Obsah

1 Řady funkcí **3**
1.1 Posloupnosti a řady podruhé — čísla . . . 4
1.1.1 Číselné posloupnosti a jejich konvergence . . . 5
1.1.2 Číselné řady — lze sečíst nekonečně mnoho čísel s konečným výsledkem? 17
1.1.3 Cvičení . . . 44
1.2 Posloupnosti a řady potřetí — funkce . . . 47
1.2.1 Posloupnosti funkcí — není konvergence jako konvergence . . . 47
1.2.2 Řady funkcí a posloupnosti jejich částečných součtů . . . 61
1.2.3 Cvičení . . . 66
1.3 Zvlášť užitečné řady funkcí . . . 68
1.3.1 Mocninná řada . . . 68
1.3.2 Fourierova řada . . . 72
1.3.3 Několik opravdu užitečných aplikací . . . 77
1.3.4 Cvičení . . . 95

Výsledky cvičení **97**

Kapitola 1

Řady funkcí

Možná jste si právě prolistovali obsah této kapitoly a kladete si otázku, proč se máme ještě zabývat posloupnostmi a řadami, když jsme jim už popřáli docela dost pozornosti v prvním dílu. Byl jim věnován celý odstavec 2.1.6 a dodatek E. Cíl této kapitoly je však trochu jiný, než studovat detaily vlastností konvergence či divergence *číselných* posloupností a řad. Půjde nám totiž, jak napovídá název kapitoly, o *řady funkcí*. S takovým případem jsme se již také v prvním dílu setkali. Vzpomínáte na příklad 2.47 v odstavci 2.2.3 nazvaný „Když diferenciál nestačí“? V něm jsme řešili problém přibližné náhrady funkce $\cos\varphi$ pro malé hodnoty úhlu φ jinou funkcí, snadněji vyčíslitelnou. Zjistili jsme, že náhrada lineární funkcí, jaká byla možná v případě sinu, tj. $\sin\varphi \doteq \varphi$, u kosinu nefunguje, neboť diferenciál funkce $\cos\varphi$ v bodě $\varphi_0 = 0$ je nulový. Poté jsme obecně dospěli k možnosti náhrady funkce $f(x)$ v okolí bodu $x = a$ Taylorovým polynomem n-tého stupně (vztah (2.27)), který představuje prvních $n+1$ členů nekonečné Taylorovy řady

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots \ .$$

Předchozí výraz je nekonečným součtem funkcí speciálního typu — mocnin proměnné $(x-a)$ násobených konstantami. Obecně bychom takový nekonečný součet mohli zapsat ve tvaru

$$s(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Nazýváme jej *nekonečnou mocninnou řadou*. Taylorova řada je tedy speciálním případem mocninné řady. Praktický význam Taylorovy řady je nepochybný a vyložili jsme si jej již v odstavci 2.2.3 prvního dílu. Obecně má nekonečná řada funkcí tvar

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Další řadu s praktickým významem může přiblížit následující příklad.

Příklad hudební: Kdyby houslista zahrál na různých houslích stejný tón, mohli bychom si všimnout, že každý z nástrojů zní trochu jinak. Tón má stejnou výšku, ale jinou barvu. Čím to je? Výška tónu je z fyzikálního hlediska popsána frekvencí ν, resp. úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi\nu$ (například jednočárkované, komorní „a“ má frekvenci 440 Hz). Struna skutečně kmitá s touto frekvencí. Závislost výchylky jednotlivých jejích bodů na čase je periodickou funkcí času s touto frekvencí. Obecně však není přesně harmonickým (například sinusovým) signálem, ale jeho mírnou modifikací. Z toho důvodu jsou v tónu slyšet i jiné frekvence, ne však jakékoli, ale celočíselné násobky původní frekvence, tj. 2ν, 3ν, atd. Barva tónu pak souvisí s amplitudami těchto *vyšších harmonických* frekvencí. Matematicky můžeme závislost výchylky bodu struny v obecnosti zapsat jako

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right].$$

Tato *nekonečná řada* funkcí se nazývá *Fourierova.* Její význam například ve fyzice, elektrotechnice či elektronice je nedozírný — umožňuje rozložit periodický signál na signály základní frekvence a vyšších harmonických.

V souvislosti s Taylorovou řadou jsme si také kladli otázku, jak zjistit, zda takový nekonečný součet opravdu „dospěje“ k nějaké funkci $s(x)$, tj. zda řada *konverguje.* Zmínili jsme se také o „obyčejné“ (*bodové*) a o *stejnoměrné* konvergenci. Pojem bodové a stejnoměrné konvergence má samozřejmě význam nejen pro Taylorovy či obecnější mocninné řady, ale i pro řady Fourierovy a jakékoli jiné řady funkcí. A právě o to v této kapitole převážně půjde. Abychom však vlastnosti řad funkcí mohli studovat po matematické stránce důkladněji, musíme se ještě na chvíli vrátit k posloupnostem a řadám číselným. V závěru kapitoly si pak podrobněji všimneme právě řad mocninných a Fourierových a možností jejich aplikace.

Vedle své užitečnosti praktické jsou řady docela zábavné a jsou užitečné i tím, že pomáhají tříbit matematické myšlení. Výrok Alexandra Ženíška „…zcela pochopit nekonečné řady znamená začít rozumět matematice…“ je možná určitou nadsázkou, ne však příliš velkou.

1.1 Posloupnosti a řady podruhé — čísla

V tomto odstavci podrobněji probereme některé vlastnosti číselných posloupností a řad, které budeme pro zavedení pojmů souvisejících s řadami funkcí a studium jejich vlastností potřebovat. Nebudeme se tedy číselnými posloupnostmi a řadami zabývat „pro ně samotné“, ale s cílem jejich využití v úvahách o řadách funkcí.

1.1.1 Číselné posloupnosti a jejich konvergence

Stručně nyní shrneme potřebné dosavadní poznatky o posloupnostech z odstavce 2.1.6 a dodatku E a přidáme další. (Pokud byste měli pocit, že o posloupnostech je toho již příliš, mějte trpělivost. Hlubší pochopení pojmu konvergence posloupnosti je, jak jsme již předeslali, důležitým základem pro studium nejen číselných řad, ale i řad funkcí, které mají ve fyzice i jiných oborech značný význam.)

Připomeňme:

Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel $\mathbf{N}$, v některých případech množina přirozených čísel doplněná nulou, tj. $\mathbf{N} \cup \{0\}$. Tuto funkci

$$f : \mathbf{N} \ni n \longrightarrow f(n) = a_n \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

zapisujeme obvykle ve tvaru $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Vzpomeňme si na definici limity posloupnosti z dodatku E prvního dílu:

Číslo $L \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ se nazývá *limitou posloupnosti* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje index $N \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n > N$ je $a_n \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = L.$$

Je-li $L \in \mathbf{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *konverguje*, a číslo L je její *vlastní limita*. Je-li $L = \pm\infty$, říkáme, že posloupnost *diverguje*, přičemž $+\infty$, resp. $-\infty$ je její *nevlastní limita*. Pokud limita posloupnosti neexistuje, říkáme, že posloupnost *osciluje*.

Připomeňme ještě, že okolím bodu $+\infty$, resp. $-\infty$ rozumíme interval $\mathcal{O}(+\infty) = (K, \infty)$, resp. $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, K)$, $K \in \mathbf{R}$. Limity posloupností již také umíme počítat. Postup je stejný jako při výpočtech limit funkcí v nevlastních bodech. A také jsme měli možnost procvičit výpočty limit posloupností v úlohách dodatku E. V následujících příkladech ukážeme praktické ověření správnosti vypočtené limity (nebo neexistence limity) pomocí definice, abychom definici do hloubky pochopili.

Příklad 1.1: Konvergentní posloupnost

Spočtěme limitu posloupnosti

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad a_n = \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+1)!},$$

standardním způsobem.

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+2)}{n!(-n)} = -\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = -1.$$

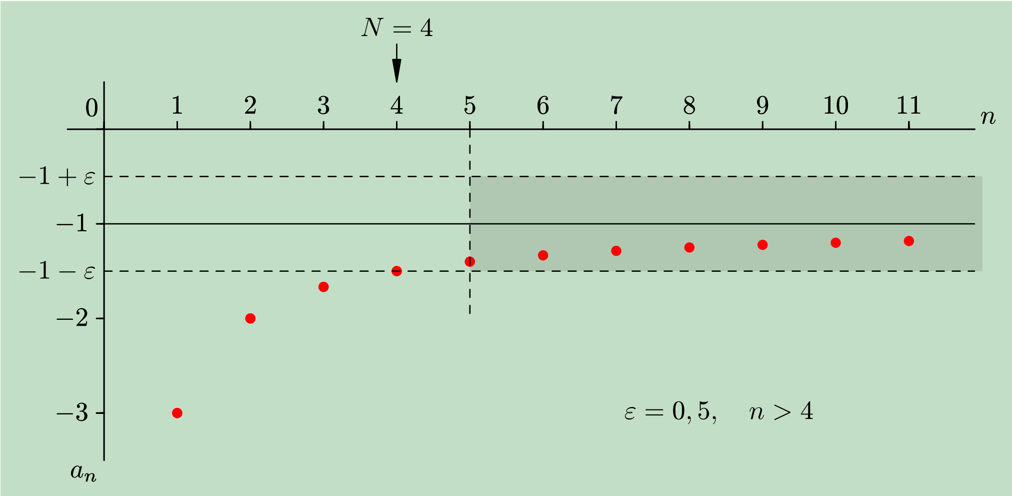
Dokážeme nyní pomocí definice, že číslo -1 je opravdu limitou uvažované posloupnosti. Zvolme okolí „údajné“ limity $L=-1$ ve tvaru $\mathcal{O}(-1)=(-1-\varepsilon,\,-1+\varepsilon)$, kde $\varepsilon>0$ je zvoleno libovolně. Hledáme index N tak, aby pro všechny indexy n, pro něž je $n>N$, platilo $a_n\in\mathcal{O}(-1)$, tj. $-1-\varepsilon<a_n<-1+\varepsilon$,

$$-1-\varepsilon<\frac{n!+(n+1)!}{n!-(n+1)!}<-1+\varepsilon \implies -1-\varepsilon<-\frac{n+2}{n}<-1+\varepsilon.$$

Řešením této nerovnosti snadno zjistíme, že požadavek $a_n\in\mathcal{O}(-1)$ je splněn pro všechny indexy n, pro které je $n>\frac{2}{\varepsilon}$. Index N můžeme proto zvolit jako celou část z hodnoty $\frac{2}{\varepsilon}$. Situaci při zvětšujícím se n znázorňuje následující tabulka a obrázek 1.1. Například pro $\varepsilon=0,5$ je $N=4$ a nerovnost $|a_n-(-1)|<0,5$ bude platit pro všechny indexy $n>4$. Pro $\varepsilon=0,3$ je $N=6$ a nerovnost $|a_n-(-1)|<0,3$ platí pro $n=7,\,8,\,9,\,\ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\ldots$
a_n	-3	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{13}{11}$	$\ldots$

Pro $\varepsilon=0,1$ vyjde $N=20$ a požadovaná nerovnost $|a_n-(-1)|<0,1$ platí pro $n=21,\,22,\,23,\ldots$ Číslo -1 je tedy skutečně limitou posloupnosti. Jde o limitu vlastní, posloupnost konverguje.



Obr. 1.1 K definici konvergentní posloupnosti a k příkladu 1.1.

Příklad 1.2: Divergentní posloupnost

Uvažujme nyní třeba o posloupnosti

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}},\quad a_n=\frac{n^2-1}{n+2}$$

a počítejme její limitu:

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=+\infty.$$

Zvolme okolí bodu $+\infty$, který by podle výpočtu měl být (nevlastní) limitou posloupnosti, ve tvaru $\mathcal{O}(+\infty)=$ $=(K,\,\infty)$, kde K je libovolné kladné číslo. Hledáme-li index N tak, aby pro všechna $n>N$ platilo $a_n\in\mathcal{O}(+\infty)$, musíme řešit nerovnost

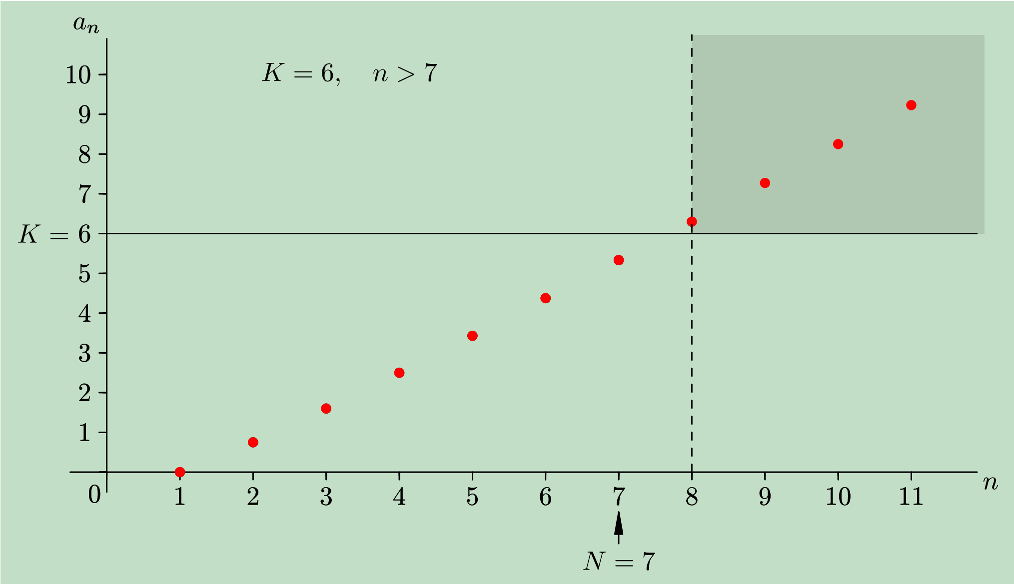
$$\frac{n^2-1}{n+2} > K.$$

Dostaneme požadavek

$$n > \frac{K + \sqrt{K^2 + 4(1+2K)}}{2}.$$

Posloupnost má tedy nevlastní limitu $+\infty$, takže diverguje. Chování jejích počátečních členů vidíme v následující tabulce a na obrázku 1.2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a_n	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{63}{10}$	$\frac{80}{11}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{120}{13}$	...



Obr. 1.2 K definici divergentní posloupnosti a k příkladu 1.2.

Například pro $K = 6$ je hodnota indexu N, od kterého výše jsou členy posloupnosti větší než K, rovna 7.

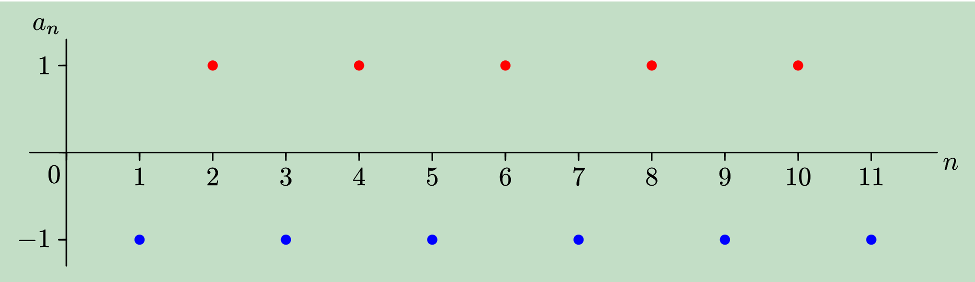
Příklad 1.3: Oscilující posloupnost

Nejjednodušší oscilující posloupností je

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad a_n = (-1)^n.$$

Znázornění jejích členů až po $n = 11$ je na obrázku 1.3.

Slovo „osciluje“ se zde velice hodí. Posloupnost totiž nabývá střídavě hodnoty 1 (pro sudá n) a hodnoty -1 (pro lichá n). Mělo by se nám tedy pomocí definice podařit dokázat, že žádné číslo L, ani $+\infty$, ani $-\infty$, není její limitou. Pro případ $+\infty$ a $-\infty$ je věc jasná okamžitě: Pro ověření, že bod $+\infty$ není limitou posloupnosti, stačí volit jakékoli $K > 1$ a dokonce žádný z členů posloupnosti nebude ležet v intervalu (K, ∞). Podobně pro $-\infty$ zvolíme $K < -1$ a všechny členy posloupnosti budou vně intervalu $(-\infty, K)$. Pro jakékoli číslo $L \in \mathbf{R}$ stačí



Obr. 1.3 Oscilující posloupnost z příkladu 1.3.

volit $\varepsilon = 1/2$ a hned vidíme, že do žádného intervalu o délce $2\varepsilon = 1$ se nepodaří „uvěznit“ členy posloupnosti od jistého N výše, neboť vzdálenost libovolného členu a_n s lichým indexem n od libovolného členu s indexem sudým je 2. Jiný typický příklad oscilující posloupnosti jsme viděli v dodatku E prvního dílu (příklad E.2).

Položme si ještě otázku, jejíž odpověď může být při vyšetřování vlastností posloupností užitečná: Jak je to s konvergencí, divergencí, resp. oscilací posloupností, které lze ze zadané posloupnosti vybrat? Může se stát, že třeba daná posloupnost konverguje a posloupnost z ní vybraná diverguje, nebo osciluje? Nebo naopak? Definujme nejprve vybranou posloupnost.

Předpokládejme, že je dána posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Zvolme libovolnou rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, $n_k \in \mathbf{N}$, tj. $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Posloupnost

$$\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}, \quad \text{kde} \quad b_k = a_{n_k},$$

se nazývá *vybraná posloupnost*, nebo též *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Předpokládejme, že původní posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje a označme L její limitu. Zvolme libovolně okolí $\mathcal{O}(L)$ čísla L. Podle definice konvergentní posloupnosti existuje takový index N, že pro všechna $n > N$ je $a_n \in \mathcal{O}(L)$. Označme K takový index, pro který $n_K > N$. Pak je zřejmé, že pro všechna $k > K$ platí $a_{n_k} \in \mathcal{O}(L)$, tj. $b_k \in \mathcal{O}(L)$. Posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ také konverguje a její limitou je číslo L. Bude-li posloupnost divergentní, tj. její limita bude $+\infty$, nebo $-\infty$, bude úvaha vypadat obdobně. Proveďte ji sami. Vidíme, že všechny podposloupnosti konvergentní, resp. divergentní posloupnosti mají stejnou limitu, shodnou s vlastní, resp. nevlastní limitou původní posloupnosti. Nemůže se tedy stát, že by podposloupnost konvergentní posloupnosti divergovala, nebo oscilovala. Nemůže se ani stát, že by podposloupnost divergentní posloupnosti konvergovala, nebo oscilovala.

Příklad 1.4: Co všechno lze vybrat z oscilující posloupnosti?

Odpověď je docela jednoduchá, ale než ji formulujeme obecně, podívejme se na konkrétní příklad. Vezměme třeba posloupnost z příkladu 1.3. Proveďme dva výběry indexů:

$$\mathbf{N} \ni k \longrightarrow n_k = 2k \quad \text{a} \quad \mathbf{N} \ni k \longrightarrow n_k = 2k - 1.$$

Pro odpovídající vybrané posloupnosti $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ a $\{c_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ platí

$$\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}} = \{a_{2k}\}_{k\in\mathbf{N}} \implies b_k = 1, \quad \{c_k\}_{k\in\mathbf{N}} = \{a_{2k-1}\}_{k\in\mathbf{N}} \implies c_k = -1.$$

Posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ je tedy tvořena samými jedničkami (na obrázku 1.3 vyznačeno červeně) a její limita je rovna jedné, posloupnost $\{c_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ zase samými minus jedničkami (na obrázku 1.3 vyznačeno modře) a její limita je minus jedna. Z oscilující posloupnosti jsme tedy vybrali dvě konvergentní posloupnosti. Kdybychom například vybírali posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ tak, že pro konečný počet M členů, třeba b_{k_1}, b_{k_2}, ..., b_{k_M}, bychom indexy n_{k_1}, n_{k_2}, ..., n_{k_M} volili sudé, nebo liché zcela náhodně a pro ostatní $k \in \mathbf{N}$ buď už jen sudé, nebo jen liché indexy n_k, byla by posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ konvergentní, a to buď s limitou $L_1 = 1$, nebo s limitou $L_2 = -1$. A zcela jistě byste dokázali z oscilující posloupnosti $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ vybrat opět oscilující posloupnost.

Pro hloubavější čtenáře může být velmi zajímavá otázka souvislosti existence limity posloupnosti s problémem jejích hromadných bodů. Lze říci, že porozumíme-li pojmu hromadného bodu, nemůžeme již mít problém s pochopením pojmu limity ani s pravidly pro zacházení s limitami. Pojem hromadného bodu je zcela obecný a limita je pouze speciálním případem. Pokud je čtenář zaměřen spíše prakticky a chce se rychle dostat k výpočetním pravidlům pro limity, může nyní bez ztráty souvislosti výkladu přeskočit až k větě 1.2, která tato pravidla shrnuje.

Příklad 1.5: Podposloupnosti a hromadné body

Vzpomeneme-li si na definici hromadného bodu posloupnosti z dodatku E prvního dílu (připomeňme — číslo $A \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ je hromadným bodem posloupnosti, jestliže v jeho libovolném okolí $\mathcal{O}(A)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti), vidíme hned, že posloupnost z příkladu 1.4 má hromadné body dva, $A_1 = L_1 = 1$ a $A_2 = L_2 = -1$. Jsou to právě limity všech jejích konvergentních podposloupností. Číslo $A_1 = 1$ je společnou limitou všech podposloupností vybraných tak, že obsahují nekonečně mnoho jedniček a konečně mnoho minus jedniček, zatímco číslo $A_2 = -1$ je společnou limitou všech podposloupností obsahujících nekonečně mnoho minus jedniček a konečně mnoho jedniček.

Z definice podposloupnosti a z definice hromadného bodu posloupnosti přímo plyne, že hromadné body dané posloupnosti jsou právě vlastní, nebo nevlastní limity všech takových jejích podposloupností, které konvergují, nebo divergují. Přesněji, je-li $A \in \mathbf{R}$ hromadným bodem posloupnosti, pak z ní lze vybrat takovou podposloupnost, jejíž (vlastní) limitou je číslo A. Je-li bod $+\infty$, resp. $-\infty$ hromadným bodem posloupnosti, pak z ní lze vybrat divergentní posloupnost s nevlastní limitou $+\infty$, resp. $-\infty$. Výběr podposloupnosti samozřejmě není jednoznačný, jak ukazují i příklady 1.4 a 1.5.

Stále však neodpovídáme na otázku, zda z *každé* posloupnosti lze vybrat vůbec nějakou konvergentní, nebo divergentní podposloupnost. Souvislost hromadných bodů posloupnosti a limit jejích vhodně zvolených podposloupností je již zřejmá. Ale co když posloupnost nemá žádný hromadný bod? Odpověď na tuto otázku již také padla v dodatku E, kde byla uvedena bez zdůvodnění. Protože však jde o klíčovou vlastnost posloupností, formulujeme ji ve větě.

