psát přímo pro operátory

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\cos \varphi}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Získané vztahy lze zapsat také maticově

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Pozor! Předchozí zápis opravdu znamená jen formální násobení. Operátor $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ nepůsobí na funkce $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ tak, že by je derivoval. Na levé straně rovnosti je „dvojměrný“ operátor $\vec{\nabla}$ v kartézských souřadnicích, formálně vyjádřený jako vektor. Ve čtvercové matici vystupující na pravé straně snadno rozpoznáme matici přechodu od kartézské (ortonormální) báze tvořené vektory \vec{e}_x a \vec{e}_y k ortonormální bázi spojené s polárními souřadnicemi tvořené *normovanými* tečnými vektory k polárním souřadnicovým křivkám. Pro názornost se

můžete vrátit k obrázku 5.9, popřípadě k příkladu 5.13. Ortonormální bázi spojenou s polárními souřadnicemi tam budou tvořit vektory $\vec{f}_{\varrho, P}$ (při výpočtu vychází již normovaný) a $\vec{f}_{\varphi, P}/|\vec{f}_{\varphi, P}|$ (tečný vektor $\vec{f}_{\varphi, P}$ nevychází normovaný, je třeba jej teprve normovat). Je vidět, že vektor

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

musí představovat operátor $\vec{\nabla}$ v polárních, resp. válcových souřadnicích. Označíme-li \vec{e}_ϱ , \vec{e}_φ a \vec{e}_z vektory *ortonormální* báze spojené s válcovými souřadnicemi, zapíšeme gradient funkce $f(\varrho, \varphi, z)$ jako

$$\text{grad } f(\varrho, \varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \varrho} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Pro operátor nabla samotný a pro Laplaceův operátor ve válcových souřadnicích platí

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}. \quad (9.79)$$

Pro převod Laplaceova operátoru můžete použít například vztahů (5.21) nebo výsledku úlohy 13 ve cvičení 5.2.6.

Příklad 9.84: Operátory $\vec{\nabla}$ a Δ v kulových souřadnicích

Stejný postup jako v předchozím příkladu použijeme pro vyjádření operátoru $\vec{\nabla}$ v kulových souřadnicích. Provedme nejprve přípravné výpočty. Tečné vektory k souřadnicovým křivkám kulových souřadnic \vec{f}_r , \vec{f}_ϑ a \vec{f}_φ jsme určili v příkladu 5.20. Jsou dány vztahy (5.27), jsou ortogonální, je však třeba je normovat. Ortonormální báze spojená s kulovými souřadnicemi je určena vektory

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \\ \vec{e}_\vartheta &= (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta), \\ \vec{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Zapíšeme-li tyto vektory po řádcích do matice, získáme matici přechodu od báze $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ k bázi $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$.

Pro výpočet dále potřebujeme parciální derivace funkcí $r(x, y, z)$, $\vartheta(x, y, z)$ a $\varphi(x, y, z)$, vyjádřené však nakonec pomocí kulových souřadnic. Derivováním vztahů (5.12) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \vartheta, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\sin \vartheta}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Pro operátory parciálních derivací podle kartézských souřadnic platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.\end{aligned}$$

Opět je vhodné použít maticový zápis pomocí matice přechodu od kartézské báze k ortonormální bázi spojené s kulovými souřadnicemi, a dostat tak rovnou operátor $\vec{\nabla}$ v kulových souřadnicích. Obdobně jako v maticovém zápisu operátoru $\vec{\nabla}$ v polárních, resp. válcových souřadnicích ani zde operátory $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ a $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ nepůsobí na funkce obsažené v matici. Platí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Na pravé straně vztahu se objevila matice přechodu od kartézské báze k ortonormální bázi spojené s kulovými souřadnicemi, takže řádková matice, jejímž vynásobením touto maticí přechodu dostaneme matici kartézských složek operátoru $\vec{\nabla}$, musí představovat složky operátoru $\vec{\nabla}$ v kulových souřadnicích. Pro operátor nabla a pro Laplaceův operátor v kulových souřadnicích platí

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \quad (9.80)$$

Pro výpočet Laplaceova operátoru opět využijte vztahů (5.21).

