Typickým jednoduchým příkladem geometrické řady funkcí je

$$a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (x-a)^{n-1} = a_1 \left(1 + (x-a) + (x-a)^2 + \cdots + (x-1)^n + \cdots\right), \quad a,\, a_1 \in \mathbf{R}.$$

Tato řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $(a-1+\delta,\, a+1-\delta)$, $0 < \delta < 1$, a konverguje lokálně stejnoměrně na $(a-1,\, a+1)$.

Nyní, jak jinak, uvedeme Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro řady funkcí. Jeho důkaz provádět nebudeme, jen bychom reprodukovali důkaz pro posloupnosti funkcí aplikovaný na posloupnost částečných součtů řady.

Věta 1.10 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro řady funkcí): *Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in \mathcal{F}_D$, je stejnoměrně konvergentní na D právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$, všechna $m \in \mathbf{N}$, a pro každý bod $x \in D$ platí $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$.*

Uvědomte si, že uvnitř absolutní hodnoty je rozdíl $s_{m+n}(x) - s_n(x)$. Nejde tedy o nic jiného, než o Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro posloupnost částečných součtů řady.

V následujícím textu již pouze shrneme další kritéria stejnoměrné konvergence a vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad funkcí v podstatě jako důsledky odpovídajících kritérií a vlastností posloupností funkcí. Vždyť přece řady jsou určeny posloupnostmi svých částečných součtů. Některá kritéria a vlastnosti jsou obdobou kritérií a vlastností řad čísel.

Doplníme ještě jeden potřebný pojem, jímž je stejnoměrná ohraničenost posloupnosti funkcí. Posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ se nazývá *stejnoměrně ohraničená* na D, jestliže existuje číslo M tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in D$ platí $|f_n(x)| \leq M$. Všimněme si, že je požadována existence čísla M *univerzálního* pro celou množinu D.

Věta 1.11 (Stejnoměrná konvergence řad — kritéria a vlastnosti): *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je řada funkcí definovaných na D, $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ posloupnost jejích částečných součtů.*

Nechť (předpoklady)	***Pak (tvrzení)***

(zobecněné) Weierstrassovo kritérium

pro jistou posloupnost $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *nezáporných funkcí je* $\lvert f_n(x)\rvert \le g_n(x)$ *na* D *pro všechna* $n\in\mathbf{N}$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně a absolutně na* D

Abelovo kritérium

$\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je monotónní a stejnoměrně ohraničená na* D, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D

Dirichletovo kritérium

$\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je na* D *monotónní a konverguje na* D *stejnoměrně k nulové funkci,* $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je stejnoměrně ohraničená na* D	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D

spojitost součtu řady

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D *k součtu* $s(x)$ *a všechny* $f_n(x)$ *jsou spojité na* D	$\Longrightarrow$	$s(x)$ *je spojitá funkce na* D

integrování člen po členu

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* $[a,b]$ *k součtu* $s(x)$ *a všechny funkce* $f_n(x)$ *jsou integrabilní na* $[a,b]$	$\Longrightarrow$	$s(x)$ *je integrabilní na* $[a,b]$, $\int\limits_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$

derivování člen po členu

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje na otevřeném D k součtu $s(x)$, všechny $f_n(x)$ mají derivaci na D a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na D*	$\Longrightarrow$	*$s(x)$ má derivaci na D a platí $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$*

První vlastnost je důležitá pro prošetřování stejnoměrné konvergence řad. Zejména je účinná v případech, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselná řada s nezápornými členy. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ se nazývá *majoranta.* Pro praktické výpočty jsou nejdůležitější poslední dvě vlastnosti. Představují možnost takzvaného *integrování, resp. derivování „člen po členu“*. Význam tohoto názvu je jasný. Platí-li předpoklady, je zaručen integrál, resp. derivace funkce představující součet řady, není však nutné řadu napřed sečíst a pak výsledek integrovat, resp. derivovat. Lze to udělat v opačném pořadí, tj. napřed integrovat, resp. derivovat jednotlivé členy řady a teprve potom sečíst. Tento postup bývá často snazší a rychlejší. Pozor však na plnění předpokladů (opět jsou zde v roli souboru postačujících podmínek).

Než přistoupíme k ukázkám aplikace věty 1.11, dokažme alespoň první tvrzení, které, jak jsme již konstatovali, je velice důležité pro teoretické úvahy. Důkazy ostatních tvrzení jsou přímými důsledky již dokázaných vět o posloupnostech funkcí aplikovaných na posloupnosti částečných součtů řad. Ponecháme je pro cvičení.

K důkazu použijeme Cauchyova–Bolzanova kritéria pro řady. Počítejme:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+m}(x)| \leq$$
$$\leq g_{n+1}(x) + g_{n+2}(x) + \cdots + g_{n+m}(x).$$

Protože řada (nezáporných funkcí) $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ splňuje Cauchyovo–Bolzanovo kritérium stejnoměrné konvergence, vyplývá z předchozí nerovnosti, že toho kritérium splňuje jak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Příklad 1.30: Použití majoranty

Kritérium s majorantou je velice užitečné, chceme-li pouze zjistit stejnoměrnou konvergenci řady a nevadí nám, že nestanovíme její součet. I když kritérium je obecné v tom smyslu, že členy majoranty mohou být také funkce, porovnáváme zadanou řadu nejčastěji s číselnou řadou s nezápornými členy, jejíž konvergenci máme ověřenou pomocí některého z kritérií věty 1.7. Například snadno zjistíme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konverguje pro každé $k \in \mathbf{R}$, $k > 1$ (úloha 13 a) ve cvičení 8.1.3). Pro řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \quad \text{pro} \quad k > 1$$

z toho vyplývá, že konverguje stejnoměrně a absolutně na intervalu $[-1, 1]$, neboť

$$\text{pro} \quad |x| < 1 \quad \text{je} \quad \left|\frac{x_n}{n^k}\right| \leq \frac{1}{n^k}.$$