Věta 1.1 (Hromadné body posloupností): *Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.*

Tvrzení je to velice jednoduché, důkaz však trochu práce dá. Provedeme jej sporem. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ nemá žádný hromadný bod. Znamená to, že třeba bod $-\infty$ není jejím hromadným bodem. Pak ale existuje okolí $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty,\, a)$, ve kterém leží pouze konečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Podobně je tomu i s bodem $+\infty$, k němuž existuje okolí $\mathcal{O}(+\infty) = (b,\, \infty)$, v němž leží opět konečně mnoho členů dané posloupnosti. Lze volit $a < b$. V intervalu $[a,\, b]$ tedy leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Už nyní je názorně jasné, že někde uvnitř intervalu $[a,\, b]$ se členy posloupnosti musí „nahušťovat“, tedy „hromadit“. Je však třeba správnost této představy dokázat. Označme proto jako M množinu všech takových čísel $x \in [a,\, b]$, pro která je v intervalu $[a,\, x]$ pouze konečný počet členů posloupnosti. Podle výchozího předpokladu ani bod a není hromadným bodem, existuje tedy i jeho okolí $\mathcal{O}(a) = (a-\delta_1,\, a+\delta_2)$, $\delta_1,\, \delta_2 > 0$, obsahující jen konečně mnoho členů posloupnosti. Množina M je tedy neprázdná. Dále je množina M shora omezená. Jednou z jejích horních závor je například číslo b. (V intervalu $[a,\, b]$ je totiž členů posloupnosti nekonečně mnoho, bod b tedy do množiny M rozhodně nepatří a z definice množiny M je tak zřejmé, že $x < b$ pro všechna $x \in M$.) Označme ξ supremum množiny M. Ukážeme, že ξ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Postupujeme opět sporem. Předpokládejme, že $\xi = \sup M$ není hromadným bodem posloupnosti. Označme $\mathcal{O}(\xi) = (\xi-\varepsilon,\, \xi+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, takové jeho okolí, ve kterém je pouze konečně mnoho členů posloupnosti. (Že takové okolí existuje jako důsledek právě vysloveného předpokladu, si již jistě zdůvodníte sami.) Pak třeba číslo $\xi + \frac{\varepsilon}{2}$ je prvkem množiny M, neboť v intervalu $[a,\, \xi + \frac{\varepsilon}{2}]$ bude ležet jen konečně mnoho členů studované posloupnosti. Poslední závěr je ve sporu se skutečností, že ξ je supremum množiny M. Náš předpoklad, že ξ není hromadný bod posloupnosti, byl tedy nesprávný. Kdybychom začali důkaz jinak a předem vyloučili vlastní hromadné body (tj. „v konečnu“), museli bychom dospět k závěru, že hromadným bodem posloupnosti je $+\infty$, nebo $-\infty$. Zkuste si takový důkaz provést.

Z věty 1.1 je vidět, že konvergentní podposloupnosti lze v dané posloupnosti vybírat právě tehdy, má-li posloupnost alespoň jeden ze svých hromadných bodů v konečnu. Divergentní podposloupnosti lze vybírat právě tehdy, když kterýkoli z bodů $+\infty$, $-\infty$ je hromadným bodem posloupnosti. Z toho, co bylo řečeno o hromadných bodech a limitách posloupností, je jasné, že posloupnost má limitu právě tehdy, když má právě jeden hromadný bod. Ten je samozřejmě s limitou totožný. Současně je také limitou všech podposloupností dané posloupnosti, aneb „všechny cesty vedou do Říma“.

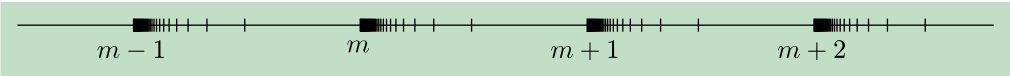
Příklad 1.6: Může mít posloupnost nekonečně mnoho hromadných bodů?

Tato otázka je také zodpovězena v dodatku E prvního dílu — může. Dokážeme však najít vhodný příklad? Jistěže ano, a velice jednoduchý. Uvažujme třeba o posloupnosti

$$\{a(m)_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad a(m)_n = m + \frac{1}{n}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Na první pohled vidíme, že tato posloupnost konverguje k číslu m, které je její limitou a zároveň jediným hromadným bodem. Pro každé přirozené číslo m takovou posloupnost dostaneme. Pokud se nám nyní podaří všechny tyto posloupnosti nějak „sjednotit" do jedné, získáme posloupnost, pro kterou množina všech jejích hromadných bodů bude $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Jde o to, jak prvky množiny čísel určených dvěma indexy, $a_{mn} = a(m)_n$, očíslovat jediným indexem. Tento index přiřadíme jednotlivým členům „sjednocené" posloupnosti pomocí následující tabulky, v níž jsou řádky číslovány indexem m a sloupce indexem n, podobně jako tomu je u matic. Členu $a_{mn} = a(m)_n = m + \frac{1}{n}$ výsledné posloupnosti přiřadíme přirozené číslo umístěné v maticové pozici s řádkovým indexem m a sloupcovým indexem n. Chování posloupnosti ilustruje obrázek 1.4.

m/n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
1	1	3	6	10	15	21	28	...
2	2	5	9	14	20	23	31	...
3	4	8	13	19	26	34	43	...
4	7	12	18	25	33	42	52	...
5	11	17	24	32	41	51	62	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...



Obr. 1.4 K příkladu 1.6.

A dokonce existují posloupnosti, jejichž hromadné body vyplňují celou reálnou osu! Tuto vlastnost má například posloupnost určená vzájemně jednoznačným zobrazením $\mathbf{N} \ni n \longrightarrow Q_n \in \mathbf{Q}$ množiny všech přirozených čísel na množinu všech čísel racionálních. (Důsledkem toho, že takové zobrazení existuje, tj. že prvky množiny všech racionálních čísel „lze očíslovat", je známý fakt, že množina všech racionálních čísel je takzvaně spočetná.) V libovolně malém okolí každého reálného čísla leží dokonce nekonečně mnoho čísel racionálních. Každé reálné číslo je tedy hromadným bodem posloupnosti $\{Q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Protože posloupnosti jsou, jak jsme již konstatovali, také funkce, váže se k nim řada pojmů, z nichž některé jsou definovány zcela analogicky jako u funkcí. Jen si musíme uvědomit, že na místě spojité nezávisle proměnné x, se kterou jsme pracovali u funkcí, stojí v případě posloupností diskrétní proměnná, jíž je index n. Zkuste si sami formulovat definici posloupnosti *ohraničené*, posloupnosti *rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající.*

Pro počítání s limitami posloupností platí obdobná pravidla jako pro limity funkcí. Stejně jako jsme shrnuli vlastnosti limit funkcí ve větě 2.1 (první díl), provedeme to nyní pro posloupnosti.

Věta 1.2 (Vlastnosti limit):

Nechť (předpoklady)		***Pak (tvrzení)***
$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *má limitu*	$\Longrightarrow$	*tato limita je jediná*
$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *má vlastní limitu*	$\Longrightarrow$	$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je ohraničená*
$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = 0, \quad \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je ohraničená*	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n b_n\} = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = +\infty$ *a existuje N tak,* *že pro každé $n > N$ je $a_n \leq b_n$*	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = +\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = -\infty$ *a existuje N tak,* *že pro každé $n > N$ je $a_n \geq b_n$*	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = -\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = a \neq \pm\infty,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = b \neq \pm\infty$ *a existuje N tak,* *že pro každé $n > N$ je $a_n \leq b_n$*	$\Longrightarrow$	$a \leq b$
$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = a \neq \pm\infty,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = b \neq \pm\infty,\ a < b$	$\Longrightarrow$	*existuje N tak, že pro* *každé $n > N$ je $a_n < b_n$*
$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = a,$ *existuje N tak, že pro každé $n > N$* *je $a_n \leq c_n \leq b_n$*	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\{c_n\} = a$
$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = a,\ a \neq \pm\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = b,\ b \neq \pm\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha a_n + \beta b_n\} = \alpha a + \beta b,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n b_n\} = ab,\ \lim\{\lvert a_n\rvert\} = \lvert a\rvert$
pokud navíc $b_n \neq 0$ pro každé n a $b \neq 0$	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \dfrac{a}{b}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\{\lvert a_n\rvert\} = +\infty$, $a_n \neq 0$ *pro každé* n	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n^{-1}\} = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$, $a_n \neq 0$ *pro každé* n *a existuje* N *tak, že pro každé* $n > N$ *je* $a_n > 0$	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n^{-1}\} = +\infty$
$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je neklesající (resp. nerostoucí) a shora (resp. zdola) ohraničená*	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = \sup\{a_n \mid n\in\mathbf{N}\}$, *(resp.* $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = \inf\{a_n \mid n\in\mathbf{N}\}$*), tato limita je vlastní*

Pěkný „zvěřinec“ pravidel, že? Jejich důkazy jsou vesměs jednoduché a vycházejí přímo z definice limity posloupnosti. Protože jsme definici probrali velmi důkladně, ponecháme důkazy jednotlivých částí věty čtenáři jako cvičení. Navíc je lze najít v kterékoli učebnici základů matematické analýzy. Zaměříme se proto nikoli na to, že bychom reprodukovali důkazy pravidel ze standardních učebnic, ale na zdůvodnění některých předpokladů, jejichž význam nemusí být na první pohled zřejmý. Smysl některých předpokladů výše uvedených pravidel zcela zřejmý je. Kdyby například v pravidlu o podílu posloupností $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ směly být v posloupnosti jmenovatelů, tj. $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, některé členy nulové, nebyla by posloupnost $\{a_n/b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ vůbec definována. Stejně tak je zřejmý požadavek $b \neq 0$. Také je jasné, proč v praktických pravidlech pro výpočet součtu, součinu, podílu posloupností a absolutní hodnoty posloupnosti a priori předpokládáme, že limity výchozích posloupností jsou vlastní. Jednoduše proto, že s nekonečny neumíme počítat, nemáme pro ně zavedeny algebraické operace. Částečně to v následujícím příkladu napravíme.

Příklad 1.7: Jak počítat s nekonečny?

Některé operace s nekonečny můžeme dodefinovat tak, aby měly smysl i pro praktické počítání, jiné operace, které běžně provádíme s reálnými čísly, však zůstanou nedefinovány (žádná jejich smysluplná definice neexistuje). V následující tabulce jsou definovány operace součtu (spolu s opačnou operací rozdílu) a součinu (spolu s inverzní operací podílu). Uspořádání tabulky je takové, že pro operaci „A znak operace B“ je operand A v prvním sloupci a operand B v prvním řádku.

$+$ („plus“)	$a\in\mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a\in\mathbf{R}$	$2a$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	nedef
$-\infty$	$-\infty$	nedef	$-\infty$

$-$ („minus“)	$a\in\mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a\in\mathbf{R}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	nedef	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	nedef

$\cdot$ („krát“)	$a>0$	$b<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$a>0$	a^2	ab	0	$+\infty$	$-\infty$
$b<0$	ab	b^2	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	nedef	nedef
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	nedef	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	nedef	$-\infty$	$+\infty$

$:$ („děleno“)	$a>0$	$b<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$a>0$	1	$a:b$	nedef	0	0
$b<0$	$b:a$	1	nedef	0	0
0	0	0	nedef	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	nedef	nedef	nedef
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	nedef	nedef	nedef

Proč třeba nemá smysl definovat operaci $a : 0$ pro $a \in \mathbf{R}$? Pro $a = 0$ je „zákaz“ takové operace pochopitelný. Když ale třeba uvážíme situaci, kdy $a > 0$, a nulu si představíme třeba jako limitu konvergentní posloupnosti, mohli bychom si představovat, že dělíme pevné kladné číslo dělitelem se stále menší a menší velikostí, tj. absolutní hodnotou. Podíl tedy bude mít velikost stále větší a větší. Klíč k odpovědi na otázku, proč takový podíl nelze definovat, spočívá nikoli ve velikosti, ale ve znaménku. K nule konvergují například posloupnosti

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad \text{kde} \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = -\frac{1}{n}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

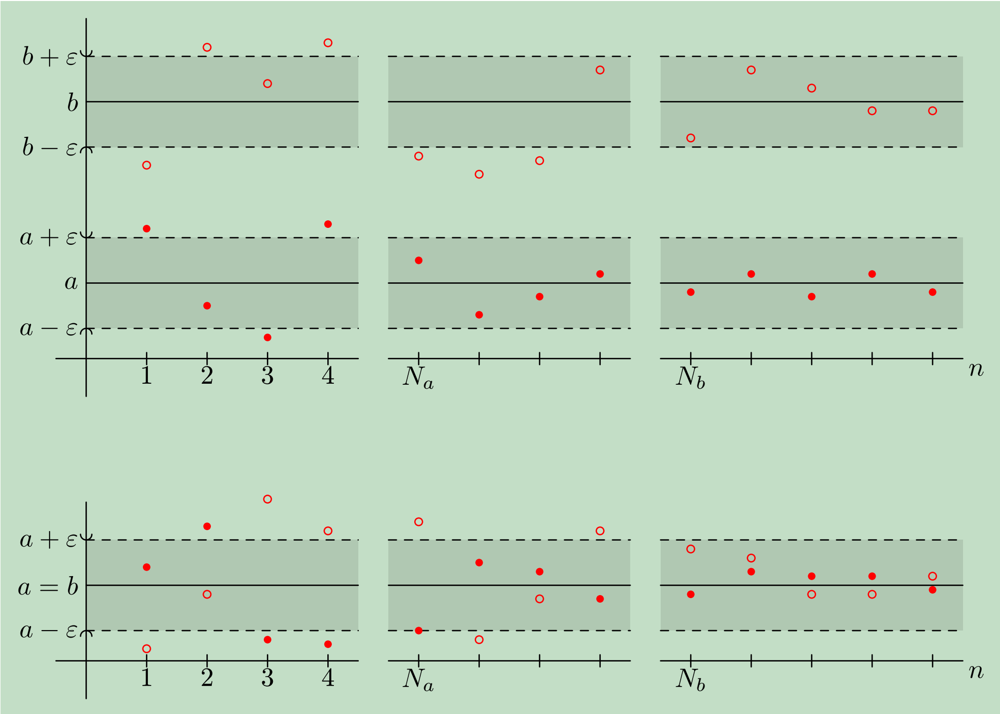
přičemž všechny členy prvé z nich mají kladná znaménka, členy druhé znaménka záporná a u třetí posloupnosti se znaménka střídají. Nulu jako limitu posloupnosti tedy nelze jednoznačně vyjádřit pokud jde o znaménko. Podíl čísla $a > 0$ a nuly tedy nelze definovat, neboť není podle čeho se rozhodnout, zda jej stanovit jako $+\infty$, nebo jako $-\infty$. Pokuste se sami zamyslet nad dalšími nedefinovanými operacemi.

Pozn.: Pozornému čtenáři asi neunikla drobnost: V tabulce pro násobení a dělení odlišujeme případy $a > 0$, $b < 0$. Je to proto, že smyslem tabulky je zavést operace s nekonečny. Součin a podíl konečných čísel a, b je samozřejmě dán standardním způsobem, bez ohledu na jejich znaménka.

Příklad 1.8: Nač všechny ty předpoklady?

Přemýšlejme třeba o třetím pravidlu od konce tabulky ve větě 1.2. Z existence nevlastní limity $+\infty$ posloupnosti $\{|a_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$ pro $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, plyne existence vlastní limity 0 posloupnosti $\{a_n^{-1}\}_{n\in\mathbf{N}}$. Proč se v předpokladu objevuje absolutní hodnota z a_n? Znamená to, že předpoklad $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = +\infty$ by nemusel zaručit nulovost limity posloupnosti tvořené převrácenými hodnotami členů posloupnosti $\{a_n\}$? Který předpoklad je silnější, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = +\infty$, nebo $\lim_{n\to\infty}\{|a_n|\} = +\infty$? Odpověď je snadná. Předpoklad existence nevlastní limity $+\infty$ posloupnosti bez absolutních hodnot je silnější. Pro takovou posloupnost totiž platí, že pro jakkoli velké číslo K vždy existuje index N tak, že všechny členy posloupnosti s indexem vyšším převyšují číslo K. Je-li ovšem $a_n > K$, je také $|a_n| > K$. Naopak to však platit nemusí. Třeba u oscilující posloupnosti $\{(-1)^n\, n\}$ dokážeme zajistit, aby od jistého indexu N převyšovaly její sudé členy libovolně velké kladné číslo K, její liché členy budou naopak menší než $-K$. Limita této posloupnosti neexistuje, zatímco limita posloupnosti utvořené z absolutních hodnot členů $a_n = (-1)^n\, n$ je $+\infty$. Pravidlo tedy říká, že k tomu, aby limita posloupnosti $\{a_n^{-1}\}_{n\in\mathbf{N}}$ byla nulová, stačí slabší předpoklad $\lim_{n\to\infty}\{|a_n|\} = 0$. U předposledního pravidla tabulky plyne z nulovosti limity posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ($a_n \neq 0$) a požadavku $a_n > 0$ od jistého indexu výše existence nevlastní limity $+\infty$ posloupnosti $\{a_n^{-1}\}_{n\in\mathbf{N}}$ a odtud zase slabší vlastnost — existence nevlastní limity $+\infty$ posloupnosti $\{|a_n^{-1}|\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Zamysleme se ještě nad sedmou vlastností: Podle ní z ostré nerovnosti $a < b$ platné pro vlastní limity posloupností $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ plyne stejná ostrá nerovnost pro jejich členy od jisté hodnoty indexu N výše, tj. pro $n > N$ je $a_n < b_n$. Položme si otázku, zda bychom ostré nerovnosti mohli zaměnit za neostré, tj. zda pro $a \leq b$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ je $a_n \leq b_n$. „Zdravý rozum“ možná napovídá, že by to platit mohlo. „Zdravý rozum“ však často klame a v tomto případě také. Jak je to možné, když neostrá nerovnost se od ostré liší o jednu jedinou možnost vztahu mezi a a b, o možnost jejich rovnosti? Tento rozdíl je ovšem velice podstatný. Uvažujme, jak bychom postupovali, kdybychom chtěli pravidlo s ostrou nerovností dokázat. Předpokládejme tedy, že a a b jsou vlastní limity posloupností $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $a < b$. Představu nám usnadní obrázek 1.5. Mezi čísly a a b je „mezera“. A i když třeba bude „velice malá“, můžeme vždy



Obr. 1.5 K vlastnostem limit.

zvolit číslo $\varepsilon > 0$ tak, že se „epsilonové pásy“ okolo a a b nebudou překrývat (například pro $\varepsilon = (b-a)/4$ je to splněno). Protože a je vlastní limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, existuje podle definice index N_a tak, že všechny členy posloupnosti s indexem n větším než N_a leží v intervalu $(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$, tj. odpovídající body grafu posloupnosti leží v epsilonovém pásu kolem bodu a. Podobnou vlastnost mají všechny členy posloupnosti $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — od jistého N_b výše všechny leží v intervalu $(b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)$. Označíme-li $N = \max\{N_a,\, N_b\}$, bude pro všechna $n > N$ platit $a_n < b_n$. Pokud by však nastala možnost $a = b$, pak můžeme volit ε jakkoli malé a mít jistotu, že od určitého indexu N výše budou v intervalu $(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon) = (b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)$ ležet všechny členy obou posloupností, ale o jejich vzájemném vztahu nemůžeme říci vůbec nic.

Dalšími úvahami nad předpoklady věty 1.2 i nad tím, co by se stalo, kdyby nebyly splněny, si může čtenář porozumění pojmu limity posloupnosti ještě prohloubit.

Na závěr odstavce uvedeme větu, která dává podmínku nutnou a postačující pro konvergenci posloupnosti. Pro praktické výpočty nemá tato věta žádný význam, neboť ani nevypovídá o tom, jaká je limita konvergentní posloupnosti. Je však velice užitečná v důkazech.

Věta 1.3 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro posloupnosti): *Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je konvergentní právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ a všechna $m \in \mathbf{N}$ platí*

$$|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Posloupnosti s vlastností (1.2) se nazývají *cauchyovské.*

Uvědomme si ještě, co tato vlastnost znamená: Stanovíme-li si předem, jak „blízko k sobě“ mají být od jistého indexu N výše libovolné dva členy konvergentní posloupnosti, pak takový index zaručeně najdeme. A zdůrazněme již zmíněnou důležitou věc: Věta pracuje pouze s členy posloupnosti, nikoli konkrétně s její limitou.

Důkaz věty má dvě části. V první z nich, která je jednodušší, vyjdeme z předpokladu, že posloupnost je konvergentní. Její limitu označme a. Zvolme jako vždy $\varepsilon > 0$ libovolně. Definici konvergentní posloupnosti aplikujeme na číslo $\varepsilon/2$, za chvíli uvidíme proč. K číslu $\varepsilon/2$ tedy existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ platí

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{a tedy i} \quad |a_{n+m} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro všechna } m \in \mathbf{N}.$$

Pak

$$|a_{n+m} - a_n| = |(a_{n+m} - a) - (a_n - a)| \leq |(a_{n+m} - a)| + |(a_n - a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Důvod použití čísla $\varepsilon/2$ v definici limity posloupnosti je nyní jasný — „aby to vyšlo“. Vidíme, že konvergentní posloupnost má vlastnost (1.2).

Opačný směr důkazu snadno pochopí ti, kteří nepřeskočili odstavec o hromadných bodech posloupnosti. Ostatní se mohou bez důkazu obejít. Především je zřejmé, že $+\infty$ ani $-\infty$ nemohou být hromadnými body cauchyovské posloupnosti (pokuste se to zdůvodnit, je to jednoduché). Všechny hromadné body posloupnosti (víme, že alespoň jeden určitě existuje) proto leží „v konečnu“. Nyní už jen stačí dokázat, že posloupnost má jediný hromadný bod (a ten je zároveň její limitou). Postupujeme sporem: Kdyby existovaly dva různé hromadné body, a_1 a a_2, stačilo by položit třeba $\varepsilon = |a_1 - a_2|/3$. Dva otevřené intervaly, každý o délce ε, z nichž jeden by obsahoval bod a_1 a druhý bod a_2, by se nepřekrývaly. Přitom by každý z nich obsahoval nekonečně mnoho členů posloupnosti. Pro jakkoli velký index N bychom vždy našli členy a_n a a_{m+n}, $n > N$, $m \in \mathbf{N}$, pro něž by platilo $|a_{m+n} - a_n| > \varepsilon$. Dospíváme ke sporu.

1.1.2 Číselné řady — lze sečíst nekonečně mnoho čísel s konečným výsledkem?

Pojem číselné řady také pro nás není nový. Se speciální číselnou řadou, řadou geometrickou, jste se setkali už na střední škole a také jsme se jí zabývali v odstavci 2.1.6 prvního dílu. Nyní, když dobře rozumíme číselným posloupnostem, nebude s řadami problém. Jejich vlastnosti jsou odvozeny od vlastností posloupností jejich částečných součtů. Uvažujme o posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a vytvořme, podobně jako jsme to udělali u posloupnosti geometrické v prvním dílu, součty

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1,\\
s_2 &= a_1 + a_2,\\
\dots\dots &\;\dots\dots\dots\dots,\\
s_{n-1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1},\\
s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,\\
\dots\dots &\;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se nazývá *posloupnost částečných součtů řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \cdots.$$

Tím jsme také zavedli pojem *nekonečné řady* jako matematického objektu. Z předchozího odstavce víme, že posloupnost může být konvergentní, divergentní, nebo oscilující. Od těchto vlastností, spojíme-li je s posloupností (1.3), se odvíjejí pojmy související s nekonečnými řadami.

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, jestliže konverguje posloupnost jejích částečných součtů. (Vlastní) limita s této posloupnosti se pak nazývá *součet řady.* Pokud má posloupnost částečných součtů nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, řekneme, že řada *diverguje k* $+\infty$*, resp. k* $-\infty$. Jestliže posloupnost částečných součtů osciluje, řekneme, že řada *osciluje.*

Řekneme, že řada *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada tvořená absolutními hodnotami členů původní řady, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada konverguje, ale nekonverguje absolutně, říkáme, že řada *konverguje neabsolutně.*

Vlastnosti „diverguje k $+\infty$“, „diverguje k $-\infty$“, „osciluje“ se někdy uvádějí pod souhrnným názvem *diverguje.* Neabsolutní konvergence se také nazývá *obyčejná.* Později uvidíme, že absolutně konvergentní řady mají zvláštní význam. Absolutní konvergence je totiž silnou vlastností a zaručuje konvergenci obyčejnou. Naopak to neplatí. Abychom se o tom přesvědčili, musíme se propracovat až k větě 1.5.