9.4.3 Identity pro diferenciální operátory

Diferenciální operátory grad, div, rot a Δ mají právě ve fyzice velkou důležitost, jak jsme se o tom již vícekrát přesvědčili. Jsou založeny na operacích s operátorem $\vec{\nabla}$, takže spolu jakýmsi způsobem souvisejí. Můžeme je aplikovat i postupně a dostávat zajímavé výsledky. Například pro gravitační pole hmotného bodu a pro elektrostatické pole bodového náboje, která jsou konzervativní a až na konstanty mají stejný (radiální) charakter, jsme zjistili platnost vztahů

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r}), \quad \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} U(\vec{r}) = 0.$$

Kdo to zapomněl, může se vrátit k příkladům 9.39, 9.78 a 9.82. Aplikujeme-li postupně operátor gradientu na radiální skalární pole a pak na získané (konzervativní) vektorové pole operátor divergence, dostaneme nulu. Hned nás napadne otázka, zda pro tento výsledek je důležité, že původní skalární pole $U(\vec{r})$ je radiální, nebo zda je výsledek obecnější.

Naopak v případě *jakéhokoli* (diferencovatelného) konzervativního pole $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r})$ víme, že jeho rotace je nulová, tj. $\text{rot grad } U(\vec{r}) = \vec{0}$. Zde už je jasné vidět, že aplikace operátoru rotace po operátoru gradientu *musí* dávat nulový vektor.

Zdá se, že kombinováním diferenciálních operátorů můžeme získat zajímavé identity. Shrňme nejdůležitější z nich. Označme $f = f(\vec{r})$ a $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ tolikrát diferencovatelné skalární a vektorové pole, kolikrát potřebujeme. Použijeme vektorových zápisů pro operátor $\vec{\nabla}$ a znalosti operací s vektory — skalární, vektorový a smíšený součin, a také vztah

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a}\vec{c}) - \vec{c} (\vec{a}\vec{b}).$$

Platí

$$\text{div grad } f = \Delta f \implies \text{div grad} = \Delta, \quad (9.81)$$

$$\text{rot grad } f = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0} \implies \text{rot grad} = \vec{0}, \quad (9.82)$$

$$\text{div rot } \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0 \implies \text{div rot} = 0, \quad (9.83)$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{F} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla}\vec{F}) - (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \Delta\vec{F} \implies \\ &\implies \text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta. \end{aligned} \quad (9.84)$$

K poslední identitě poznamenejme, že Laplaceův operátor se na vektorové pole aplikuje po složkách, tj. $\Delta\vec{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$. Samozřejmě by bylo možné získat ještě další identity (některé z nich budou předmětem cvičení), výše uvedené jsou však ty nejdůležitější a v řadě fyzikálních aplikací s nimi vystačíme.

Pozn.: Hned z první identity (9.81) je vidět, že obecně je $\text{div grad } f(\vec{r}) \neq 0$. Odpověď na otázku, zda rovnost $\text{div grad } U(\vec{r}) = 0$, kterou jsme získali pro radiální pole, platí obecně, je záporná.

Příklad 9.85: Znovu vlnová rovnice

V příkladu 9.82 jsme sice o vlnové rovnici již hovořili, ale tak nějak „účelově“. Jako bychom předjímalí, co má vyjít. Vlnová rovnice však vychází přirozeně z řady fyzikálních úloh — všude tam, kde se vyskytuje vlnění. Jedním z takových typických případů je elektromagnetické pole. Ukážeme, že základní veličiny popisující elektromagnetické pole, intenzita elektrického pole \vec{E} a indukce magnetického pole \vec{B} , splňují vlnovou rovnici. Základem pro naše úvahy jsou pohybové rovnice elektromagnetického pole, tzv. *Maxwellovy rovnice*, a některé z identit pro diferenciální operátory, které jsme před chvílí získali. Zapišeme Maxwellovy rovnice pro vakuum a pro případ, kdy v prostoru nejsou žádné volné náboje ani proudy:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (9.85)$$

