

Věta 1.7 (Konvergence řad s nezápornými členy):

Nechť (předpoklady)

Pak (tvrzení)

srovnávací kritérium

$a_n \leq b_n$ s výjimkou nejvýše konečně mnoha n

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

existuje vlastní $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} > 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

odmocninové kritérium — Cauchyovo

$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ s výjimkou konečně mnoha n

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho n

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{a_n} \} < 1$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{a_n} \} > 1$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

podílové kritérium — d'Alembertovo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \text{ s výjimkou konečně mnoha } n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \text{ s výjimkou konečně mnoha } n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

$$\text{existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$\text{existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

Raabeovo kritérium

$$\text{existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$\text{existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

integrální kritérium

$$f(x) \text{ je nezáporná a nerostoucí na } [1, \infty) \implies \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konverguje} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konverguje}$$

Dirichletovo kritérium

$$\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}} \text{ je monotónní, } \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\} = 0$$

$$a \text{ posloupnost částečných součtů řady } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je ohraničená} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konverguje}$$

Abelovo kritérium

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje a posloupnost } \{b_n\}_{n \in \mathbf{N}} \text{ je monotónní a ohraničená} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konverguje}$$