Příklad 1.9: Harmonická řada

Harmonickou řadu najdeme jako příklad v kapitole o řadách snad ve všech učebnicích matematické analýzy. Také si jí všimneme, neboť jde o příklad velice poučný. Jedná se o řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots .$$

Její členy se stále zmenšují, posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje k nule. Přesto posloupnost částečných součtů nemá vlastní limitu. Vypočtěme několik jejích prvních členů:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1, \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2}, \\
s_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \\
s_6 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}, \\
s_7 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}, \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_4 + \frac{4}{8} > 1 + \frac{3}{2}, \\
\cdots &\;.. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

a dále

$$s_{16} > 1 + \frac{4}{2}, \quad s_{32} > 1 + \frac{5}{2}, \quad \ldots, \quad s_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}.$$

Posloupnost částečných součtů harmonické řady je rostoucí a není shora ohraničená. Diverguje k $+\infty$. Harmonickou řadu tedy „nelze sečíst“.

Pozn.: Zajímá vás, odkud pochází slovo „harmonická“ v názvu této řady? Snadno se můžete přesvědčit, že každý její člen pro $n \geq 2$ je harmonickým průměrem sousedních členů,

$$a_n = H(a_{n-1}, a_{n+1}) = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}}.$$

Název používali již Pythagorejci a jeho zdroj je pravděpodobně v oblasti hudby.

Nyní uvedeme *Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro řady*:

Věta 1.4 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro řady): *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje N tak, že pro všechna $n > N$ a všechna $m \in \mathbf{N}$ platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Dokázat větu 1.4 není složité. Konvergence řady je totiž ekvivalentní konvergenci posloupnosti jejích částečných součtů (1.3). Podle věty 1.3 je tato posloupnost konvergentní právě tehdy, je-li cauchyovská. Pak už jen stačí si uvědomit, že

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}|$$

a jsme s důkazem hotovi.

Věty 1.4 hned s výhodou využijeme. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak podle věty 1.4 platí od jistého indexu N výše $|a_{n+1}| < \varepsilon$ (ve vztahu (1.4) jsme zvolili $m = 1$), tj. $|a_{n+1} - 0| < \varepsilon$. Číslo 0 je tedy limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Získali jsme tak *nutnou podmínku* konvergence řady. V případě, že posloupnost tvořená členy řady nemá za limitu nulu, řada nemůže konvergovat. Prošetřování posloupnosti částečných součtů takové řady by bylo zbytečnou prací navíc.

Příklad 1.10: Pozor na počítání s řadami

Sčítáme-li konečný počet čísel, můžeme sčítance libovolně zaměňovat (komutativní zákon) nebo sdružovat do závorek (asociativní zákon). Výsledek vždy vyjde stejně. Jak je tomu v případě řad? Uvažujme o dvou řadách

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} -1^n.$$

První z nich diverguje k $+\infty$, druhá diverguje k $-\infty$. Řada, kterou definujeme pomocí součtu posloupností $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

je řadou ze samých nul. Ta konverguje a jejím součtem je nula. Co kdybychom ale řadu sčítali takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + 1^n - 1^n + \cdots =$$

$$= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1) + \cdots = 1?$$

Použili jsme uzávorkování jako při aplikaci asociativního zákona a výsledek je úplně jiný! Kolik součtů tedy má taková řada?

Jiným příkladem může být často uváděná řada tvořená členy posloupnosti z příkladu 1.3, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

Řada osciluje. (Spočtěte si její částečné součty a uvidíte, že ten s lichým indexem je -1 a ten se sudým je nulový.) Můžeme však její součet zapsat jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + \cdots = -1 + (1-1) + (1-1) + \cdots = -1 \;??$$

Samozřejmě, že každého hned napadne, že s nekonečným počtem členů nebudeme asi moci provádět tytéž operace jako s konečným. Je tomu tak. Operace s řadami mají svá specifická pravidla.

Označme obecně $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ (nebo podle potřeby také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_a$) součet konvergentní řady. Platí následující tvrzení.

Věta 1.5 (Operace s konvergentními řadami):

Nechť (předpoklady)		***Pak (tvrzení)***
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_a,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_b$ $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$	$\Longrightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha s_a + \beta s_b$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*	$\Longrightarrow$	*řada vzniklá vynecháním,* *přidáním nebo změnou* *konečného počtu členů konverguje*
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s,\ \{m_n\}_{n \in \mathbf{N}},\ m_n \in \mathbf{N},$ *je rostoucí posloupnost,* $m_0 = 0,$ $b_n = a_{m_{n-1}+1} + a_{m_{n-1}+2} + \cdots + a_{m_n}$	$\Longrightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$
$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ *konverguje*	$\Longrightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *rovněž konverguje*
$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert = S_a,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_a$	$\Longrightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_{\sigma(n)} \rvert = S_a,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s_a,$ $\lvert s_a \rvert \le S_a,$ *kde* $\sigma : \mathbf{N} \ni n \longrightarrow \sigma(n) \in \mathbf{N}$ *je prosté zobrazení* $\mathbf{N}$ *na* $\mathbf{N}$

Všimněte si zejména třetí a poslední vlastnosti. Třetí vlastnost říká, že při sčítání konvergentní řady můžeme členy libovolně sdružovat do závorek. Platí tedy asociativní zákon. Poslední vlastnost zase znamená, že členy *absolutně konvergentní řady* můžeme libovolně přehazovat a platí to jak pro původní řadu, tak pro řadu z absolutních hodnot (komutativní zákon). Sdružování členů ani záměna jejich pořadí nemění součet řady. U druhé vlastnosti je třeba dát pozor na součet, ten se změnou některých členů samozřejmě obecně změní, i když konvergence řady porušena nebude.

Důkazy všech vlastností shrnutých ve větě 1.5 lze založit na definici nebo na Cauchyově–Bolzanově kritériu pro řady. Provedeme nyní jen poněkud zdlouhavý důkaz poslední vlastnosti, návody k dalším uvedeme ve cvičení.

Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Podle předposlední vlastnosti věty 1.5 (úloha 11 cvičení 8.1.3) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Označme s její součet. Nejprve pomocí konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ dokážeme, že konverguje i řada, která vznikne jakýmkoli jejím „přeskládáním“, tj. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|,$$

kde $\sigma : \mathbf{N} \ni n \longrightarrow \sigma(n) \in \mathbf{N}$ je prosté zobrazení $\mathbf{N}$ na $\mathbf{N}$. Použijeme Cauchyova–Bolzanova kritéria. Uvažme libovolné prosté zobrazení σ množiny $\mathbf{N}$ na sebe. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z absolutní konvergence řady plyne, že existuje index K tak, že pro všechna $n > K$ a všechna $k \in \mathbf{N}$ platí

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{a tedy i} \quad |a_{K+2}| + |a_{K+3}| + \cdots + |a_{K+k+1}| < \varepsilon.$$

Označme N tak, aby $\{1, 2, \ldots, K+1\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$. Zvolme index $n > N$ a libovolné m. Tím si zajistíme, že indexy $\sigma(N+1)$, $\sigma(N+2)$, ... jsou zcela jistě větší než $K + 1$. (Nezdá se to pochopitelné? Přemýšlejme. Představme si množinu $M = \{1, 2, \ldots, K+1\}$ a vezměme hodnotu $\sigma(1)$. Pokud $\sigma(1) \in M$, vyčerpali jsme jeden prvek z M a můžeme si jej na pomyslném seznamu „odškrtnout“. Není-li $\sigma(1)$ prvkem M, „neodškrtneme“ nic. Ať tak či onak, postoupíme na $\sigma(2)$ a uvažujeme obdobně. Tak postupujeme dále. Nakonec musí dojít k tomu, že všechny prvky množiny M jsou „odškrtány“. Nastane to pro jisté $\sigma(N)$. Je zřejmé, že žádná z hodnot $\sigma(n)$, $n > N$, nemůže již patřit do M, takže je $\sigma(n) > K+1$ pro všecha $n > N$.) Pro aplikaci Cauchyova–Bolzanova kritéria na přeskládanou řadu budeme počítat výraz

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+m}| = b_{n+1} + \cdots + b_{n+m} = |a_{\sigma(n+1)}| + |a_{\sigma(n+2)}| + \cdots + |a_{\sigma(n+m)}|$$

a ukážeme, že od indexu N výše se jej podaří „stlačit“ pod hodnotu ε. Označme $Q = \max\{\sigma(n+1), \sigma(n+2), \ldots, \sigma(n+m)\}$. Tento výběr, spolu s předchozí volbou N, zajišťuje, že množina členů

$$\{b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_{n+m}\} = \{|a_{\sigma(n+1)}|, |a_{\sigma(n+2)}|, \ldots, |a_{\sigma(n+m)}|\}$$

je podmnožinou množiny $\{\,|a_{K+2}|, |a_{K+3}|, \ldots, |a_Q|\,\}$. Položme $k = Q - K - 1$. Platí

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+m}| = |a_{\sigma(n+1)}| + |a_{\sigma(n+2)}| + \cdots + |a_{\sigma(n+m)}| \le$$

$$\le |a_{K+2}| + |a_{K+3}| + \cdots + |a_{K+k+1}| < \varepsilon.$$

„Přeskládaná“ řada tedy konverguje jak absolutně, tak obyčejně.

Dokážeme ještě, že přeskládáním absolutně konvergentní řady se nezmění její součet. Uvažujme tedy o původní i o přeskládané řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_a, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s_c.$$

Obě konvergují (dokonce absolutně). Podle prvního pravidla ve větě 1.5 pro ně proto platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - a_{\sigma(n)}\right) = s_a - s_c.$$

Pro $\varepsilon > 0$ a index N definovaný v předchozí části důkazu zvolme $n > N$. Pro rozdíl n-tého částečného součtu $(s_a)_n$ řady původní a n-tého částečného součtu $(s_c)_n$ řady přeskládané platí vztah

$$|(s_a)_n - (s_c)_n| = \left|(a_1 + \cdots + a_K + a_{K+1} + \cdots + a_n) - (a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)})\right| =$$

$$\left|a_1 + \cdots + a_K + a_{K+1} + \cdots + a_n - a_{\sigma(1)} - a_{\sigma(2)} - \cdots - a_{\sigma(n)}\right|.$$

Z volby indexu N je zřejmé, že členy a_1, a_2, $\ldots$, a_{K+1} se vyruší s těmi členy z množiny $\{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(N)}\}$, jimž se rovnají. Další sčítance uvnitř předchozí absolutní hodnoty již mají indexy vyšší než $K+1$ a navzájem různé (členy se stejnými indexy se vyrušily). Označme největší index jako P a přidejme dovnitř absolutní hodnoty další členy posloupnosti $\{|a_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$ tak, aby tam byly všechny členy s indexy $K+2$, $K+3$, …, P. Označme $k = P - K - 1$. Pak dostaneme

$$|(s_a)_n - (s_c)_n| \leq |a_{K+2}| + |a_{K+3}| + \cdots + |a_P| = |a_{K+2}| + |a_{K+3}| + \cdots + |a_{K+1+k}| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}[(s_a)_n - (s_c)_n] = 0.$$

Přeskládáním absolutně konvergentní řady se tedy nemění její součet. Samozřejmě platí i $\lim_{n\to\infty}[(S_a)_n - (S_b)_n] = 0$, kde $(S_a)_n$ a $(S_b)_n$ jsou částečné součty řad $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}|a_{\sigma(n)}|$.

Všimněme si teď některých situací, kdy řada z absolutních hodnot členů zadané řady, tj. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, nekonverguje.

Příklad 1.11: Co dělá řada z absolutních hodnot, když nekonverguje?

Posloupnost částečných součtů každé řady tvořené absolutními hodnotami členů

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}|a_n|$$

je nezáporná a neklesající (s každým dalším členem se přičítá nezáporné číslo). Není-li řada z absolutních hodnot konvergentní, není navíc tato posloupnost shora ohraničená. Kdyby totiž byla, pak by podle posledního pravidla věty 1.2 měla vlastní limitu a řada by konvergovala. Teoreticky tedy zbývají možnosti, že taková řada diverguje, nebo osciluje. Uměli byste zdůvodnit, proč vždy nastane první z nich? Odpověď získáte, vyřešíte-li úlohu 8 ve cvičení 8.1.3.

Příklad 1.12: Konvergence jedné alternující řady

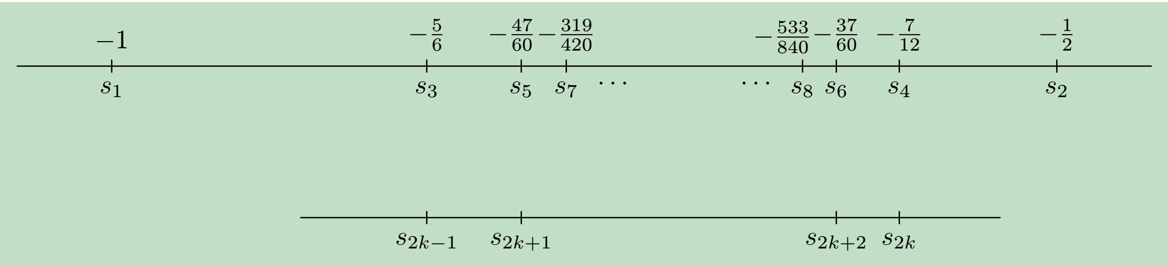
Uvažujme o řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

jejíž členy střídají znaménka — členy s lichým n mají záporné znaménko, členy se sudým n znaménko kladné (ale také tomu může být naopak, například u řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$). V terminologii teorie nekonečných řad jde o takzvanou *alternující řadu*. Je okamžitě zřejmé, že tato řada nekonverguje absolutně, neboť řada utvořená z absolutních hodnot jejích členů je harmonickou řadou z příkladu 1.9. Podívejme se však, jak je to s její konvergencí obyčejnou. Posloupnost částečných součtů je

$$\begin{aligned}
s_1 &= -1, \\
s_2 &= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \\
s_3 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}, \\
s_4 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{12}, \\
s_5 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = -\frac{47}{60}, \\
s_6 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = -\frac{37}{60}, \\
s_7 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = -\frac{319}{420}, \\
\cdots &\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
s_n &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}, \\
\cdots &\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Obrázek 1.6 ukazuje rozložení několika prvních částečných součtů řady. Ukazuje také nerovnosti mezi obecnými



Obr. 1.6 Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

částečnými součty. Platí $s_{2k-1} < s_{2k+1} < s_{2k+2} < s_{2k}$. Skutečně,

$$\begin{aligned}
s_{2k+1} - s_{2k-1} &= a_{2k+1} + a_{2k} = -\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k(2k+1)} > 0, \\
s_{2k+2} - s_{2k+1} &= a_{2k+2} = \frac{1}{2k+2} > 0, \\
s_{2k} - s_{2k+2} &= -a_{2k+2} - a_{2k+1} = -\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > 0.
\end{aligned}$$

Zaměřme se teď třeba na vlastnosti posloupnosti $\{s_{2k}\}_{k\in\mathbf{N}}$. Z posledního z předchozích tří vztahů je vidět, že je tato posloupnost klesající — každý její další člen je menší než předchozí. Obrázek 1.6 také napovídá, že je zdola ohraničená, konkrétně třeba hodnotou $s_1 = -1$. Prověříme to tak, že zapíšeme s_{2k} ve tvaru

$$s_{2k} = -1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{1}{2k}.$$

Hned vidíme, že $s_{2k} > -1$, neboť všechny závorky i číslo $\frac{1}{2k}$ jsou kladné. Podle poslední vlastnosti věty 1.2 má posloupnost $\{s_{2k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ vlastní limitu rovnou jejímu infimu. Označme ji S. Posloupnost $\{s_{2k-1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ je naopak shora ohraničená (například hodnotou $s_2 = -\frac{1}{2}$) a rostoucí. Má proto vlastní limitu, rovnou jejímu supremu, kterou označíme s. Platí $s \le S$. (Zdůvodněte tuto nerovnost pomocí vlastností suprema a infima číselných množin, jimiž jsme se podrobně zabývali v dodatku F prvního dílu.) Posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ má tedy nejvýše dva hromadné body, s a S. Dokážeme, že $s = S$. Předpokládejme, že $s < S$. Za tohoto předpokladu by v intervalu $(s,\, S)$ neležely žádné členy posloupnosti $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. To je však v rozporu se skutečností, že

$$\lim_{k\to\infty} \{s_{2k+1} - s_{2k}\} = \lim_{k\to\infty} \{s_{2k} - s_{2k-1}\} = 0.$$

Číslo $s = S$ je limitou posloupnosti $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a součtem alternující řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$. Pro tuto chvíli nevadí, že nevíme, čemu konkrétně je tento součet roven. Víme pouze, že leží v intervalu $(s_1,\, s_2) = (-1,\, -\frac{1}{2})$. Přesně jej určíme později.

Příklad 1.13: Konvergence obecné alternující řady

Obecná alternující řada má tvar $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Členy řady s lichým indexem jsou tedy v tomto případě kladné, se sudým indexem záporné. Víme, že nutnou podmínkou konvergence této řady je $\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{n-1}a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$. Ukážeme, že v případě alternující řady a za předpokladu, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je nerostoucí, je to zároveň podmínka postačující: Pro členy posloupnosti částečných součtů s lichým, resp. sudým indexem platí

$$\begin{aligned} s_{2k-1} &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}), \\ s_{2k} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}). \end{aligned}$$

Všechny závorky jsou nezáporné. Posloupnost $\{s_{2k-1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ je tedy nerostoucí. Je také zdola ohraničená. Abychom to hned uviděli, uzávorkujeme členy ve výrazu pro s_{2k-1} jinak,

$$s_{2k-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-3} - a_{2k-2}) + a_{2k-1}.$$

Všechny závorky i číslo a_{2k-1} jsou nezáporné, a proto $s_{2k-1} \ge a_1 - a_2 = s_2$ pro všechna $k \in \mathbf{N}$. Číslo s_2 je dolní závorou posloupnosti $\{s_{2k-1}\}_{k\in\mathbf{N}}$. Posloupnost $\{s_{2k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ je naopak neklesající a shora ohraničená. Horní závorou je například $s_1 = a_1$ (ověřte to vhodným zápisem součtu s_{2k}). Označme

$$S = \inf\{s_{2k-1}\}_{k\in\mathbf{N}}, \quad s = \sup\{s_{2k}\}_{k\in\mathbf{N}}.$$

Stejná úvaha jako v příkladu 1.12 vede k závěru, že platí $s = S$. Toto číslo je limitou posloupnosti částečných součtů řady a je tedy jejím součtem.

V příkladu 1.13 jsme dokázali toto tvrzení:

Alternující řada, jejíž členy v absolutní hodnotě tvoří nerostoucí posloupnost, konverguje právě tehdy, je-li limita posloupnosti z nich utvořené nulová. Tato věta se nazývá *Leibnizovo kritérium.*

K této řadě se ještě vrátíme v příkladu 1.18.

Příklad 1.14: Když řada nekonverguje absolutně, je možné absolutně všechno

Vraťme se k jednoduchému případu alternující řady v příkladu 1.12. Viděli jsme, že tato řada nekonverguje absolutně, obyčejně však ano. Její součet ležel někde v intervalu $(-1, -\frac{1}{2})$. Co se stane, budeme-li řadu přeskládávat? Bude i přeskládaná řada konvergovat? A když ano, k jakému součtu? Položme si ještě obecnější otázku: Mohli bychom pomocí přeskládání nechat řadu dokonvergovat k součtu, který si předem určíme? Mohli bychom ji přeskládat tak, aby nová řada divergovala k $+\infty$, nebo k $-\infty$, nebo aby oscilovala? Uvědomíme-li si, že přeskládáním vlastně vznikne úplně jiná řada, mohlo by to být možné. Zvolme si jako „budoucí součet" přeskládané řady třeba nulu, tj. $s = 0$. Pro rychlejší pochopení následující procedury vypišme několik prvních členů výchozí řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\frac{1}{16}-$$

$$-\frac{1}{17}+\frac{1}{18}-\frac{1}{19}+\frac{1}{20}-\frac{1}{21}+\frac{1}{22}-\frac{1}{23}+\frac{1}{24}-\frac{1}{25}+\frac{1}{26}-\frac{1}{27}+\frac{1}{28}-\frac{1}{29}+\frac{1}{30}-\frac{1}{31}+\frac{1}{32}-\cdots,$$

jejichž barevné rozlišení pochopíme za chvíli.

Vezměme v úvahu postupně tolik kladných členů řady, aby jejich součet právě překročil hodnotu $s = 0$. K tomu stačí první kladný člen $\frac{1}{2}$. Označme jej jako první člen nové řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tj.

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad \bar{s}_1 = \frac{1}{2} = 0{,}500\,0.$$

Nyní vezměme popořádku tolik záporných členů řady, aby jejich přičtení k b_1 právě překročilo nulu do záporných hodnot. Splní to hned první záporný člen, který označíme jako další člen nové řady,

$$b_2 = -1, \quad \bar{s}_2 = b_1 + b_2 = -\frac{1}{2} = -0{,}500\,0.$$

Dále vezměme další kladné členy tak, aby jejich součet opět právě převážil na druhou stranu nuly, tj.

$$b_3 = \frac{1}{4}, \quad b_4 = \frac{1}{6}, \quad b_5 = \frac{1}{8}, \quad \bar{s}_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = \frac{1}{24} \doteq 0{,}041\,7.$$

Pokračování této procedury vypadá takto:

$$\begin{aligned}
&b_6 = -\frac{1}{3}, \quad \bar{s}_6 = b_1 + b_2 + \cdots + b_6 = -\frac{7}{24} \doteq -0{,}291\,7,\\
&b_7 = \frac{1}{10}, \quad b_8 = \frac{1}{12}, \quad b_9 = \frac{1}{14}, \quad b_{10} = \frac{1}{16}, \quad \bar{s}_{10} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} = \frac{43}{1\,680} \doteq 0{,}025\,6,\\
&b_{11} = -\frac{1}{5}, \quad \bar{s}_{11} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{11} = -\frac{293}{1\,680} \doteq -0{,}1\,744,\\
&b_{12} = \frac{1}{18}, \quad b_{13} = \frac{1}{20}, \quad b_{14} = \frac{1}{22}, \quad b_{15} = \frac{1}{24}, \quad \bar{s}_{15} = b_1 + \cdots + b_{15} = \frac{1\,013}{55\,440} \doteq 0{,}018\,3,
\end{aligned}$$

$$b_{16} = -\frac{1}{7}, \quad \overline{s}_{16} = b_1 + \cdots + b_{16} = -\frac{6\,907}{55\,440} \doteq -0{,}124\,6,$$
$$b_{17} = \frac{1}{26}, \quad b_{18} = \frac{1}{28}, \quad b_{19} = \frac{1}{30}, \quad b_{20} = \frac{1}{32}, \quad \overline{s}_{20} = b_1 + \cdots + b_{20} = \frac{20\,431}{1\,441\,440} \doteq 0{,}014\,2.$$

$\overline{s}_1$	$\overline{s}_2$	$\overline{s}_5$	$\overline{s}_6$	$\overline{s}_{10}$	$\overline{s}_{11}$	$\overline{s}_{15}$	$\overline{s}_{16}$	$\overline{s}_{20}$	$\cdots$
0,500 0	−0,500 0	0,041 7	−0,291 7	0,025 6	−0,174 4	0,018 3	−0,124 6	0,014 2	$\cdots$

Předchozí tabulka je jen názornou ukázkou toho, jak procedura „funguje“ — záporné, resp. kladné členy posloupnosti nových částečných součtů $\{\overline{s}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se přibližují k nule zleva, resp. zprava. Není však *důkazem* obecného tvrzení, že neabsolutně konvergentní řadu můžeme nechat dokonvergovat, k čemu chceme. Proto se s ní žádný pořádný matematik nemůže spokojit. Důkaz, že posloupnost částečných součtů získaná na základě popsané procedury opravdu konverguje k předem zadanému číslu, v našem případě k nule, může zájemce najít v každé učebnici klasické analýzy. Použije se v něm matematické indukce, skutečnosti, že vybrané posloupnosti nezáporných a nekladných členů alternující řady divergují k $+\infty$, resp. $-\infty$ (úloha 9 cvičení 8.1.3), a nutné podmínky pro konvergenci řady, kterou jsme dokázali jako důsledek věty 1.4, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$.