přičemž $\varepsilon_0 \doteq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ a $\mu_0 \doteq 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ jsou permitivita a permeabilita vakua. První z těchto rovnic máme již odvozenou pro speciální případ elektrického pole bodového náboje. Platí v celém prostoru s výjimkou bodu, v němž je bodový náboj „usazen“. (Výpočet jsme sice prováděli pro gravitační pole hmotného bodu, viz příklad 9.78, pro elektrostatické pole bodového náboje je však výsledek stejný, neboť silové pole má stejný charakter). Třetí Maxwellovu rovnici jsme již také odvodili, a to v příkladu 9.79 z integrálního Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Druhá rovnice, která platí beze změny i v obecné situaci, nejen pro vakuum bez nábojů a proudů, znamená, že indukční čáry magnetického pole nepocházejí z izolovaných zřidel, neexistuje analogie kladného nebo záporného náboje — magnetický monopol. Konečně čtvrtá rovnice je „symetrická“ k třetí a na rozdíl od ostatních rovnic, které jsou odvozeny z empiricky zjištěných zákonitostí, ji Maxwell odvodil teoreticky. Nebudeme se však Maxwellovými rovnicemi hlouběji zabývat, pouze ukážeme, že z nich vyplývá rovnice vlnová.

Vezměme například třetí rovnici a aplikujme na ni operátor rotace. S použitím identity (9.84) dostaneme

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}, \quad \text{tj.} \quad \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}.$$

Dále použijeme první rovnice, podle níž je $\text{div } \vec{E} = 0$, a čtvrté rovnice, z níž dosadíme za $\text{rot } \vec{B}$. Pak

$$-\Delta \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \implies \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Intenzita elektrického pole \vec{E} tedy skutečně splňuje vlnovou rovnici. Použijeme-li stejný postup v případě čtvrté rovnice, tj. počítáme-li $\text{rot rot } \vec{B}$, dostaneme vlnovou rovnici i pro magnetickou indukci. V obou případech je fázová rychlost $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Tomu, že elektromagnetické pole ve vakuu je vlnění a že jeho fázová rychlost je právě rychlost světla, se jistě divit nebudeme.

9.4.4 Cvičení

1. Dokažte identity uvedené v odstavci 9.4.3. Dokažte také následující identity pro diferenciální operátory. Předpokládejte, že vektorová a skalární pole, na která budeme operátory působit, jsou diferencovatelná až do potřebného řádu. Symbolem $\vec{F}\vec{\nabla}$ rozumíme operátor $F_1 \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial y} + F_3 \frac{\partial}{\partial z}$, který může působit na skalární funkci, nebo i na vektorové pole. Na vektorové pole působí „po složkách“, tj.

$$(\vec{F}\vec{\nabla})\vec{G} = \left(\sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial G_1}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial G_2}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial G_3}{\partial x_i} \right).$$

- a) $\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g$,
- b) $\text{div}(f\vec{F}) = \vec{F}\vec{\nabla}f + f \text{div } \vec{F}$,
- c) $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \text{rot } \vec{G}$,
- d) $\vec{\nabla}(\vec{F}\vec{G}) = (\vec{G}\vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F}\vec{\nabla})\vec{G} + \vec{G} \times \text{rot } \vec{F} + \vec{F} \times \text{rot } \vec{G}$,
- e) $\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G}\vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F}\vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F} \text{div } \vec{G} - \vec{G} \text{div } \vec{F}$,
- f) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\vec{F}^2\right) = \vec{F}(\vec{\nabla})\vec{F} + \vec{F} \times \text{rot } \vec{F}$.

2. Vyjádřete operátor rotace a divergence

910 KAPITOLA 9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

a) ve válcových souřadnicích,

b) v kulových souřadnicích.

*3. Vyjádřete gradient, divergenci, rotaci a Laplaceův operátor v obecných ortogonálních souřadnicích u, v, w , jejichž Laméovy koeficienty jsou h_u, h_v a h_w . Prověřte shodu se speciálním případem válcových, resp. kulových souřadnic (vztah (9.79), resp. (9.80), resp. úloha 2).

4. Převeďte operátor Q zadaný v kartézských souřadnicích do nových souřadnic, které jsou určeny zobrazením $\alpha : (x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$. (Je-li třeba počítat s tečnými vektory \vec{e}_u, \vec{e}_v a \vec{e}_w , nebudou obecně ortogonální ani normované.)

a) $Q = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \alpha : u = x + y, v = x - y, z = z.$

b) $Q = \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{e}_3, \quad \alpha : u = x + y - z, v = x + y + z, w = x - y,$

c) $Q = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z}, \quad \alpha : u = x + y + z, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, w = x + y - z,$

d) $Q = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha : u = xy, v = \frac{x}{y}.$