Obecnou větu o přerovnávání neabsolutně konvergentních řad, kterou jsme ilustrovali předchozím příkladem, uvádíme bez důkazu.

Věta 1.6 (Riemannova): *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, avšak nekonverguje absolutně, pak existuje takové její přerovnání, že přerovnaná řada konverguje k předem zadanému součtu s (resp. diverguje k $+\infty$, resp. diverguje k $-\infty$, resp. osciluje).*

Neabsolutně konvergentní řady mají nesporně velmi zajímavé vlastnosti. Ve fyzice, technice nebo i jiných praktických oborech však nejsou příliš využitelné, neboť pro počítání s nimi obecně neplatí běžné zákony pro počítání s čísly. Zato řady, které konvergují absolutně, jsou pro aplikace velmi důležité a často potřebujeme znát i jejich součet. Obecně je nalezení součtu dost složitým problémem. I když sama definice součtu řady je jednoduchá (stačí přece vyjádřit n-tý člen posloupnosti částečných součtů a spočítat limitu $\lim_{n\to\infty}\{s_n\}$), prakticky to takto ve většině případů nefunguje, protože se nám n-tý člen posloupnosti částečných součtů prostě nepovede vyjádřit jako funkci indexu n. Zato jsou k dispozici věty představující praktická kritéria konvergence *řad s nezápornými členy*, jimiž řady tvořené absolutními hodnotami svých členů jsou. Tato kritéria nám umožní alespoň zjistit, *zda vůbec* řada konverguje. I to může být užitečné. Teorie konvergence řad s nezápornými členy je v učebnicích klasické analýzy velmi podrobně propracována. Proto se v tomto textu omezíme na to nejdůležitější. V dalším předpokládejme, že pro všechny členy řad typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, o nichž budeme uvažovat, platí $a_n \geq 0$. Zápisem $\lim_{n\to\infty}\{c_n\}$ se v následující větě rozumí vlastní, nebo nevlastní limita posloupnosti $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, není-li řečeno jinak.

Věta 1.7 (Konvergence řad s nezápornými členy):

Nechť (předpoklady)		***Pak (tvrzení)***
srovnávací kritérium		
$a_n \leq b_n$ *s výjimkou nejvýše konečně mnoha* n		
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje*	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje*
existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \dfrac{a_n}{b_n} \right\}$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje*	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*
existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \dfrac{a_n}{b_n} \right\} > 0$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje*	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*
odmocninové kritérium — Cauchyovo		
$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ *s výjimkou konečně mnoha* n	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*
$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pro nekonečně mnoho* n	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*
existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{a_n}\} < 1$	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*
existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{a_n}\} > 1$	$\Longrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*

podílové kritérium — d'Alembertovo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1 \text{ s výjimkou konečně mnoha } n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \text{ s výjimkou konečně mnoha } n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

$$\text{existuje } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$\text{existuje } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

Raabeovo kritérium

$$\text{existuje } \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$\text{existuje } \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

integrální kritérium

$$f(x) \text{ je nezáporná a nerostoucí na } [1, \infty) \implies \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konverguje} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje}$$

Dirichletovo kritérium

$$\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ je monotónní, } \lim_{n\to\infty} \{b_n\} = 0 \text{ a posloupnost částečných součtů řady } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je ohraničená} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konverguje}$$

Abelovo kritérium

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje a posloupnost } \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ je monotónní a ohraničená} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konverguje}$$

Pozn. 1: Za limitu v předpokladech věty považujeme i limitu nevlastní, přičemž $+\infty > a$, resp. $-\infty < a$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$.

Pozn. 2: Všechna tvrzení uvedená v předchozí větě mají charakter postačujících podmínek, s výjimkou integrálního kritéria, které říká, že za daných předpokladů o funkci $f(x)$ je konvergence integrálu $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ nutnou a postačující podmínkou pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Dokážeme srovnávací kritérium. Kritéria podílové a odmocninové v limitním i nelimitním tvaru se dokazují právě pomocí srovnávacího. Vrátíme se k některým z nich ve cvičeních.

Tak tedy — předpokládejme, že platí $a_n \le b_n$, s výjimkou konečného počtu členů. Zcela určitě to tedy platí od určitého indexu N_1 výše pro všechna n. Jestliže řada $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konverguje, pak podle Cauchyova–Bolzanova kritéria (věta 1.4) pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje index N_2 tak, že pro všechna $n > N_2$ a všechna m platí $b_{n+1} + \cdots + b_{n+m} < \varepsilon$. Označíme-li jako N například kterýkoli index větší než N_1 i než N_2, pak pro všechna $n > N$ a všechna m platí

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+m} \le b_{n+1} + \cdots + b_{n+m} < \varepsilon.$$

Řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ tedy konverguje, opět podle Cauchyova–Bolzanova kritéria. Naopak, jestliže řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverguje, musí řada $\sum_{n=1}^\infty b_n$ také divergovat. Kdyby totiž konvergovala, musela by podle předchozí části důkazu konvergovat i řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$. (Uvědomte si, že řada s nezápornými členy nemůže oscilovat. Proč?)

Pozn. 1: U jednotlivých kritérií, jejichž názvy jsme tentokrát vyznačili přímo do textu věty, si všimněme, že některá z nich mají své nelimitní i limitní verze. V případě Raabeova kritéria existuje i nelimitní verze, jejíž praktické použití není tak časté. Proto ji ve větě 1.7 neuvádíme.

Pozn. 2: Ve většině dnešních učebnic se uvádí limitní Raabeovo kritérium tak, že se posuzuje limita

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Pokud tato limita existuje a je větší než 1, řada konverguje, je-li menší než 1, řada diverguje. Je-li uvedená limita rovna jedné, nelze o chování řady na základě limitního Raabeova kritéria rozhodnout. Zajímavé je, že sám Joseph Raabe odvodil kritérium ve tvaru, v jakém je uvádíme ve větě 1.7. V tomto tvaru je také uvádějí „starší“ klasické učebnice matematické analýzy. Podívejme se na vztah mezi oběma výrazy,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Aniž bychom jejich souvislost s konvergencí, či divergencí řady zkoumali nějak hlouběji, hned vidíme, že nelze-li o chování řady rozhodnout podle limitního podílového kritéria, tj. je-li $\lim_{n\to\infty}\{a_{n+1}/a_n\} = 1$, je limita obou výrazů, pokud existuje, stejná. Lze dokázat, že limitní Raabeovo kritérium je správné v obou tvarech, jako podmínka *postačující* pro konvergenci či divergenci řady. Za zmínku stojí pro svou zajímavost i fakt, že kritérium je v původní práci

Josepha Raabeho jakýmsi „vedlejším produktem“, který vznikl z potřeby vypočítat jisté integrály a z nápadu použít pro takový výpočet nekonečných řad. Prostě — staří matematikové byli veskrze praktičtí.

Pozn. 3: K Dirichletovu a Abelovu kritériu dodejme podstatný dovětek: Tato kritéria jsou dokonce platná obecně, bez omezení na řady s nezápornými členy.

Příklad 1.15: S různými kritérii na jednu řadu

Uvažujme o řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Konverguje? Pokud bychom měli k dispozici vhodnou konvergentní řadu pro srovnání, mohli bychom použít srovnávacího kritéria. Takovou řadou je například

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{neboť} \quad \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} \quad \text{pro všechna } n.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní (ukážeme to později), takže i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. Kdybychom chtěli použít limitního srovnávacího kritéria, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1.$$

I toto kritérium potvrzuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Zkusme další kritéria, tj. ta, která využívají jen zadanou řadu samotnou a s ničím ji neporovnávají. Platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

Vypočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \left[\exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n(n+1)}{n}\right)\right]^{-1} =$$
$$= \left[\exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}\right)\right]^{-1} = 1.$$

Použili jsme l'Hospitalova pravidla (věta 2.5 v prvním dílu). Vidíme, že limitním odmocninovým kritériem o konvergenci, nebo divergenci řady nedokážeme rozhodnout. Toto kritérium totiž neobsahuje žádnou informaci o tom, co se stane, když limita n-té odmocniny z n-tého členu řady pro $n \to \infty$ je rovna jedné.

Také podle limitního podílového kritéria nic nerozhodneme, neboť

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Pro úplnost ještě zkusíme Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2}{n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{n+2-n}{n} = 2.$$

Raabeovo kritérium ve shodě se srovnávácím říká, že řada konverguje. Protože už máme prověřeno, že řada konverguje, a na druhé straně vidíme, že hodnoty jejích členů jsou tvaru

$$a_n = f(n), \quad \text{kde} \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)},$$

kde funkce $f(x)$ je nezáporná a nerostoucí (dokonce kladná a klesající) na intervalu $[1, \infty)$, můžeme dopředu říci, že integrál z této funkce na uvedeném intervalu konverguje. Zkusme jej spočítat:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{K\to\infty} \int_1^K \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty} \left(\ln \frac{K}{K+1}\right) - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

Příklad 1.16: Jak jsou důležité předpoklady kritérií konvergence?

Možná vás zarazilo, že v předchozím příkladu jsme na zadanou řadu vyzkoušeli odmocninové a podílové kritérium pouze v jejich limitní podobě. Proč jsme nepoužili „nelimitní verzi“? Protože s nelimitními verzemi se o něco nepohodlněji pracuje. Přinášejí však důležité „zajímavosti“. Všimněme si toho třeba v odmocninovém kritériu. Uvažujme o harmonické řadě, kterou známe z příkladu 1.9. Platí

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$$

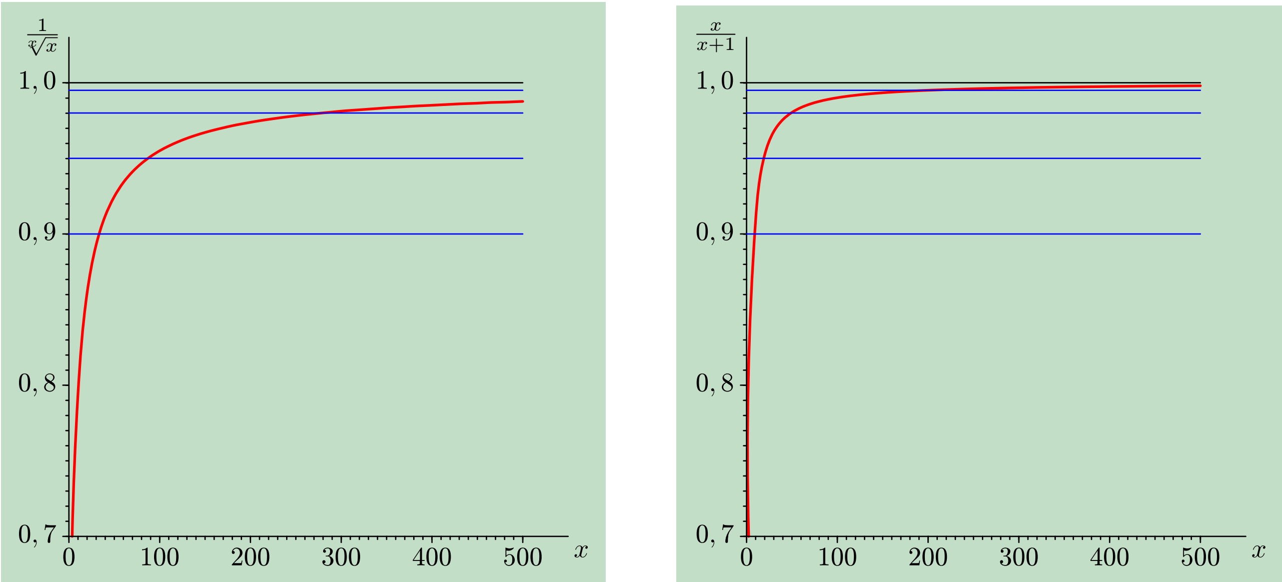
pro všechny indexy n s výjimkou $n = 1$, kdy je hodnota výrazu rovna jedné. Mohli bychom si říci, že předpoklady odmocninového kritéria jsou splněny. Nerovnost $\sqrt[n]{a_n} < 1$ je „pokažena“ jediným členem, jinak platí pro všechny členy řady. Tak proč by řada nemohla konvergovat? Taková úvaha je ale nesprávná. Jak víme z příkladu 1.9, harmonická řada diverguje k $+\infty$. Kde jsme tedy udělali v úvaze chybu? Přepišme předpoklad odmocninového kritéria přesně z věty 1.7, a ne tak nepořádně, jako jsme to udělali před chvílí. Přesné znění předpokladu je

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \le q < 1.$$

Vložení „$\le q <$“ do nerovnosti je vskutku důležité, neboť znamená požadavek, aby n-tá odmocnina z n-tého členu byla pro každé n, s možnou výjimkou konečně mnoha, nejen ostře menší než jednička, ale aby mezi jedničkou a všemi takovými odmocninami ještě zbyla mezera, sice sebemenší, ale *nezávislá na* n. V případě harmonické řady je sice číslo

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

pro každé $n > 1$ opravdu menší než jedna, ale kdybychom zvolili pevné $0 < q < 1$ jakkoli blízko jedničce, vždy se do intervalu $(q, 1)$ „vmáčknou“ nějaká čísla typu $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. A dokonce jich bude nekonečně mnoho. A dokonce to nastane pro všechny indexy od určité hodnoty N výše. Tento index bychom v principu mohli určit tak, že bychom pro pevně zvolené q řešili nerovnost $q < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1$. Protože to nedokážeme, pomůžeme si názornou grafickou představou. Na obrázku 1.7 vlevo je graf funkce $\frac{1}{\sqrt[x]{x}}$. Všímejme si ho pro velká x. Je vidět, že se k přímce $y = 1$ blíží asymptoticky, zatímco přímky $y = q$, kde q nabývá hodnot 0,9, 0,95, 0,98, 0,995, postupně protíná pro větší a větší x (což také znamená větší a větší n). Přiblíží-li se q hodnotě 1, stačí jen vhodně zvětšit



Obr. 1.7 K důležitosti předpokladů kritérií konvergence.

n a hodnoty $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ se zase dostanou do intervalu $(q,\,1)$. Podobná je pro tuto řadu i situace s podílovým kritériem, kde řešením nerovnosti

$$q < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies q < \frac{n}{n+1} < 1 \implies N = \left[\frac{q}{1-q}\right] + 1$$

přímo získáme index N. Hranaté závorky ve vztahu pro N opět značí celočíselnou část výrazu uvnitř. Pro q postupně 0,9, 0,95, 0,98 a 0,995 dostaneme pro N postupně 10, 20, 50 a 200. (Protože pro zvolené hodnoty q je výraz $\frac{q}{1-q}$ celočíselný, stačí dokonce $N = 9$, 19, 49 a 199.) Je vidět, jak jsou předpoklady vět důležité, a i když jsou zdánlivě nesplněny „jen trošku", už to může vadit.

Na druhé straně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

o níž jsme slíbili později dokázat, že naopak konverguje, rovněž kazí předpoklady odmocninového i podílového kritéria. Při ověření možnosti použití podílového kritéria řešíme pro zvolené $0 < q < 1$ nerovnost

$$q < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies q < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1 \implies N = \left[\frac{\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right] + 1,$$

pro q postupně 0,9, 0,95, 0,98 a 0,995 je N postupně 19, 39, 99 a 399. Znamená to, že pro každé $q \in (0,\,1)$ lze zvolit N tak, aby v intervalu $(q,\,1)$ ležely dokonce všechny hodnoty $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ s indexem n vyšším než N. Konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tedy nevyplývá z odmocninového ani z podílového kritéria.

A nakonec se ještě zkusíme zamyslet nad následujícími problémy.

- Opravdu je možné, aby nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ porušil konečný, jakkoli velký, počet členů řady a řada bude stále konvergovat?
- Tutéž otázku si položme pro případ podílového kritéria.

- Proč je postačující podmínka $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v odmocninovém kritériu formulována pro „nekonečně mnoho členů řady“ a připouští tak možnost, že opačná nerovnost $a_n < 1$ může platit nejen pro konečně mnoho, ale dokonce také pro nekonečně mnoho členů řady, a řada bude stále divergovat?
- Proč je postačující podmínka $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ požadována striktně pro všechna n s možnou výjimkou pouze konečně mnoha hodnot n a ne jen pro nekonečně mnoho hodnot n, jako v odmocninovém kritériu? Není to jen nějaké „slovíčkaření“?

Postupně na tyto otázky odpovíme. Budeme používat hlavně srovnávacího kritéria v jeho nelimitní verzi a také některých vlastností z vět 1.2 a 1.5.

První otázku zodpovíme tím, že kritérium jednoduše dokážeme. Jestliže je nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ porušena pouze konečným počtem „neposlušných“ členů řady, pak zcela jistě existuje nějaký index N, od kterého výše již nerovnost platí, tj. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ pro *všechna* $n > N$. Všechny výrazy, které v nerovnosti porovnáváme, jsou nezáporné, můžeme je proto „beztrestně“ umocnit na n-tou a nerovnost zůstane zachována, $a_n \leq q^n < 1$ pro $n > N$. Vidíme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje při porovnání s konvergentní geometrickou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ $(q < 1)$ požadavek srovnávacího kritéria. Proto je také sama konvergentní.

Pozn.: Kdyby někdo na geometrickou řadu už pozapomněl, může se vrátit k odstavci 2.1.6, kde se o ní dost psalo. Pro pohodlí však zopakujme, že geometrická řada s prvním členem a_1 a kvocientem q, její částečné součty a její součet pro $|q| < 1$ jsou

$$a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad s = \lim_{n\to\infty} \{s_n\} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Pro $|q| < 1$ řada konverguje dokonce absolutně, neboť řada z absolutních hodnot jejích členů je rovněž geometrická. Má první člen $|a_1|$ a kvocient $|q|$.

Obdobně postupujeme při nalezení odpovědi na druhou otázku. Je-li nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ porušena konečným počtem členů, pak od jistého N výše již platí bez výjimky. Platí proto

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq q < 1, \quad \frac{a_{N+3}}{a_{N+1}} = \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq q^2 < 1, \quad \ldots, \quad \frac{a_{N+1+k}}{a_{N+1}} \leq q^k < 1$$

pro libovolné k, tj.

$$a_{N+1+k} \leq a_{N+1} q^k \quad \text{pro všechna} \quad k \in \mathbf{N},$$

neboli

$$a_n \leq Q q^n, \quad \text{kde} \quad Q = \frac{a_{N+1}}{q^{N+1}}, \quad \text{pro všechna} \quad n > N.$$

Protože Q je pevná hodnota, porovnáváme vlastně řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s konstantním násobkem konvergentní geometrické řady, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = Q \sum_{n=1}^{\infty} q^n$. A ta je konvergentní. Úvahu samozřejmě uzavírá použití srovnávacího kritéria. A nemusíme se omezovat jen na použití věty 1.7. K témuž závěru můžeme dospět i podstatně snadněji třeba takto: Uvažujme o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, kterou získáme z řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vynecháním členů a_1 až a_N, mezi nimž jsou zaručeně všichni „narušitelé“ nerovnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. Nová řada má členy $c_1 = a_{N+1}$, $c_2 = a_{N+2}$, ..., $c_n = a_{N+n}$, ... Pro ně platí nerovnost $\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq q < 1$, tj. $c_{n+1} \leq c_n q < c_n$, již bez výjimky. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je nerostoucí (dokonce je klesající) a zdola ohraničená (například nulou). Podle věty 1.2 (poslední vlastnost) je proto konvergentní. Doplníme-li nyní zpět členy a_1 až a_N, dostaneme původní řadu, o níž již můžeme říci, že je také konvergentní, neboť podle věty 1.5 (druhá vlastnost) přidáním konečného počtu členů konvergenci nepokazíme.

Třetí otázka je snadná. Předpokládejme, že nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ platí sice pro nekonečně mnoho členů, ale nemůžeme říci, že by od jistého N výše platila již pro všechny. Opačná nerovnost $\sqrt[n]{a_n} < 1$ může také platit pro nekonečně mnoho členů — to podmínka nezakazuje. Jako jednoduchý příklad může posloužit řada, jejíž liché členy jsou třeba $a_{2k-1} = 1$ a sudé $a_{2k} = \frac{1}{2}$. Tato řada je sice na první pohled divergentní, pro vyslovení obecného závěru to ale pochopitelně nestačí. Ten musíme dokázat. Pro ty členy řady, pro které je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, je také $a_n \geq 1$. To, že takových členů je nekonečně mnoho, znamená, že pro *každou* hodnotu $N \in \mathbf{N}$ existuje index $n > N$ tak, že $a_n \geq 1$. Dokonce je takových indexů nekonečně mnoho. Zvolíme-li jakékoli $0 < \varepsilon \leq 1$, nikdy nedocílíme toho, aby od jistého indexu N výše platilo $|a_n| < \varepsilon$. To je ovšem v rozporu s nutnou podmínkou konvergence řady, $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$.

Čtvrtá otázka je trochu „zapeklitější". Proč nemůžeme uvažovat podobně jako u otázky předchozí? Co by se mohlo stát, kdybychom připustili opačnou nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ také pro nekonečně mnoho hodnot n, jako u odmocninového kritéria? Klíč je v tom, že u odmocninového kritéria je podmínka kladena na jednotlivé členy řady zvlášť, zatímco u podílového do ní vstupují vždy dva sousední členy. Máme-li se přesvědčit, že k divergenci řady nestačí splnění podmínky $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho členů, zkusíme najít řadu, která takovou podmínku splňuje, a přesto konverguje. Je to docela jednoduché. Pomohou nám konvergentní geometrické řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \cdots,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^{n-1}} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{32768} + \frac{1}{262144} + \cdots.$$

Utvořme nyní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, že její členy s lichými indexy vezmeme z druhé řady a členy se sudými indexy z první řady,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{32} + \frac{1}{262144} + \frac{1}{128} + \frac{1}{16775216} + \frac{1}{512} + \cdots.$$

Zdá se, že s výjimkou prvních dvou členů je každý člen řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se sudým indexem větší než bezprostředně předcházející člen s indexem lichým, tj.

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} > 1, \quad \text{ale} \quad \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} < 1 \quad \text{pro všechna} \quad k \in \mathbf{N}.$$

Správný matematik se ovšem nespokojí s tím, jak se platnost nějakého vztahu „zdá" na základě několika konkrétních případů. Musí jej dokázat. Řešme proto nerovnost

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} > 1, \quad \text{tj.} \quad \frac{b_{2k+2}}{c_{2k+1}} > 1.$$

Platí

$$\frac{b_{2k+2}}{c_{2k+1}} = \frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{\frac{1}{8^{2k}}} = \frac{8^{2k}}{2^{2k+1}} = 2^{4k-1}, \qquad \frac{b_{2k+2}}{c_{2k+1}} > 1 \iff 4k-1 > 0.$$

To platí pro všechna $k \in \mathbf{N}$, a tedy pro všechna $n = 2k+1 = 3, 5, 7, \ldots$ Nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ je splněna pro nekonečně mnoho hodnot n, pro jiných nekonečně mnoho hodnot n je porušena. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ovšem konverguje podle srovnávacího kritéria, protože platí $a_n \leq b_n$ pro všechna n.

Příklad 1.17: Dáme hlavy dohromady, prověříme další řady

V příkladu 1.15 jsme narazili na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, která nám pomohla pomocí srovnávacího kritéria ověřit konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Stejným způsobem můžeme argumentovat, půjde-li o kteroukoli z řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)}, \quad \text{kde} \quad a,\, b \geq 0.$$

Vycházeli jsme z toho, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, aniž jsme to však zatím dokázali. V souvislosti s příkladem 1.15 nás také jistě hned napadne, že tato řada si „říká“ o nasazení integrálního kritéria. Funkce $f(x) = x^{-2}$ je totiž na intervalu $[1, \infty)$ nezáporná a nerostoucí, jak kritérium požaduje. Příslušný integrál vypočteme velmi snadno a zjistíme, že konverguje.

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{K\to\infty} \int_1^{K} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{K\to\infty} \left(-\frac{1}{K}\right) + 1 = 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tedy také konverguje. Jistěže není použití integrálního kritéria jedinou možností, jak prokázat konvergenci této řady. Vyzkoušejte na ni ostatní kritéria.

A co třeba řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n} \implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} \quad ?$$

Konverguje absolutně? A když ne, konverguje (první řada) aspoň obyčejně? Zkusme pro prvotní odhad použít trochu intuice (matematikové to nemají rádi, ale jen tehdy, kdyby nenásledoval pořádný důkaz). Zdá se, že řada z absolutních hodnot konvergovat bude, neboť libovolná exponenciální funkce a^x se základem $a > 1$ roste podstatně rychleji než libovolná mocnina x^k, $k =$ konst. Mohli bychom použít odmocninové kritérium a zbavit se tak n-té mocniny ve jmenovateli, ale vnesli bychom n-tou odmocninu do čitatele. Jednodušší se proto jeví podílové kritérium.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^n (n+1)^3}{2^{n+1} n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1.$$

Kritérium zafungovalo. Řada konverguje absolutně. A konverguje i obyčejně, podle věty 1.5. Pro procvičení přece jen ještě zkuste limitní odmocninové kritérium.

Následující řada je velmi oblíbená. Těžko by se hledala učebnice klasické analýzy, kde by v oddílu o řadách chyběla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Jedná se sice obecně o řadu funkcí, pro zafixovanou hodnotu x ji však můžeme posuzovat jako řadu číselnou. Dokážeme, že konverguje pro libovolné x. Můžeme ji chápat jako řadu součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad a_n = \sin nx, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Řada tvořená členy b_n sice nekonverguje (je to řada harmonická), posloupnost $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je však monotónní a platí $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = 0$. Funkce sinus je periodická a její hodnoty jsou omezeny na interval $[-1, 1]$. Frekvence kmitů jednotlivých členů jsou násobky frekvence základního členu $\sin x$, takže by se sinusovky při sčítání mohly „částečně rušit“. Stálo by proto za to prověřit částečné součty s_n řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ a tím možnost použití Dirichletova kritéria. Platí

$$s_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx.$$

Vzpomeňme si na vztahy (1.19) a (1.20) v prvním dílu, které platí pro komplexní jednotky $E(\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $|E(\varphi)| = 1$:

$$E(x) + E(2x) + \cdots + E(nx) = (\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx) + \mathrm{i}\,(\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx)\,,$$

ale také platí

$$E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)=E(x)+E^2(x)+\cdots+E^n(x)=E(x)\,\frac{1-E^n(x)}{1-E(x)}=$$

$$=E(x)\,\frac{1-E(nx)}{1-E(x)}\implies s_n=\operatorname{Im}\left(E(x)\,\frac{1-E(nx)}{1-E(x)}\right).$$

Použili jsme vztahu pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem $E(x)$ a kvocientem $E(x)$. Kvůli prověření omezenosti částečných součtů provedeme nyní odhad absolutní hodnoty:

$$|s_n|\le\left|E(x)\,\frac{1-E(nx)}{1-E(x)}\right|=\left|E(x)\,\frac{E(\frac{nx}{2})}{E(\frac{x}{2})}\right|\cdot\left|\frac{E(-\frac{nx}{2})-E(\frac{nx}{2})}{E(-\frac{x}{2})-E(\frac{x}{2})}\right|=\left|\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|.$$

Pro další diskusi musíme vyloučit případ $x=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, pro který by ve jmenovateli zlomku byla nula. Vzhledem k tomu, že pro každé $n\in\mathbf{N}$ a každé $x\in\mathbf{R}$ platí $\left|\sin\frac{nx}{2}\right|\le 1$, dostáváme nakonec

$$|s_n|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ je tedy omezená. Zadaná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

konverguje podle Dirichletova kritéria pro všechna $x\in\mathbf{R}\setminus\{2k\pi\}$, $k\in\mathbf{Z}$. Pro vyjmutý případ $\sin 2k\pi$ je však zadaná řada tvořena samými nulami, proto také konverguje. Prověřili jsme konvergenci zadané řady pro všechna $x\in\mathbf{R}$ bez výjimky.

Příklad 1.18: Zbytky řad

V příkladech 2.47, 2.48 a 2.49 v prvním dílu jsme se zabývali mj. možností vyjádřit nějakou funkci řadou. Vzpomínáte si? Šlo o mocninnou řadu zvanou Taylorova. Uvažovali jsme také o tom, že bychom nemuseli sčítat všechny členy řady, ale jen několik prvních, a spokojit se s takovou aproximací, kdy by zbytek řady byl „zanedbatelný“. Řadám funkcí se budeme podrobně věnovat až v následujícím odstavci, ale problém potřeby aproximativního odhadu součtu řady může nastat i u řad číselných. Důležitý je zejména u řad absolutně konvergentních, což je samozřejmé, neboť řady neabsolutně konvergentní si, jak jsme viděli v příkladu 1.14, víceméně „dělají si, co chtějí“. Věnujme problematice odhadů tento a následující příklad.

Předpokládejme, že jde o absolutně konvergentní řadu, takže i řada sama konverguje. Dále si představme, že konvergence řady tvořené absolutními hodnotami členů řady zadané byla zaručena podílovým kritériem, a že dokonce pro každý index n platí

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le q<1. \tag{1.5}$$

Dejme tomu, že součet řady s, tj. (vlastní) limitu posloupnosti částečných součtů, ani neznáme a nedá se nějak jednoduše zjistit. Víme však, že existuje, a proto si přejeme jej vyjádřit aspoň přibližně. Napíšeme tedy s jako součet s_n prvních n členů řady, které hodláme explicitně vypočítávat a sčítat, a součet z_n zbylých nekonečně mnoha členů, které chceme považovat za zanedbatelný zbytek:

$$s=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots)=s_n+z_n.$$

Pro odhad zbytku s použitím nerovnosti $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (poslední tvrzení věty 1.5 a úloha 12 ve cvičení 8.1.3) dostaneme

$$|z_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n+m} \right| \le \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n+m}|.$$

Ze vztahu (1.5) dostáváme postupně

$$|a_{n+m}| \le |a_{n+m-1}|\, q \implies |a_{n+m}| \le |a_{n+m-2}|\, q^2 \le \cdots \le |a_{n+1}|\, q^{m-1} \le |a_n|\, q^m.$$

Pak, vzpomeneme-li si na součet geometrické řady s kvocientem q pro $|q| < 1$, což je právě náš případ, dostaneme pro zbytek jednoduchý odhad

$$|z_n| \le |a_n| \sum_{m=1}^{\infty} q^m = |a_n| \frac{q}{1-q}. \tag{1.6}$$

Hloubavého čtenáře možná napadne otázka: Ve vztahu (1.5) vystupuje číslo q, které je ostře menší než 1 a představuje horní závoru množiny podílů $\{|a_{n+1}/a_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$. Je-li $0 < q_0 < 1$ jedno takové číslo, pak všechna čísla $q \in [q_0,\, 1)$ také splňují vztah (1.5). Které z nich má tedy figurovat ve vztahu pro odhad zbytku (1.6)? Odpověď je jednoduchá — vztah (1.6) platí pro všechna taková q. Nejlepší odhad však dostaneme pro to nejmenší z nich, jímž je supremum množiny $\{|a_{n+1}/a_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$. Zlomek $\frac{q}{1-q}$ je totiž na každém intervalu $[q_0,\, 1)$, $0 < q_0 < 1$, rostoucí funkcí proměnné q, takže nejmenší hodnoty, která právě odpovídá nejlepšímu odhadu, nabývá pro nejmenší možné q.

Zbytek se také snadno odhaduje v situaci, kdy jsou členy řady dány hodnotami nezáporné a nerostoucí funkce $f(x)$ na intervalu $[1,\, \infty)$ v bodech $x = n$. Předpokládejme, že řada takto vytvořená je konvergentní. Pak konvergují všechny integrály

$$\int_n^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Konvergence těchto integrálů pro $n \ge 2$ plyne z konvergence pro $n = 1$, zaručené integrálním kritériem. Pokusíme se opět odhadnout zbytek řady. Využijeme vlastností funkce $f(x)$ na intervalu $[1,\, \infty)$. Protože je $f(x)$ na $[1,\, \infty)$ nerostoucí, platí pro libovolné n a všechna $x \in [n,\, n+1]$

$$a_{n+1} = f(n+1) \le f(x) \le f(n) = a_n.$$

Tyto nerovnosti se zachovají, jestliže je zintegrujeme v mezích od n do $n+1$, tj.

$$a_{n+1} = \int_n^{n+1} a_{n+1}\, \mathrm{d}x \le \int_n^{n+1} f(x)\, \mathrm{d}x \le \int_n^{n+1} a_n\, \mathrm{d}x = a_n.$$

Po naše úvahy je podstatná jen první část nerovnosti, kterou vyjádříme pro $n+1$ až $n+m$, kde $m \in \mathbf{N}$ je libovolné:

$$a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)\, \mathrm{d}x, \quad a_{n+2} \le \int_{n+1}^{n+2} f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \ldots, \quad a_{n+m} \le \int_{n+m-1}^{n+m} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Nakonec všechny nerovnosti sečteme,

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} \le \int_n^{n+m} f(x)\, \mathrm{d}x,$$

a pro $m \to \infty$ získáme praktický vztah pro odhad zbytku řady z_n

$$z_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

Samozřejmě, že zbytek, který sám je nekonečnou řadou, konverguje. Z celé konvergentní řady totiž vznikl vynecháním konečného počtu členů a_1 až a_n.

A jak jsme si slíbili v příkladu 1.13, vraťme se ještě k alternující řadě $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, kde $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n > 0$, je nerostoucí posloupnost splňující nutnou podmínku konvergence řady, tj. $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$. V příkladu 1.13 jsme ukázali, že pro naši alternující řadu je to i podmínka postačující (Leibnizovo kritérium). Nyní odhadneme n-tý zbytek řady. Platí pro něj

$$z_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+k-1} a_{n+k} + \cdots = (-1)^n \left(a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{k-1} a_{n+k} + \cdots\right)$$

$$\implies |z_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{k-1} a_{n+k} + \cdots.$$

(Víte, proč na pravé straně poslední rovnosti nemusí být absolutní hodnota?) Pomocí dvou způsobů závorkování, jak jsme je použili v příkladu 1.13, a hlavně pomocí výsledku, který jsme v tomto příkladu dokázali — že totiž součet alternující řady daných vlastností je pro obojí způsob závorkování stejný, dostaneme

$$|z_n| = a_{n+1} - \left(a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots + (-1)^{k-2} a_{n+k} + \cdots\right) = a_{n+1} - |z_{n+1}| \leq a_{n+1},$$

a současně

$$|z_n| = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \left(a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{k-1} a_{n+k} + \cdots\right) \geq a_{n+1} - a_{n+2}.$$

Pro odhad n-tého zbytku pak dostáváme $a_{n+1} - a_{n+2} \leq |z_n| \leq a_{n+1}$.

Příklad 1.19: K čemu jsou odhady zbytků řad dobré?

Odpověď je — k tomu, abychom odhadli, kolik členů konvergentní řady musíme vyčíslit a sečíst (a zbytek řady zanedbat), chceme-li její součet získat alespoň s požadovanou přesností. Přesnost je vyjádřena buď absolutně (požadujeme, aby zanedbaný zbytek řady z_n byl v absolutní hodnotě menší než předepsaná hodnota $\varepsilon > 0$), nebo relativně (požadujeme, aby poměr absolutních hodnot zanedbaného zbytku z_n a částečného součtu s_n byl menší než předepsaná hodnota p třeba v procentech). Postup ukážeme pro oba typy odhadu zbytku, které jsme si před chvílí odvodili. Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Tato řada s kladnými členy konverguje podle podílového kritéria, neboť

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3n} \leq \frac{2}{3}, \quad \sup\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{2}{3}.$$

Číslo $q_0 = \frac{2}{3}$ je tedy nejvýhodnější pro výpočet odhadu. Označíme-li ε hodnotu, které zbytek již nesmí dosáhnout, dostaneme požadavek

$$a_n \frac{q_0}{1 - q_0} < \varepsilon \implies 2n \cdot 3^{-n} < \varepsilon.$$

Protože posloupnost s členy $b_n = 2n \cdot 3^{-n}$ je klesající, přičemž $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = 0$, určitě se podaří najít takový index N, od kterého výše již bude zbytek řady menší než ε, tj. $z_n \le b_n < \varepsilon$. Zvolme třeba $\varepsilon = 0{,}001$. Následující tabulka hodnot b_n pro $n = 1, 2, \ldots, 12$ ukazuje, že stačí sečíst prvních devět členů řady. Součet zbytku řady od desátého členu do nekonečna bude již zanedbatelný ve smyslu předepsané přesnosti. (Hodnoty uváděné na čtyři platná místa jsou zaokrouhleny nahoru, neboť jde o horní odhady.)

n	1	2	3	4	5	6
$\lvert z_n\rvert \le$	0,666 7	0,444 5	0,222 3	0,098 8	0,041 2	0,016 5

n	7	8	9	10	11	12
$\lvert z_n\rvert \le$	0,006 5	0,002 5	0,001 0	0,000 4	0,000 2	0,000 1

Zkusme na tutéž řadu použít integrální kritérium. Je to možné, neboť její členy jsou dány hodnotami funkce $f(x) = x \cdot 3^{-x}$, která je na intervalu $[1, \infty)$ nezáporná a nerostoucí (dokonce je kladná a klesající — ověřte to výpočtem její derivace). Díky podílovému kritériu o řadě víme, že konverguje, takže konvergenci integrálu z funkce $f(x)$ v mezích 1 a ∞ již ověřovat nemusíme (věta 1.7). Integrací per partes vypočteme odhad pro zbytek z_n:

$$z_n \le \int_n^\infty x \cdot 3^{-x}\,\mathrm{d}x = \left| u'(x) = 3^{-x},\ \ u(x) = -\frac{3^{-x}}{\ln 3},\ \ v(x) = x,\ \ v'(x) = 1 \right| =$$

$$= \left[-\frac{x \cdot 3^{-x}}{\ln 3}\right]_n^\infty + \frac{1}{\ln 3}\int_n^\infty 3^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{3^{-n}}{(\ln 3)^2}\,(n\,\ln 3 + 1)\,.$$

Výsledky výpočtu odhadu pro různá n opět ukazuje tabulka.

n	1	2	3	4	5	6
$\lvert z_n\rvert \le$	0,579 6	0,294 4	0,131 9	0,055 2	0,022 2	0,008 7

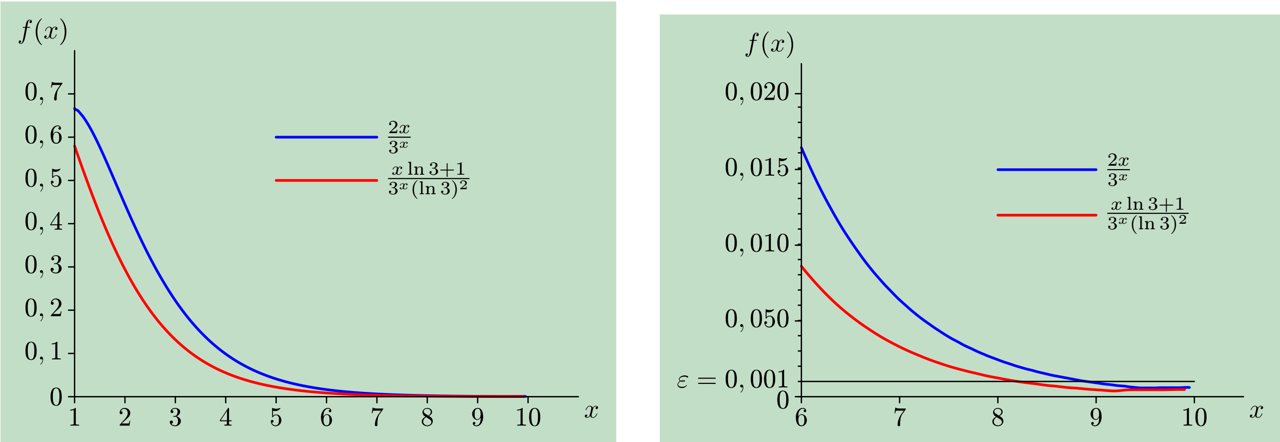
n	7	8	9	10	11	12
$\lvert z_n\rvert \le$	0,003 3	0,001 3	0,000 5	0,000 2	0,000 1	0,000 1

Pro $\varepsilon = 0{,}001$ je třeba započítat do součtu řady i podle tohoto kritéria devět členů (vyjde $s_9 = 0{,}749\,7$). Na obrázku 1.8 jsou znázorněny grafy funkcí

$$z_I(x) = 2x \cdot 3^{-x} \quad \text{a} \quad z_{II}(x) = \frac{3^{-x}}{(\ln 3)^2}\,(x\,\ln 3 + 1)\,,$$

představujících oba odhady. Pro zajímavost uveďme ještě tabulku součtů řady v blízkosti devátého členu, abychom posoudili, do jaké míry jsou odhady zbytků „přísné“.

n	7	8	9	10	11	12
s_n	0,748 1	0,749 3	0,749 7	0,749 9	0,750 0	0,750 0



Obr. 1.8 Odhady zbytků.

Hodnoty jsou opět uváděny s přesností na čtyři platná místa, tentokrát při standardním způsobu zaokrouhlování. Vidíme, že pro dosažení požadované přesnosti by ve skutečnosti stačilo sečíst jen prvních osm členů řady.

Příklad 1.20: „Výhodná“ hypotéka, aneb co pro vás dělá vaše banka?

Sledovali jste někdy reklamy bank? Všechny se mohou přetrhnout, aby konaly dobro pro své klienty. Zeptali jste se někdy, jaké výhody mají produkty, které vám banka nezištně nabízí, pro ni samotnou? Jestliže ano, dostali jste pravděpodobně odpověď, že banka má prospěch z toho, že si udrží dobré klienty. Klientovi, který má vklady, je samozřejmě jasné, že pro banku je mimořádně výhodné disponovat a podnikat s jeho penězi, v případě termínovaného vkladu mu na nich „sedět“ třeba i několik let, atd. Jistě jí stojí za to zaplatit vkladateli nějaký úrok. (Jak se úroky dají spočítat, jsme si ukazovali v příkladu 2.21.) Banky však také půjčují a z půjček mají úrok zase ony. Proč však nabízejí všelijaká úroková zvýhodnění? „Tratí“ na úrocích jen proto, aby získaly více dlužníků? Podívejme se na podmínky běžné hypotéky s možnostmi „zvýhodnění“ pro klienta hypotéky.

Státní zaměstnanec pan Bezgroš si potřebuje koupit byt. Běžný, třípokojový první kategorie, v cihlovém domě z předválečné doby — bratru za čtyři miliony korun. Pan Bezgroš sice slušně vydělává, potřebnou hotovost však nemá. Uvažuje o hypotéce. Uvidí následující reklamu: Banka Nekrad & spol., a.s., umožňuje vypůjčit si potřebnou sumu s úrokem 4,59% ročně, bez dalších požadavků, splátka je měsíční. Vedle toho nabízí zvýhodněnou hypotéku, s úrokem pouze 3,59% ročně, za předpokladu, že klient souhlasí se splácením nejméně dvacet let, s fixací výše úroku nejméně na pět let, bude mít u banky aktivní účet na úrovni jedné příchozí a čtyř odchozích plateb měsíčně (například si na účet nechá posílat plat a zadá čtyři trvalé příkazy) a uzavře pojištění na svou schopnost dluh splácet. Banka má na internetu dokonce „Kalkulátor“, pomocí něhož si klient může spočítat, kolik na tomto typu hypotéky ušetří oproti hypotéce běžné. Pro modelové případy ukáže Kalkulátor následující tabulku.

typ	výše půjčky	roční úrok [%]	měsíční splátka	doba splatnosti	doba fixace	celkem ušetříte
1	4 000 000	3,59	23 384	20 let	5 let	508 080
2	4 000 000	4,39	25 069	20 let	1 rok	0
3	4 000 000	4,59	neuvedena	20 let	bez fixace	0
4	4 000 000	4,59	41 629	10 let	bez fixace	0

Proč jsou podmínkou zvýhodněné hypotéky požadavky aktivního účtu a pojištění platební schopnosti, není třeba vysvětlovat. Fixace zajišťuje bance, že výše úroku, který získává, nebude ohrožena snížením úrokových sazeb Centrální bankou.

Podívejme se však na problém doby splatnosti. Pan Bezgroš je mladý, schopný a pracovitý muž, má dobré a zajištěné místo ve státní správě, takže se neobává o svou schopnost splácet i delší dobu. Nemusí se proto soustředit na to, aby byl co nejdříve bez dluhu. Výše splátky 23 384,- Kč při dvacetileté době splatnosti je koneckonců podstatně únosnější, než 41 629,- Kč při splatnosti desetileté. Navíc, jak hlásí Kalkulátor, ušetří 508 080,- Kč. A takový půlmilion přece není k zahození. K tomu, aby si pan Bezgroš spočítal, kolik opravdu „ušetří“, mu stačí umět násobit. Vynásobí-li měsíční splátku 23 384,- Kč 240-ti měsíci, zjistí, že ve výsledku vrátí bance 5 612 160,- Kč, zatímco při splátce 41 629,- Kč a splatnosti 120 měsíců, kdy „není bankou zvýhodněn a nic neušetří“, vrátí „pouze“ 4 995 480,- Kč.

Panu Bezgrošovi takové „ušetření“ není jasné a obává se, zda splátka není stanovena chybně. Pokusme se výši splátky určit. Předpokládejme, že banka úročí měsíčně, jak je v praxi obvyklé. Označme p měsíční úrok nikoli v procentech, ale jako podíl z celku (úrok vyjádřený v procentech je $100p$). Předpokládejme, že celková výše hypotéky (půjčky) je h. Kdyby pan Bezgroš nic nesplácel, dlužil by bance po prvním měsíci od uzavření smlouvy o hypotéce částku $h(1+p)$, po druhém měsíci $h(1+p)^2$, po n-tém $h(1+p)^n$, atd. Na konci každého měsíce však splatí částku s (měsíční splátku). Shrňme stav jeho dluhu na konci každého měsíce opět do tabulky.

konec měsíce	dlužná částka
prvního	$h(1+p)-s$
druhého	$[h(1+p)-s](1+p)-s$
třetího	$\{[h(1+p)-s](1+p)-s\}(1+p)-s$
n-tého	$h(1+p)^n - s(1+p)^{n-1} - \ldots - s(1+p) - s$

Výše dluhu po n měsících je

$$d(n) = h(1+p)^n - s(1+p)^{n-1} - \ldots - s(1+p) - s = h(1+p)^n - s\sum_{k=1}^{n}(1+p)^{k-1}.$$

Od dluhu $h(1+p)^n$, který by pan Bezgroš měl po n měsících bez splácení, se odčítá n-tý částečný součet geometrické řady s prvním členem s a kvocientem $q = 1 + p$. Platí

$$d(n) = h(1+p)^n - s\frac{q^n - 1}{q - 1} = h(1+p)^n - s\frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1} = \left(h - \frac{s}{p}\right)(1+p)^n + \frac{s}{p}.$$

Z podmínky

$$d(n) = 0 \implies \left(h - \frac{s}{p}\right)(1+p)^n + \frac{s}{p} = 0$$

můžeme buď určit výši splátky, víme-li, jak dlouho chceme splácet, nebo dobu splácení, je-li předem určena splátka. V prvém případě je

$$s = h\frac{p(1+p)^n}{(1+p)^n - 1},$$

ve druhém

$$n = \frac{\ln \frac{s}{s-hp}}{\ln(1+p)}.$$

Následující tabulka ukazuje nyní výsledky našeho „modifikovaného“ kalkulátoru. Počítali jsme v ní výši splátky na základě zadání úrokové sazby, celkové částky a doby splatnosti v měsících. Nezapomeňme, že v našich vztazích figuruje *měsíční* úroková sazba. Roční sazbu musíme proto vydělit dvanácti. Vypočtené částky jsou zaokrouhleny na celé koruny.

typ	výše půjčky	12p	splatnost [měs]	doba fixace	měsíční splátka	celkem zaplatíte
1	4 000 000	0,00359	240	5 let	23 384	5 612 160
2	4 000 000	0,00439	240	1 rok	25 069	6 016 560
3	4 000 000	0,00459	240	bez fixace	25 501	6 120 240
4	4 000 000	0,00459	120	bez fixace	41 629	4 995 480

Vidíme, že náš kalkulátor funguje stejně a úplně přesně jako ten bankovní. Jen místo sloupce „ušetříte“ ukazuje, kolik celkem zaplatíte. Odečtete-li od celkové částky, kterou zaplatíte u typu hypotéky 3, částku pro typ 1, dostanete přesně onu avizovanou „úsporu“ 508 080 korun. Slovo „ušetříte“ v bankovním jazyce znamená, že při dvacetileté době splatnosti na vás banka vydělá o něco méně v korunách, poskytne-li vám nižší úrok. O to více však vydělá tím, že vás „nachytá“ na výhody a přiměje vás tím splácet dlouho. Využívá tak vlastností částečných součtů geometrické řady. (Navíc ještě fixuje úrokovou sazbu, disponuje vaším účtem a nic neriskuje, protože na svou platební schopnost platíte pojistku.) Urychlíte-li platbu, pak i při vyšším úroku zaplatíte bance ve skutečnosti méně než při platbě pomalé. I tak na vás slušně vydělá. V řadě situací jako je například tato skutečně není bankovní matematika tak složitá. Navíc ukazuje, jak je to doopravdy s heslem „vše pro klienta“.

Pozn.: Příklad odpovídá skutečné nabídce jedné z velkých českých bank ze srpna 2010.

1.1.3 Cvičení

1. Vymyslete příklady konvergentních, divergentních a oscilujících posloupností.

2. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je divergentní posloupnost s (nevlastní) limitou $+\infty$. Dokažte, že každá její podposloupnost má rovněž nevlastní limitu $+\infty$.
Návod: Zvolte libovolnou podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, tj. $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$, $n_k \in N$ a $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ je rostoucí posloupnost. Zvolte $K \in \mathbf{R}$ libovolně a použijte skutečnosti, že $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je divergentní posloupnost s limitou $+\infty$ (existence indexu N, od kterého výše leží všechny členy posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ v intervalu (K, ∞)). Co platí pro všechny indexy k, pro které $n_k > N$?

3. Určete všechny hromadné body posloupností:

a) $\{n\}_{n\in\mathbf{N}}$,

b) $\{(-1)^n n\}_{n\in\mathbf{N}}$,

c) $\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$,

d) $\left\{2+(-1)^n\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$.

V kterých případech má posloupnost limitu a jakou?

4. Definujte posloupnost rostoucí, nerostoucí, klesající, neklesající. Uveďte příklady posloupností s těmito vlastnostmi.
Návod: Vlastnosti definujte podobně jako u funkcí — odstavec 2.1.4 prvního dílu.

$*$**5.** Dokažte, že každá zdola ohraničená nerostoucí posloupnost má vlastní limitu $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \inf\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.
Návod: Existence infima ξ množiny členů posloupnosti vyplývá z faktu, že posloupnost je zdola ohraničená (dodatek F prvního dílu). Dokažte, že v případě nerostoucí posloupnosti je toto infimum zároveň její limitou: Zvolte $\varepsilon > 0$. Z toho, že ξ je infimum posloupnosti, plyne, že v intervalu $[\xi, \xi+\varepsilon)$ leží alespoň jeden člen posloupnosti. Označme jeho index jako N. Co platí pro všechny členy posloupnosti s indexem vyšším než N, je-li posloupnost nerostoucí? Leží tedy všechny členy a_n pro $n > N$ také v intervalu $[\xi, \xi+\varepsilon)$? Vyslovte závěr, pokud jde o existenci a hodnotu limity posloupnosti.

6. Pokuste se dokázat některá z pravidel věty 1.2. Využijte definice limity posloupnosti.

$*$**7.** V jedné z úloh příkladu E.1 v dodatku E prvního dílu jsme se zabývali velmi důležitou posloupností

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Její limitou, jak jsme ukázali, je základ přirozených logaritmů, tzv. *Eulerovo číslo* e. K důkazu jsme využili znalostí o exponenciálních a logaritmických funkcích, při jejichž studiu jsme také číslo e zavedli. Často se však číslo e definuje bez vztahu k exponenciálním a logaritmickým funkcím, a to jako limita výše uvedené posloupnosti. Pro tuto definici je však třeba dokázat, že posloupnost je konvergentní. Dokažte postupně jednotlivé kroky, které povedou k výsledku:

- Platí nerovnost (z hlediska našeho důkazu jde o nerovnost pomocnou, která je ale obecně užitečná)

  $$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{pro} \quad x \neq -1,\ n \in N,$$

  je-li navíc $x \neq 0$ a $n > 1$, je nerovnost ostrá.
- Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, je rostoucí a shora ohraničená.
- Posloupnost $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $A_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, je klesající a zdola ohraničená.
- Posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ mají stejnou limitu.

Návod: Pomocnou nerovnost dokažte matematickou indukcí. Pro důkaz, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je rostoucí a posloupnost $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je klesající, vyjádřete a upravujte podíly

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{a} \quad \frac{A_n}{A_{n+1}}.$$

Oba vyjdou větší než 1. Využijte při tom pomocné nerovnosti. Určete alespoň jednu horní závoru posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a alespoň jednu dolní závoru posloupnosti $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ (sestavte třeba nerovnosti pro a_1, a_n, A_1, A_n). V závěru důkazu využijte poslední z vlastností ve větě 1.2, vyjádřete A_n pomocí a_n a s využitím pravidla pro součin limit posloupností vyslovte závěr.

∗**8.** Předpokládejte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje absolutně. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje k $+\infty$. Dokažte.
Návod: Zdůvodněte, proč je posloupnost částečných součtů $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ neklesající. Dále ukažte, že není shora ohraničená — uvědomte si, co by vyplývalo pro limitu posloupnosti $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ z poslední vlastnosti věty 1.2, kdyby byla shora ohraničená. Bod $+\infty$ je hromadným bodem posloupnosti $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ (zdůvodněte). Další hromadné body posloupnost nemá (zdůvodněte). (Je $+\infty$ také hromadným bodem každé podposloupnosti posloupnosti $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$?)

∗**9.** Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně. (Znamená to, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nekonverguje — podle předchozí úlohy diverguje k $+\infty$.) Pro každý člen řady a_n definujme $b_n = \max\{a_n, 0\}$ a $c_n = \max\{-a_n, 0\}$. Platí $b_n, c_n \geq 0$, $a_n = b_n - c_n$, $|a_n| = b_n + c_n$. Uvažujte o řadách

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

složených pouze z nezáporných členů. Dokažte, že obě tyto řady divergují k $+\infty$.
Návod: Použijte výsledku z úlohy 8, abyste zdůvodnili, že řada s nezápornými členy, tj. řada, jejíž posloupnost částečných součtů je neklesající, buď konverguje, nebo diverguje k $+\infty$. (Pro úplnost — řada s nekladnými členy buď konverguje, nebo diverguje k $-\infty$, to však není pro tuto úlohu podstatné.) Jsou tedy pro řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ možnosti: obě konvergují, první konverguje a druhá diverguje k $+\infty$ (nebo naopak), obě divergují k $+\infty$. Pomocí odpovědí na otázky opět najděte řešení úlohy:

- Jestliže by obě řady konvergovaly, co by platilo pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n + c_n)$ (první pravidlo věty 1.5)? Uvědomte si, čemu se rovná $b_n + c_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, a jaký je výchozí předpoklad o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- Kdyby třeba řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergovala a řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergovala k $+\infty$ (nebo naopak), co by asi dělala řada $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - c_n)$? Uvědomte si, čemu se rovná $b_n - c_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, a jaký je výchozí předpoklad o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Pokud jste zodpověděli předchozí otázky správně, zbyla vám jen možnost, že obě řady divergují k $+\infty$.

∗**10.** Dokažte, že konvergují-li dvě řady, konverguje i řada vytvořená z lineárních kombinací jejich odpovídajících si členů, a to s libovolnými koeficienty $\alpha \in \mathbf{R}$ a $\beta \in \mathbf{R}$. Součet takové řady je roven lineární kombinaci součtů jednotlivých řad s koeficienty α a β (první pravidlo ve větě 1.5).
Návod: Při označení použitém ve větě 1.5 odhadněte výraz

$$V_n = \left| \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) - (\alpha s_a + \beta s_b) \right|$$

pomocí známé nerovnosti $|pA + qB| \leq |p| \cdot |A| + |q| \cdot |B|$ a ukažte, že

$$V_n \leq |\alpha| \cdot \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - s_a \right| + |\beta| \cdot \left| \sum_{k=1}^{n} b_k - s_b \right|.$$

Zvolte $\varepsilon > 0$ a označte

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, \quad \varepsilon_b = \frac{\varepsilon}{2|\beta|}.$$

Formulujte skutečnost, že s_a je limitou posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ použitím čísla ε_a a skutečnost, že s_b je limitou posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ použitím čísla ε_b. Odpovídající „mezní indexy" označte třeba N_a a N_b. Definici konvergentní posloupnosti nyní uplatněte na výslednou posloupnost a dokažte, že existuje index N tak, že pro všechny indexy $n > N$ platí $V_n < \varepsilon$. Jak například zvolíte index N s ohledem na N_a a N_b? Číslo $\alpha s_a + \beta s_b$ je tedy limitou posloupnosti částečných součtů řady vzniklé z lineárních kombinací členů původních řad.

11. Dokažte, že konverguje-li řada absolutně, konverguje i „obyčejně" (čtvrté pravidlo ve větě 1.5).
Návod: Důkaz je vhodné provést pomocí Cauchyova–Bolzanova kritéria pro řady (věta 1.4). Vyjádřete proto výraz

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|.$$

Zvolte $\varepsilon > 0$ a aplikujte větu 1.4 na řadu z absolutních hodnot. Dokončení důkazu je již triviální — uvidíte, že řada bez absolutních hodnot rovněž splňuje Cauchyovo–Bolzanovo kritérium.

***12.** Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak platí $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Dokažte (poslední pravidlo ve větě 1.5).
Návod: Označte $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, resp. $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ posloupnost částečných součtů „obyčejné" řady, resp. řady z absolutních hodnot. Odpovězte na následující otázky: Jaká nerovnost platí mezi s_n a S_n pro každé n? Jaká nerovnost z toho vyplývá pro $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ a $S = \lim_{n\to\infty} S_n$?

13. Pomocí kritérií obsažených ve větě 1.7 zjistěte, za jakých podmínek konvergují, resp. absolutně konvergují následující řady:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ (pro jaké hodnoty k konverguje?),

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(an+b)^k}$, $a, b \in \mathbf{N}$, (pro jaké hodnoty k konverguje?),

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$, $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_k, k, m \in \mathbf{N}$, (pro jaké hodnoty k a m konverguje?),

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0}{b^n}$, $a_0, \ldots, a_m > 0$, $m, b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$,

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln^n n}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n^n)}$.

1.2 Posloupnosti a řady potřetí — funkce

Problematika číselných posloupností a řad se možná jeví jako jakási „hra“ s čísly, hromadnými body a nekonečny. Bez jejího pochopení bychom se však nemohli zabývat chováním posloupností a řad funkcí, které mají značný praktický význam. Některých možností použití řad funkcí jsme se dotkli již v úvodu k této kapitole. Také řešení některých diferenciálních rovnic jsou vyjádřena řadami funkcí. V tomto odstavci využijeme znalostí o číselných posloupnostech a řadách k formulaci definic konvergentních posloupností funkcí a řad a charakterizaci jejich vlastností.

1.2.1 Posloupnosti funkcí — není konvergence jako konvergence

Vzpomeňme na definici číselné posloupnosti (1.1) — šlo o zobrazení, které přiřazovalo každému přirozenému číslu $n \in \mathbf{N}$ nějaké reálné číslo. Nyní půjde o to, přiřadit přirozeným číslům funkce. Uvažujme o všech reálných funkcích proměnné x definovaných na tomtéž definičním oboru $D \subset \mathbf{R}$, většinou na otevřeném, uzavřeném nebo jiném intervalu, nebo i na obecnější množině, která může být třeba sjednocením intervalů. V definicích a větách se pro jednoduchost omezíme na situace, kdy D je interval. Množinu všech funkcí definovaných na D označme $\mathcal{F}_D$. Později budeme pracovat s podmnožinami funkcí, které mají předepsané vlastnosti. Například jsou spojité, diferencovatelné (mají derivaci), apod.

Zobrazení

$$\mathbf{N} \ni n \longrightarrow f_n(x) \in \mathcal{F}_D \tag{1.8}$$

nazýváme *posloupnost funkcí.*

Také posloupnosti funkcí mohou mít své limity. Těmi pochopitelně jsou opět funkce. Vyčíslíme-li všechny funkce dané posloupnosti (1.8) v určitém bodě $a \in D$, můžeme se zajímat o to, zda konverguje číselná posloupnost $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Pokud ano, říkáme, že posloupnost funkcí *konverguje v bodě a*. Bodů, v nichž posloupnost konverguje, může být více, dokonce mohou vyplnit celou množinu D. Odtud se odvíjí definice *bodové konvergence* posloupnosti funkcí.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *konverguje bodově na množině D*, jestliže konvergují číselné posloupnosti $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbf{N}}$ v každém bodě $a \in D$. Funkci

$$f:\ D \ni x \longrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$$

nazveme *limitou posloupnosti funkcí* $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Zapisujeme také $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} \to f(x)$ na D.

Obdobně samozřejmě můžeme hovořit o bodové konvergenci na nějaké podmnožině oboru D. V následujícím příkladu si formulujeme definici bodové konvergence jiným, ale ekvivalentním způsobem. Tato formulace bude vycházet přímo z definice konvergence číselné posloupnosti. Bude sice zdánlivě složitější, ale s výhodou se pak od ní „odrazíme“ při vymezení „lepšího“ typu konvergence, tzv. *konvergence stejnoměrné*.

Příklad 1.21: Definice bodové konvergence jinak

Přeformulujme tedy definici bodové konvergence posloupnosti funkcí: Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ bodově konverguje na množině D k funkci $f(x)$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ a pro každý bod $x \in D$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Uvědomme si, že index N, od kterého výše uvedená nerovnost platí, závisí obecně na tom, jak jsme zvolili ε a konkrétní bod x, v němž jednotlivé funkce posloupnosti i funkci $f(x)$ vyčíslujeme, tj. $N = N(\varepsilon, x)$. Obvyklé je, že čím menší ε volíme, tím větší vychází index N. Také obecně platí, že v některých bodech oboru D konverguje posloupnost „lépe“ a v jiných „hůře“. Také v bodech „horší“ konvergence vychází index N větší.

Ukažme si předchozí obecné úvahy na příkladu velmi jednoduché posloupnosti funkcí, posloupnosti geometrické, pro niž platí $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. (Zahrnutí indexu $n = 0$ „do hry“ je u mocninných posloupností obvyklé a nepřináší žádnou podstatnou změnu v definici posloupnosti, pouze přidává nultý člen.) Posloupnost je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Jejím kvocientem je právě x. Počítáme-li limitu $\lim_{n\to\infty}\{x^n\}$, vidíme (a víme to už ze střední školy), že pouze pro $|x| < 1$ je tato limita vlastní a je rovna nule. Pro $x > 1$ je limita nevlastní a rovna $+\infty$, pro $x \leq -1$ posloupnost osciluje. Pro $x = 1$ jsou všechny členy posloupnosti rovny jedné, stejně tak jako její vlastní limita. Situaci ukazuje následující tabulka, která pro úplnost ukazuje také intervaly konvergence posloupnosti tvořené absolutními hodnotami funkcí $f_n(x) = x^n$.

	$\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$	limita	$\{\lvert x^n\rvert\}_{n\in\mathbf{N}}$	limita
$x \in (-\infty, -1)$	osciluje	neexistuje	diverguje	$+\infty$
$x = -1$	osciluje	neexistuje	konverguje	1
$x \in (-1, 1)$	konverguje	0	konverguje	0
$x = 1$	konverguje	1	konverguje	1
$x \in (1, \infty)$	diverguje	$+\infty$	diverguje	$+\infty$

Nejzajímavější částí reálné osy z pohledu bodové konvergence této posloupnosti je tedy interval $(-1, 1)$, kde posloupnost konverguje k identicky nulové funkci,

$$\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = f(x) = 0.$$

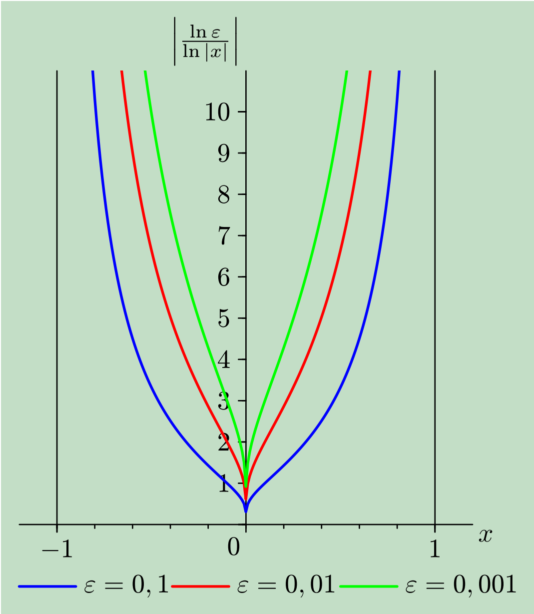
Dále předpokládejme, že $|x| < 1$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a sledujme, jak závisí index $N(\varepsilon, x)$, od kterého výše bude platit nerovnost $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, na volbě ε, zejména však na bodu x, ve kterém právě posloupnost vyčíslujeme. Řešíme nerovnost $|x^n - 0| < \varepsilon$ vzhledem k n:

$$|x^n - 0| < \varepsilon \implies |x|^n < \varepsilon \implies n \ln|x| < \ln\varepsilon \implies n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}.$$

Dokážete zdůvodnit, proč jsme při logaritmování výchozí nerovnosti ponechali znak nerovnosti a při další úpravě jsme jej museli otočit? Mohl by být podíl logaritmů $\ln\varepsilon$ a $\ln|x|$ také záporný? Co by to znamenalo? Abychom se vyhnuli komplikacím s úvahami o znaménku výsledného výrazu, vezměme

$$N(\varepsilon, x) = 1 + \left[\left|\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}\right|\right],$$

přičemž hranaté závorky znamenají celočíselnou část výrazu v nich. Pro všechny indexy $n > N(\varepsilon, x)$ bude požadovaná nerovnost $|x^n| < 0$ bezpečně platit. Zaměřme se nyní na vztah pro index $N(\varepsilon, x)$. Jeho závislosti



Obr. 1.9 Konvergence geometrické posloupnosti funkcí v závislosti na kvocientu x.

na ε se nemůžeme zbavit. Závislost veličiny $\left|\frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}\right|$ na $|x|$ pro $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ukazuje graf na obrázku 1.9 (pro $x \to 0$ se křivky blíží asymptoticky ke svislé ose). Blíží-li se kvocient x hodnotě 1 nebo -1, nabývá výraz pro N libovolně velkých hodnot. Jeho závislost na x bychom dokázali odstranit pouze tak, že bychom omezili obor konvergence posloupnosti z intervalu $(-1, 1)$ na nějaký menší interval, třeba $(-1 + \delta, 1 - \delta)$, $0 < \delta < 1$. Číslo δ by již mohlo být jakkoli malé. Pro index N bychom pak dostali hodnotu nezávislou na x, konkrétně

$$N(\varepsilon) = 1 + \left[\left|\frac{\ln \varepsilon}{\ln |1 - \delta|}\right|\right].$$

Pozn.: Všimněte si ještě, že posloupnost $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bodově konverguje dokonce na zprava uzavřeném intervalu $(-1, 1]$. Její limitou je funkce, která je identicky nulová na otevřeném intervalu $(-1, 1)$, v bodě $x = 1$ nabývá hodnoty $f(1) = 1$. Je tedy v bodě $x = 1$ nespojitá, zatímco všechny funkce posloupnosti jsou spojité.

Úvahy v příkladu 1.21 mohou třeba i působit dojmem zbytečné „jemnosti“. Jsou však důležité pro zavedení dalšího, podstatně silnějšího pojmu *stejnoměrné konvergence.*

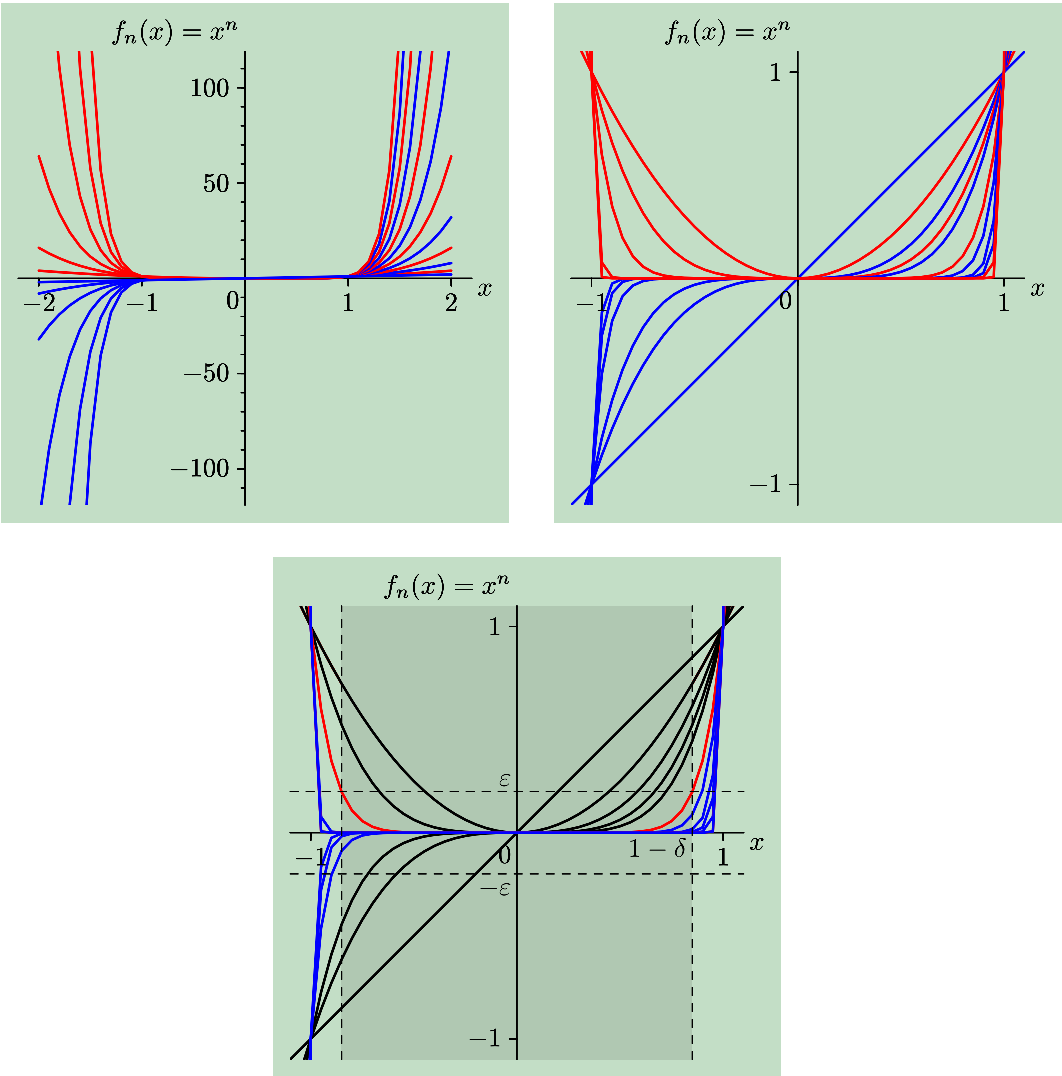
Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje *stejnoměrně na množině D* k funkci $f(x)$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ a pro každý bod $x \in D$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zapisujeme také $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} \rightrightarrows f(x)$ na D.

Čím se vlastně liší tato definice od definice bodové konvergence, kterou jsme alternativně (ekvivalentně) formulovali v příkladu 1.21? Zdá se, že se tyto dvě definice liší pouze jiným začleněním textu „pro každý bod $x \in D$“, tedy fakticky pouze slovosledem. Tato odlišnost však není pouhou gramatickou hříčkou. Naopak, je velice podstatná. Zatímco slovosled v definici bodové konvergence znamená, že index N, od kterého výše platí požadovaná nerovnost, závisí jak na volbě ε, tak na volbě bodu $x \in D$, pro který konvergenci zjišťujeme, tj. $N = N(\varepsilon, x)$, závisí tento index v případě stejnoměrné konvergence pouze na volbě ε a pro celou množinu D je univerzální, tj. $N = N(\varepsilon)$.

Příklad 1.22: Konverguje geometrická posloupnost funkcí stejnoměrně?



Obr. 1.10 Geometrická posloupnost funkcí.

Na tuto otázku odpovídá řešení příkladu 1.21. Závislosti indexu N na bodu $x \in D$ se na celém intervalu $(-1, 1)$ nelze zbavit. Na intervalu $(-1, 1)$ tedy posloupnost konverguje bodově, ale nekonverguje stejnoměrně.

Stačí však interval sebeméně zmenšit a na intervalu $(-1+\delta,\, 1-\delta)$, a dokonce na $[-1+\delta,\, 1-\delta]$ již posloupnost konverguje stejnoměrně. Na obrázku 1.10 je znázorněno několik členů geometrické posloupnosti funkcí s vyznačením odlišnosti bodové konvergence na intervalu $(-1,\, 1)$ a stejnoměrné konvergence na intervalu $(-1+ +\delta,\, 1-\delta)$. Horní obrázek vlevo znázorňuje grafy funkcí $y = x^n$ v intervalu $[-2,\, 2]$ pro n nabývající hodnot 1 až 12. (Obrázek berte jako ilustrační. Vlivem značného rozsahu hodnot n nejsou některé grafy dobře rozlišeny.) Na obrázku vpravo nahoře jsou funkce $y = x^n$ v intervalu bodové konvergence $(-1,\, 1]$ pro n postupně 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 25, 35, 50 a 100. Obrázek dole znázorňuje vliv omezení intervalu konvergence na $(-1+\delta,\, 1-\delta)$. V tomto intervalu již posloupnost funkcí konverguje stejnoměrně. Pro konkrétně zvolené $\varepsilon = 0,2$ je graf odpovídající indexu $N(\varepsilon) = 10$, již nezávislému na x, vyznačen červeně, grafy pro hodnoty indexu $n = 15$, 25, 35, 50, 75 a 100, tj. $n > N(\varepsilon)$, jsou vyznačeny modře, grafy pro ostatní indexy, tj. $n = 1$, 2, 3, 4, 5, jsou černé. Při omezení na interval $(-1+\delta,\, 1-\delta) = (-0,85,\, 0,85)$ leží v intervalu $(-0,2,\, 0,2)$ všechny grafy funkcí $y = x^n$ pro $n > 10$.

Nakonec uvažme libovolný bod $x \in (-1,\, 1)$ a zvolme $\delta > 0$ tak, aby $-1+\delta < x < 1-\delta$. V intervalu $(-1+\delta,\, 1-\delta)$ posloupnost konverguje stejnoměrně. Pro každý bod x z intervalu $(-1,\, 1)$ tedy dokážeme nalézt takové jeho okolí, v němž posloupnost konverguje stejnoměrně. Říkáme, že na intervalu $(-1,\, 1)$ konverguje posloupnost *lokálně stejnoměrně*. Z předchozích úvah také vyplývá, že posloupnost konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu intervalu $(-1,\, 1)$.

Vzpomenete si ještě na Cauchyovo–Bolzanovo kritérium konvergence číselných posloupností? Toto kritérium říkalo, že číselná posloupnost je konvergentní právě tehdy, když jsou její členy s dostatečně vysokými indexy „natěsnány“ libovolně blízko sebe. V matematickém jazyce to formulovala věta 1.3 — pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje takový index N, že pro všechny dvojice indexů n a $n+m$, kde $n > N$ a m je libovolné, je $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$. Také pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí taková věta platí, index N však musí být „univerzální“ pro celý interval hodnot proměnné x, které se věta týká. Může (a obecně bude) záviset na volbě ε, ne však na x.

Věta 1.8 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro posloupnosti funkcí): *Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n(x) \in \mathcal{F}_D$, je stejnoměrně konvergentní na D právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$, všechna $m \in \mathbf{N}$, a pro každý bod $x \in D$ platí $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.*

Důležitost tohoto kritéria spočívá, podobně jako u číselných posloupností, mj. v tom, že pracuje pouze se členy posloupnosti, nikoli s konkrétní funkcí $f(x)$, která je její limitou. Důkaz je velmi jednoduchý a v podstatě sleduje důkaz věty 1.3. Ponecháme jej tedy do cvičení.

Stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí se obdobně jako u posloupností číselných nazývá *cauchyovská*.

Jednotlivé členy dané konvergentní posloupnosti funkcí mohou mít určité vlastnosti. Jsou třeba spojité, diferencovatelné (mají derivaci), integrabilní, atd. Zajímavou a zejména pro fyzikální, technické či jiné praktické aplikace důležitou otázkou je, jak se tato vlastnost „přenáší“ na limitu posloupnosti. Tedy: Je limita posloupnosti spojitých funkcí také spojitá funkce? Je limita posloupnosti diferencovatelných funkcí také diferencovatelná funkce? A podobně. Jakou roli při odpovědi na tyto otázky hraje to, zda konvergence posloupnosti na daném intervalu je stejnoměrná, nebo jen bodová? A právě nyní uvidíme důležitost „silnější“, tj. stejnoměrné konvergence.

Příklad 1.23: Ještě jednou geometrická posloupnost funkcí

Že mají předchozí otázky smysl, je vidět hned na příkladu geometrické posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n(x) = x^n$ (příklad 1.22). Pro jednoduchost omezme definiční obor na interval $D = [0,\,1]$, abychom se vyhnuli funkcím se záporným základem. Všechny členy posloupnosti jsou spojité funkce na D. Posloupnost, jak víme z řešení příkladu 1.22, konverguje bodově k funkci $f(x)$, která je na intervalu $[0,\,1)$ nulová a $f(1) = 1$. Na rozdíl od všech členů posloupnosti tedy její limita *není spojitá*. Omezíme-li definiční obor ještě o kousek, jakkoli málo, na interval $[0,\,1-\delta)$, resp. $[0,\,1-\delta]$, $0 < \delta < 1$, bude na něm zadaná posloupnost již konvergovat stejnoměrně, jak jsme se rovněž přesvědčili v příkladu 1.22. Její limitou je funkce $f(x) = 0$ na $[0,\,1-\delta)$, resp. $[0,\,1-\delta]$, tedy funkce spojitá.

Je to právě vlastnost *stejnoměrné konvergence*, která zaručuje, že se vlastnosti členů posloupnosti přenesou i na její limitu. Následující věta shrnuje nejdůležitější praktická tvrzení, která se tohoto problému týkají.

Věta 1.9 (Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností funkcí): *Nechť $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost funkcí, která konverguje na D k funkci $f(x)$. Vlastnosti členů posloupnosti se předpokládají pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Platí*

Nechť (předpoklady)		***Pak (tvrzení)***
konvergence posloupnosti je stejnoměrná a funkce $f_n(x)$ jsou spojité na D	$\Longrightarrow$	*funkce $f(x)$ je spojitá na D*
konvergence posloupnosti je stejnoměrná a funkce $f_n(x)$ jsou integrabilní na $[a,b] \subset D$	$\Longrightarrow$	*funkce $f(x)$ je integrabilní na $[a,b]$ a platí* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$
konvergence posloupnosti je stejnoměrná na $D \setminus \{a\}$ a existují limity $\lim\limits_{x\to a}\{f_n(x)\} = L_n$	$\Longrightarrow$	*existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{L_n\}$
funkce $f_n(x)$ mají derivace na otevřeném intervalu D, $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje stejnoměrně na D	$\Longrightarrow$	*$f(x)$ má derivaci na D a platí $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{f_n'(x)\}$*
posloupnost je monotónní, funkce $f_n(x)$ a $f(x)$ jsou spojité na D	$\Longrightarrow$	*posloupnost konverguje stejnoměrně na D*

Proč jsou tyto vlastnosti tak „prakticky důležité“, jak jsme avizovali? Nejde jen o „přenesení“ vlastností členů posloupnosti funkcí na funkci, která je její limitou (spojitost, diferencovatelnost, integrabilita, apod.), ale také o záměnnost určitých operací. Například, potřebujeme-li znát limitu posloupnosti $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, která je dána integrály funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a,\, b]$, nemusíme počítat všechny tyto integrály, resp. hledat obecný vzorec pro I_n a pak počítat limitu výsledné posloupnosti. Místo toho můžeme nejprve určit limitu $f(x)$ a pak teprve spočítat její integrál. Podobně je tomu se záměnností výpočtu limity funkce $f(x)$ v bodě a s limitou posloupnosti limit, nebo se záměnností pořadí derivování. Za předpokladu splnění požadavků věty 1.9 můžeme vztahy záměnnosti vyjádřit takto:

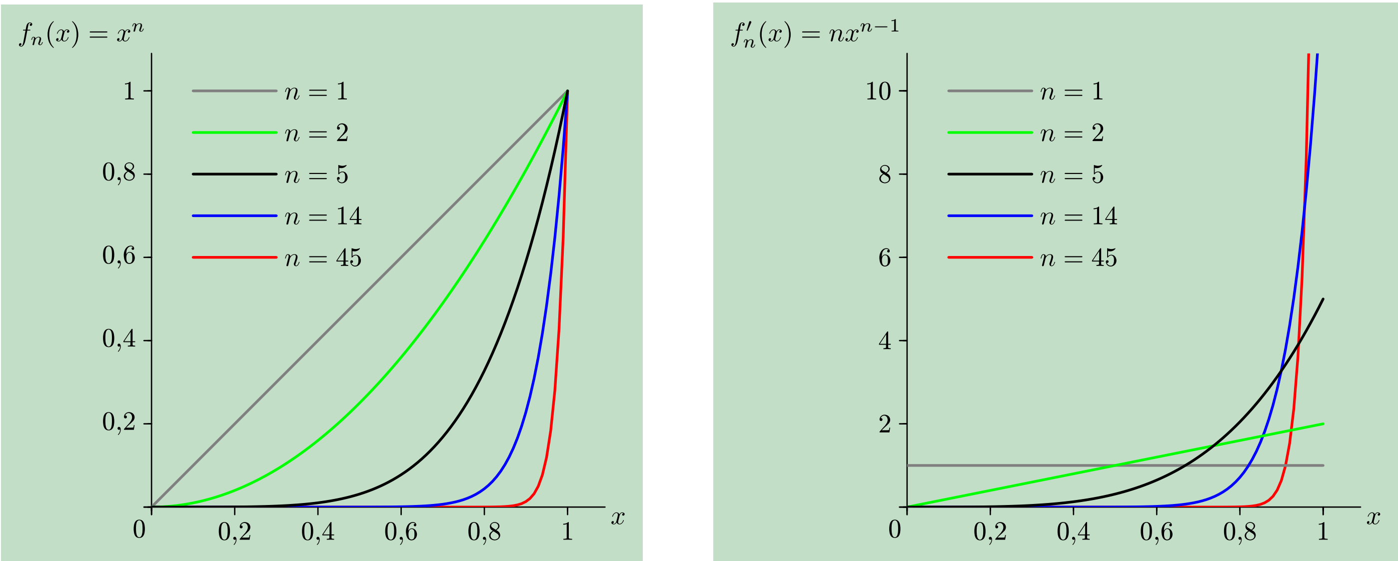
$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{x\to a} f_n(x)\right\}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}\right] = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x}\right\}, \tag{1.9}$$
$$\int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Důkazy těchto tvrzení shrnutých ve větě 1.9 jsou založeny na Cauchyově–Bolzanově kritériu, ale samozřejmě také na definicích či vlastnostech operací, jichž se týkají (integrabilita funkcí, diferencovatelnost funkcí, apod.) Vesměs jsou lehké. Ukážeme si alespoň jeden z nich, třeba pravidlo o derivaci. Na něm je zajímavé to, že nepožadujeme stejnoměrnou konvergenci *původní* posloupnosti funkcí, stačí nám konvergence obyčejná (bodová). Naopak u posloupnosti *vytvořené z derivací* původních funkcí požadujeme stejnoměrnou konvergenci. Během důkazu uvidíme proč.

Než se však do důkazu pustíme se vší obecností, osvětlíme si význam předpokladů názorně na příkladech. Uvědomme si: Jaké je například postavení požadavku stejnoměrné konvergence ve větě 1.9? Stejnoměrná konvergence (spolu s dalšími požadavky) *zajišťuje* platnost tvrzení, má tedy charakter jedné ze souboru postačujících podmínek. Pokud by nebyla splněna, *nemusí* závěr platit, jak jsme třeba viděli v příkladu 1.23. Může se ovšem stát, že soubor požadavků tvořících postačující podmínku nebude jako celek splněn, avšak vlastnosti popsané jako důsledek tohoto souboru, nebo aspoň některé z nich, splněny budou. Pro podrobnější vysvětlení použijeme předposlední pravidlo věty 1.9, týkající se posloupnosti a derivované posloupnosti.

Příklad 1.24: Nejjednodušší příklad



Obr. 1.11 K příkladu 1.24.

Nejjednodušším příkladem je geometrická posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f(x) = x^n$, jíž jsme se podrobně věnovali již v příkladech 1.21, 1.22 a 1.23. Víme o ní, že konverguje k funkci $f(x) = 0$ na intervalu $(-1, 1)$. Tato konvergence sice není stejnoměrná, ale z hlediska pravidla pro derivaci posloupnosti to nevadí. Co by vadit mohlo, je skutečnost, že také posloupnost derivací funkcí $f_n(x)$, tj. posloupnost $\{f'_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f'_n(x) = n\,x^{n-1}$, konverguje na $(-1, 1)$ pouze bodově, a to rovněž k identicky nulové funkci. Jedna ze souboru postačujících podmínek, požadavek stejnoměrné konvergence derivované posloupnosti, je tedy porušena a limita posloupnosti $\{f'_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ by se tedy *nemusela rovnat* funkci $f'(x)$. Ale rovná se jí, neboť na $(-1, 1)$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \{n\,x^{n-1}\} = 0, \quad f'(x) = 0.$$

Je vidět, že podmínka postačující něco s jistotou zaručuje, avšak ono to může nastat, i když není splněna. Pro názornost ukazuje obrázek 1.11 několik členů geometrické posloupnosti $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a posloupnosti derivované na intervalu $[0, 1]$.

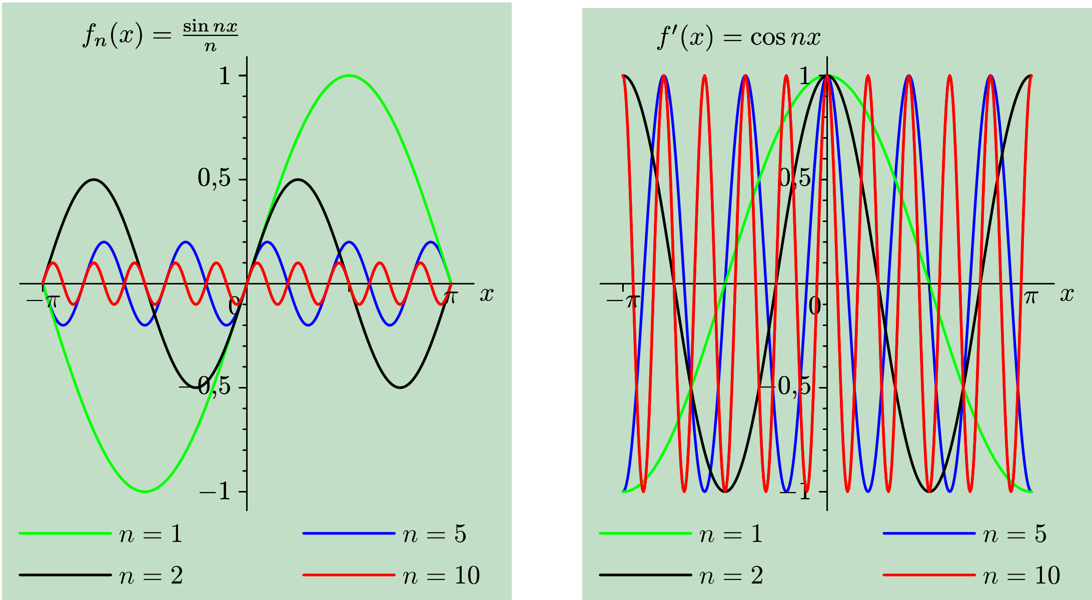
Pozn.: Pokud použijeme stejný „trik“ jako v příkladech 1.21 a 1.22, „oželíme“ část definičního intervalu posloupnosti a omezíme se na interval $(-1+\delta,\, 1-\delta)$, resp. $[-1+\delta,\, 1-\delta]$, konvergence derivované posloupnosti (a té původní rovněž) bude již stejnoměrná.

Příklad 1.25: Příklad také jednoduchý

Posloupnost funkcí

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$$

konverguje na celé reálné ose $\mathbf{R}$ k identicky nulové funkci $f(x) = 0$. Tato konvergence je dokonce stejnoměrná.



Obr. 1.12 K příkladu 1.25.

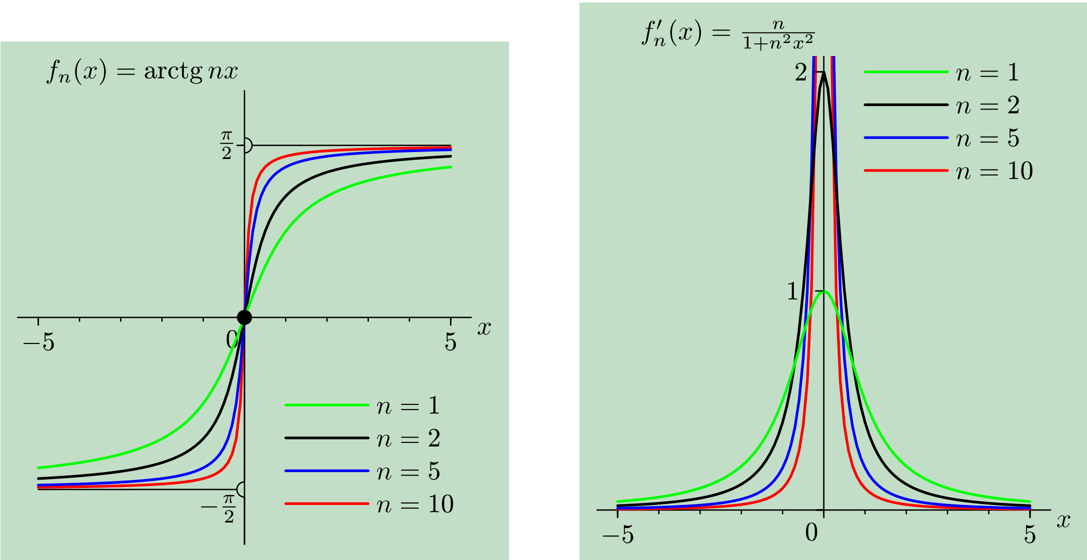
Skutečně, zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Pro nalezení indexu N, od kterého výše platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, řešíme

nerovnost
$$\left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$
Protože je $|\sin nx| \leq 1$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}$, stačí volit $N > \varepsilon^{-1}$, tj. $N = [\varepsilon^{-1}] + 1$. Podstatné je, že tato hodnota je univerzální pro celou reálnou osu (nezávisí na x) — konvergence je vskutku stejnoměrná. Z hlediska předposlední vlastnosti věty však typ konvergence zadané posloupnosti není důležitý.

Každá z funkcí dané posloupnosti má na celé reálné ose derivaci $f_n'(x) = \cos nx$. Posloupnost derivací ovšem nekonverguje v žádném bodě x ani bodově, natož stejnoměrně. Situaci ilustruje obrázek 1.12. Funkce $f(x) = 0$, která je limitou zadané posloupnosti, má všude na $\mathbf{R}$ derivaci $f'(x) = 0$. Posloupnost utvořená z derivací $f_n'(x)$ však limitu vůbec nemá. Vztah uvedený v předposledním tvrzení věty 1.9 proto pro naši řadu neplatí.

Příklad 1.26: Příklad trochu náročnější

Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} = \{\operatorname{arctg} nx\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje na $\mathbf{R}$ k funkci
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\{\operatorname{arctg} nx\}, \quad f(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ pro } x < 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ pro } x > 0, \quad f(0) = 0.$$
Tato funkce není sice ani spojitá, ale předposlednímu tvrzení ve větě 1.9 to nevadí. Má nulovou derivaci na množině $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, v bodě $x = 0$ její derivace není definována. Funkce dané posloupnosti mají na $\mathbf{R}$ derivace
$$f_n'(x) = \frac{n}{1 + n^2x^2}.$$
Posloupnost těchto funkcí konverguje na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ k identicky nulové funkci $g(x) = 0$, v bodě $x = 0$ má odpovídající číselná posloupnost tvar $\{f_n'(0)\}_{n\in\mathbf{N}} = \{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a diverguje k $+\infty$. Několik členů zadané posloupnosti a posloupnosti derivované je znázorněno na obrázku 1.13. Konvergence posloupnosti $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$



Obr. 1.13 K příkladu 1.26.

na $(-\infty,\, 0) \cup (0,\, \infty)$ není stejnoměrná. Ukážeme to. Zvolme $\varepsilon > 0$ a řešme vzhledem k indexu n nerovnost

$$\left|\frac{n}{1+n^2x^2} - 0\right| < \varepsilon \implies (x^2\varepsilon)n^2 - n + \varepsilon > 0 \quad \text{pro} \quad x \neq 0. \tag{1.10}$$

(Proč myslíte, že jsme nulu zatím z výpočtu vyloučili?) Kořeny levé strany

$$\frac{1}{2x^2\varepsilon}\left(1 \pm \sqrt{1-4x^2\varepsilon^2}\right)$$

jsou reálné pouze pro $x \in \left[-\frac{1}{2\varepsilon},\, \frac{1}{2\varepsilon}\right]$, nulu jsme však vyloučili, a proto $x \in \left[-\frac{1}{2\varepsilon},\, 0\right) \cup \left(0,\, \frac{1}{2\varepsilon}\right]$. Index N, od kterého výše platí požadovaná nerovnost (1.10), je pak určen větším z obou kořenů, tj.

$$N > \frac{1}{2x^2\varepsilon}\left(1 + \sqrt{1-4x^2\varepsilon^2}\right).$$

Je vidět, že dolní mez indexu N závisí na x — s klesajícím x neomezeně roste. Pro $x \in \left(-\infty,\, -\frac{1}{2\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{2\varepsilon},\, \infty\right)$ má výraz $(x^2\varepsilon)n^2 - n + \varepsilon$ na levé straně druhé nerovnosti (1.10) kladné znaménko pro všechna n, problémy tedy dělají jen body „blízko“ $x = 0$. Jich se můžeme zbavit podobně, jako jsme to udělali u geometrické posloupnosti v příkladech 1.21 a 1.22. Zvolíme-li nějaké $\delta > 0$, jakkoli malinkaté, bude již zadaná posloupnost na množině $(-\infty,\, -\delta) \cup (\delta,\, \infty)$ konvergovat k identicky nulové funkci stejnoměrně. Tento výsledek již je postačující k zajištění stejnoměrné konvergence posloupnosti derivací členů posloupnosti $\{\operatorname{arctg} nx\}_{n\in\mathbf{N}}$ k funkci, která je identicky nulová na množině $(-\infty,\, -\delta) \cup (\delta,\, \infty)$, a rovnosti derivace limity původní posloupnosti a limity derivované posloupnosti na téže množině. Rovnost limit je zřejmá — derivace konstanty ($-\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(-\infty,\, -\delta)$ a $\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(\delta,\, \infty)$) je nulová, limita posloupnosti

$$\{(\operatorname{arctg} nx)'\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\frac{n}{1+n^2x^2}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$$

je také nulová.

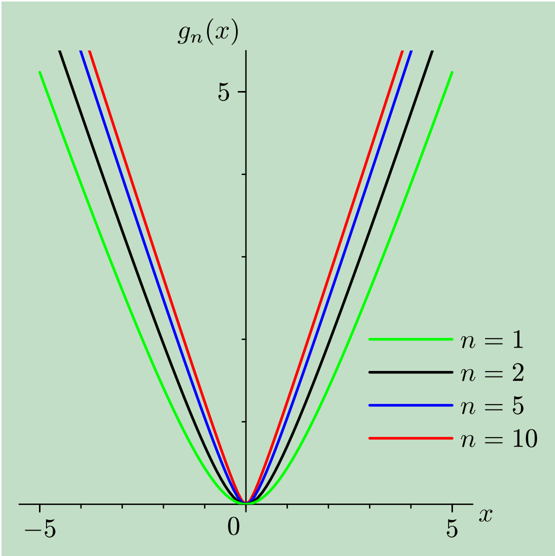
Příklad 1.27: Jak ještě lze používat pravidla věty 1.9

V předchozím příkladu jsme se důkladně zabývali posloupností $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, kde $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, definované na celé reálné ose. Z čeho všeho můžeme zjistit, že tato posloupnost na $\mathbf{R}$ sice konverguje, ale ne stejnoměrně? Možností je několik. Východiskem první z nich může být samozřejmě definice. Jsou však i další možnosti, které vyplývají z věty 1.9.

- Pomocí vlastnosti spojitosti: Zjistili jsme, že naše posloupnost bodově konverguje k funkci definované rovněž na $\mathbf{R}$, která nabývá konstantní hodnoty $-\pi/2$, resp. $\pi/2$ na intervalu $(-\infty,\, 0)$, resp. $(0,\, \infty)$ a nulové hodnoty pro $x = 0$. Je tedy v bodě $x = 0$ nespojitá a ani v něm nemá limitu. Kdyby původní posloupnost *spojitých funkcí* $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ konvergovala na $\mathbf{R}$ stejnoměrně, byla by její limita podle prvního pravidla věty 8.9 také spojitou funkcí na $\mathbf{R}$. Ale to ona není. Je tedy nutně porušen některý z předpokladů tohoto pravidla. Je jím požadavek stejnoměrné konvergence posloupnosti.
- Pomocí vlastnosti derivace: Následující posloupnost vypadá složitě a možná uměle vymyšleně,

  $$\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad g_n(x) = x \operatorname{arctg} nx - \frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2x^2\right).$$

  Jestliže však její členy zderivujeme, objeví se „naše“ posloupnost $\{g_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $g_n'(x) = f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$. Limitou posloupnosti $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je funkce $g(x) = \frac{\pi}{2}|x|$ a ta nemá v bodě $x = 0$ derivaci. Kdyby posloupnost arkustangent konvergovala stejnoměrně na $\mathbf{R}$, musela by funkce $g(x)$ mít derivaci na $\mathbf{R}$. (Z cvičných důvodů si limitu $\lim_{n\to\infty}\{g_n(x)\}$ vypočtěte.)



Obr. 1.14 K příkladu 1.27.

A pokud jde o typ konvergence posloupnosti $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ k funkci $\frac{\pi}{2}|x|$? Tak ta je na $\mathbf{R}$ stejnoměrná. Posloupnost je totiž na $\mathbf{R}$ monotónní (s výjimkou bodu $x = 0$, v němž je tvořena samými nulami, je dokonce rostoucí), můžeme proto použít poslední pravidlo věty 1.9. Z prvního pravidla zase plyne, že limita $g(x)$ je spojitá. Obrázek 1.14 znázorňuje několik členů posloupnosti $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Je na něm pěkně vidět, jak se s rostoucím n blíží k funkci $g(x) = \frac{\pi}{2}|x|$.

Pozn.: Pečlivý čtenář se pochopitelně nespokojí s obrázkem 1.14 jako „důkazem“ monotonie posloupnosti $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ a ověří si ji výpočtem.

Příklad 1.28: K čemu jsou posloupnosti funkcí dobré — jeden příklad z fyziky

Čtenáři zaměření prakticky si již jistě dávno kladou otázku, zda hra s posloupnostmi či řadami čísel a funkcí není jen nepraktickou záležitostí, která může zajímat leda tak zaryté matematické teoretiky. Že tomu tak není, se později ještě několikrát přesvědčíme. Teď však alespoň jeden prakticky použitelný fyzikální příklad z oblasti atomové fyziky. Ze školy i z praxe čtenář ví, že se různé látky chovají různě, když jsou vloženy do magnetického pole, některé se dají zmagnetovat a zase odmagnetovat, některé nikoli. Za chování látek odpovídají takzvané magnetické momenty jejich atomů. Ty se nemohou měnit spojitě. Jsou kvantovány. „Kvanta“ takového magnetického momentu jsou identifikována kvantovými čísly, která jsou celočíselná, nebo polovinná. Velikost magnetického momentu určitého objemu látky pak závisí jednak na určité spojité proměnné x související třeba s teplotou, jednak na kvantovém čísle n. A posloupnost funkcí je zde. Aniž bychom rozebírali podrobnosti, ukažme si takový konkrétní případ.

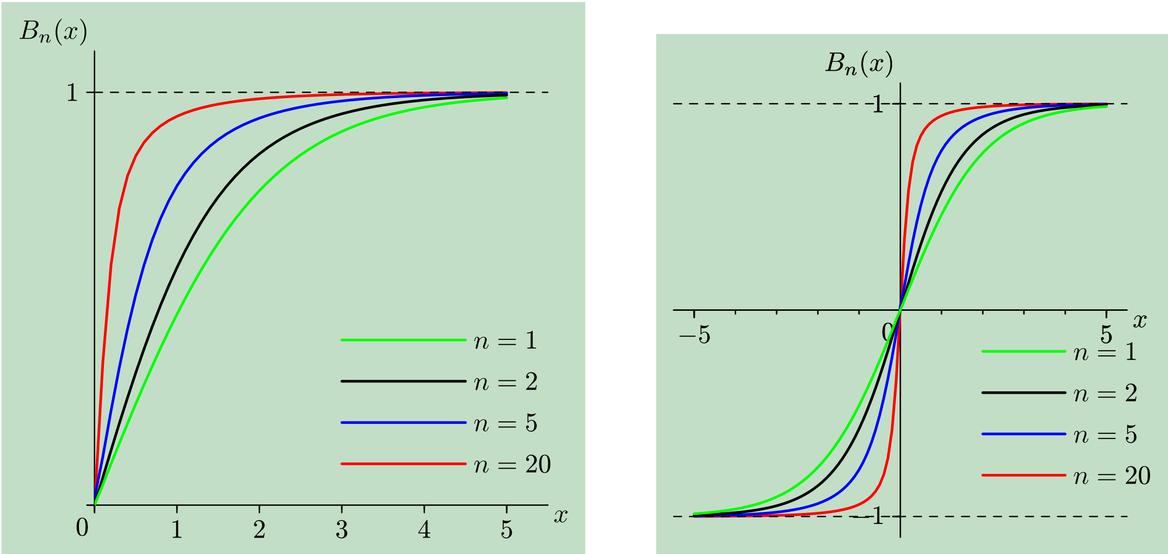
Magnetizace (celkový magnetický moment) určitého objemu látky je dána takzvanou *Brillouinovou funkcí* $B_J(x)$, kde x je spojitá proměnná (konkrétně je to veličina úměrná převrácené hodnotě teploty vzorku látky) a J je kvantové číslo udávající celkový moment hybnosti atomu. Toto číslo nabývá v principu hodnot z množiny $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\}$. Označíme-li $n = 2J$, lze Brillouinovu funkci zapsat ve tvaru

$$B_n(x) = \frac{n+1}{n}\operatorname{cotgh}\left(\frac{n+1}{2}\,x\right) - \frac{1}{n}\operatorname{cotgh}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Pro jednotlivé hodnoty $n \in \mathbf{N}$ jsou tyto funkce sice definovány na množině $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, avšak fyzikální význam proměnné x je takový, že $x > 0$. Uvažujeme tedy o posloupnosti funkcí $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ na množině $D = (0, \infty)$. Pro její limitu platí

$$\lim_{n\to\infty} \{B_n(x)\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n+1}{n} \frac{\exp\left(\frac{n+1}{2}x\right) + \exp\left(-\frac{n+1}{2}x\right)}{\exp\left(\frac{n+1}{2}x\right) - \exp\left(-\frac{n+1}{2}x\right)} - \frac{1}{n} \frac{\exp\frac{x}{2} + \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\exp\frac{x}{2} - \exp\left(-\frac{x}{2}\right)} \right\} = 1.$$

Členy posloupnosti pro $n = 1, 2, 5$ a 20 jsou pro $x \in (0, \infty)$ znázorněny v levé části obrázku 1.15, v pravé



Obr. 1.15 K příkladu 1.28.

části jsou grafy pro ilustraci znázorněny i pro záporné hodnoty x, i když nemají fyzikální význam. Celková magnetizace látky samozřejmě souvisí s dalšími fyzikálními veličinami popisujícími její stav, třeba s energií. Je proto třeba prošetřit, zda je konvergence posloupnosti k její limitě stejnoměrná, či nikoliv, abychom věděli, zda můžeme s posloupností „beztrestně“ provádět některé operace (např. derivování či integrování). Zjišťovat stejnoměrnou konvergenci zrovna u takto poměrně složitých funkcí jistě nebude dobře schůdné. Pomohou nám však pravidla obsažená ve větě 1.9. Pokuste se jich využít a stanovit intervaly stejnoměrné konvergence posloupnosti Brillouinových funkcí.

Na samém konci tohoto odstavce ještě provedeme slíbený důkaz předposledního pravidla věty 1.9, které se týká derivace posloupnosti funkcí. Kdo větě 1.9 věří a podstatu postačujících podmínek jednotlivých pravidel si ujasnil alespoň zhruba pomocí příkladů, může rovnou přejít k dalšímu odstavci.

Tak tedy předpokládejme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje na D k funkci $f(x)$ a že posloupnost derivací $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje také na D, avšak dokonce stejnoměrně. Její limitu označme $g(x)$. Je třeba dokázat, že funkce $f(x)$ má na D derivaci a platí $f'(x) = g(x)$.

Potřebujeme proto ukázat, že pro všechna $x \in D$ existuje limita

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

a že je rovna $g(x)$. Zvolme bod $x \in D$ na chvíli jako pevný. Funkce

$$g_n(y, x = \text{pevné}) = \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}$$

tvoří posloupnost $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n \in \mathbf{N}}$, definovanou na $D \setminus \{x\}$, a mají limity

$$\lim_{y \to x} g_n(y,\, x = \text{pevné}) = f'_n(x).$$

Pokud by posloupnost $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n \in \mathbf{N}}$ byla stejnoměrně konvergentní, mohli bychom použít třetího pravidla věty 1.9, tj. aplikovat na ni záměnnost limity $\lim_{n \to \infty}$ a limity $\lim_{y \to x}$. K důkazu stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n \in \mathbf{N}}$ využijeme předpokládané stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f'_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ na D a Cauchyova–Bolzanova kritéria. Abychom mohli toto kritérium uplatnit na posloupnost $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n \in \mathbf{N}}$, musíme počítat výraz

$$|g_{n+m}(y, x) - g_n(y, x)| = \left| \frac{f_{n+m}(y) - f_{n+m}(x)}{y - x} - \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \right| =$$

$$= \left| \frac{[f_{n+m}(y) - f_n(y)] - [f_{n+m}(x) - f_n(x)]}{y - x} \right|.$$

Na funkce $\varphi_{n,m}(z) = f_{n+m}(z) - f_n(z)$ lze na intervalu $z \in [x,\, y]$, nebo $z \in [y,\, x]$ uplatnit Lagrangeovu větu o střední hodnotě (v prvním dílu odstavec 2.1.7, věta 2.2), neboť jsou na D spojité a mají derivaci $\varphi'_{n,m}(z) = f'_{n+m}(z) - f'_n(z)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje bod $\xi \in (x,\, y)$ tak, že platí

$$\varphi_{n,m}(y) - \varphi_{n,m}(x) = \varphi'_{n,m}(\xi)(y - x) \implies$$

$$\implies [f_{n+m}(y) - f_n(y)] - [f_{n+m}(x) - f_n(x)] = [f'_{n+m}(\xi) - f'_n(\xi)](y - x)$$

a odtud

$$|g_{n+m}(y, x) - g_n(y, x)| = \left| f'_{n+m}(\xi) - f'_n(\xi) \right|.$$

A už máme vztah umožňující využít stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f'_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ na D, kterou opět vyjádříme pomocí Cauchyova–Bolzanova kritéria. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ a všechna $\xi \in D$ platí $|f'_{n+m}(\xi) - f'_n(\xi)| < \varepsilon$, odtud plyne, že pro všechna $n > N$ a všechna $x,\, y \in D$ je $|g_{n+m}(y, x) - g_n(y, x)| < \varepsilon$. Posloupnost funkcí $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n\in\mathbf{N}}$ tedy konverguje stejnoměrně na $D \setminus \{x\}$ pro všechna $x \in D$. Podle třetího pravidla věty 1.9 existuje pro každé $x \in D$ limita $\lim_{n\to\infty}\{\lim_{y\to x} g_n(y,x)\}$ a platí

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\{f_n'(x)\} = \lim_{n\to\infty}\{\lim_{y\to x} g_n(y,x)\} = \lim_{y\to x}\{\lim_{n\to\infty} g_n(y,x)\} \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{y\to x}\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}\right\} = \lim_{y\to x}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}\right\} = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x).$$

1.2.2 Řady funkcí a posloupnosti jejich částečných součtů

Tento odstavec bude velice stručný. Chování řad funkcí je totiž určeno posloupnostmi jejich částečných součtů. A posloupnosti funkcí jsme probrali opravdu důkladně. Pro pořádek zdůrazněme:

Nechť $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině $D \subset \mathbf{R}$. n-tým částečným součtem řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

rozumíme funkci

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Pozn.: Znovu připomeňme, že množinami D v našich úvahách rozumíme nejčastěji intervaly, popřípadě jejich sjednocení.

Nejprve jednoduchý a čtenářem již pravděpodobně očekávaný příklad — geometrická řada.

Příklad 1.29: Geometrická řada

Vzorec pro n-tý částečný součet geometrické řady $a_1\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ s kvocientem q jsme odvodili již v prvním dílu v příkladech 2.20 a 2.21 — vztahy (2.8) a (2.9). Budou-li kvocient řady nebo její první člen a_1 funkcemi proměnné x, tj. $q = q(x)$, $a_1 = a_1(x)$, máme geometrickou řadu funkcí. Pak

$$s_n(x) = a_1(x)\sum_{k=1}^{n} q^n(x) = a_1(x)\,\frac{q^n(x)-1}{q(x)-1}.$$

Pro $|q(x)| < 1$ řada konverguje, její limitou je funkce

$$s(x) = \lim_{n\to\infty}\{s_n(x)\} = \frac{a_1(x)}{1-q(x)}.$$

Jak vypadá množina proměnné x, na níž řada konverguje stejnoměrně, resp. lokálně stejnoměrně (pojem lokální stejnoměrné konvergence viz příklad 1.22), záleží na tvaru funkce $q(x)$.

Typickým jednoduchým příkladem geometrické řady funkcí je

$$a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (x-a)^{n-1} = a_1 \left(1 + (x-a) + (x-a)^2 + \cdots + (x-1)^n + \cdots\right), \quad a,\, a_1 \in \mathbf{R}.$$

Tato řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $(a-1+\delta,\, a+1-\delta)$, $0<\delta<1$, a konverguje lokálně stejnoměrně na $(a-1,\, a+1)$.

Nyní, jak jinak, uvedeme Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro řady funkcí. Jeho důkaz provádět nebudeme, jen bychom reprodukovali důkaz pro posloupnosti funkcí aplikovaný na posloupnost částečných součtů řady.

Věta 1.10 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro řady funkcí): *Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in \mathcal{F}_D$, je stejnoměrně konvergentní na D právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$, všechna $m \in \mathbf{N}$, a pro každý bod $x \in D$ platí $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$.*

Uvědomte si, že uvnitř absolutní hodnoty je rozdíl $s_{m+n}(x) - s_n(x)$. Nejde tedy o nic jiného, než o Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro posloupnost částečných součtů řady.

V následujícím textu již pouze shrneme další kritéria stejnoměrné konvergence a vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad funkcí v podstatě jako důsledky odpovídajících kritérií a vlastností posloupností funkcí. Vždyť přece řady jsou určeny posloupnostmi svých částečných součtů. Některá kritéria a vlastnosti jsou obdobou kritérií a vlastností řad čísel.

Doplníme ještě jeden potřebný pojem, jímž je stejnoměrná ohraničenost posloupnosti funkcí. Posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ se nazývá *stejnoměrně ohraničená* na D, jestliže existuje číslo M tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in D$ platí $|f_n(x)| \le M$. Všimněme si, že je požadována existence čísla M *univerzálního* pro celou množinu D.

Věta 1.11 (Stejnoměrná konvergence řad — kritéria a vlastnosti): *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je řada funkcí definovaných na D, $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ posloupnost jejích částečných součtů.*

Nechť (předpoklady)	***Pak (tvrzení)***

(zobecněné) Weierstrassovo kritérium

pro jistou posloupnost $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *nezáporných funkcí je* $|f_n(x)| \le g_n(x)$ *na* D *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně a absolutně na* D

Abelovo kritérium

$\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je monotónní a stejnoměrně ohraničená na* D, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D

Dirichletovo kritérium

$\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je na* D *monotónní a konverguje na* D *stejnoměrně k nulové funkci,* $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je stejnoměrně ohraničená na* D $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D

spojitost součtu řady

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D *k součtu* $s(x)$ *a všechny* $f_n(x)$ *jsou spojité na* D $\Longrightarrow$ $s(x)$ *je spojitá funkce na* D

integrování člen po členu

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* $[a,b]$ *k součtu* $s(x)$ *a všechny funkce* $f_n(x)$ *jsou integrabilní na* $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $s(x)$ *je integrabilní na* $[a,b]$,

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

derivování člen po členu		
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje na otevřeném D k součtu $s(x)$, všechny $f_n(x)$ mají derivaci na D a $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ konverguje stejnoměrně na D*	$\Longrightarrow$	*$s(x)$ má derivaci na D a platí $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$*

První vlastnost je důležitá pro prošetřování stejnoměrné konvergence řad. Zejména je účinná v případech, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselná řada s nezápornými členy. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ se nazývá *majoranta*. Pro praktické výpočty jsou nejdůležitější poslední dvě vlastnosti. Představují možnost takzvaného *integrování, resp. derivování „člen po členu“*. Význam tohoto názvu je jasný. Platí-li předpoklady, je zaručen integrál, resp. derivace funkce představující součet řady, není však nutné řadu napřed sečíst a pak výsledek integrovat, resp. derivovat. Lze to udělat v opačném pořadí, tj. napřed integrovat, resp. derivovat jednotlivé členy řady a teprve potom sečíst. Tento postup bývá často snazší a rychlejší. Pozor však na plnění předpokladů (opět jsou zde v roli souboru postačujících podmínek).

Než přistoupíme k ukázkám aplikace věty 1.11, dokažme alespoň první tvrzení, které, jak jsme již konstatovali, je velice důležité pro teoretické úvahy. Důkazy ostatních tvrzení jsou přímými důsledky již dokázaných vět o posloupnostech funkcí aplikovaných na posloupnosti částečných součtů řad. Ponecháme je pro cvičení.

K důkazu použijeme Cauchyova–Bolzanova kritéria pro řady. Počítejme:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \le |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+m}(x)| \le$$
$$\le g_{n+1}(x) + g_{n+2}(x) + \cdots + g_{n+m}(x).$$

Protože řada (nezáporných funkcí) $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ splňuje Cauchyovo–Bolzanovo kritérium stejnoměrné konvergence, vyplývá z předchozí nerovnosti, že toho kritérium splňuje jak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Příklad 1.30: Použití majoranty

Kritérium s majorantou je velice užitečné, chceme-li pouze zjistit stejnoměrnou konvergenci řady a nevadí nám, že nestanovíme její součet. I když kritérium je obecné v tom smyslu, že členy majoranty mohou být také funkce, porovnáváme zadanou řadu nejčastěji s číselnou řadou s nezápornými členy, jejíž konvergenci máme ověřenou pomocí některého z kritérií věty 1.7. Například snadno zjistíme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konverguje pro každé $k \in \mathbf{R}$, $k > 1$ (úloha 13 a) ve cvičení 8.1.3). Pro řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \quad \text{pro} \quad k > 1$$

z toho vyplývá, že konverguje stejnoměrně a absolutně na intervalu $[-1, 1]$, neboť

$$\text{pro} \quad |x| < 1 \quad \text{je} \quad \left|\frac{x_n}{n^k}\right| \le \frac{1}{n^k}.$$

Obdobně můžeme rozhodnout o řadách typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n(x)}{n^k}, \quad k > 1,$$

pro případ, že posloupnost funkcí $\{h_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je na jistém intervalu D stejnoměrně ohraničená, tj. existuje číslo M tak, že $|h_n(x)| \le M$ na D pro všechna n. Například řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^k}, \quad \text{nebo i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin f_n(x)}{n^k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos f_n(x)}{n^k},$$

kde $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je libovolná posloupnost funkcí na $\mathbf{R}$, konvergují stejnoměrně a absolutně na $\mathbf{R}$.

Příklad 1.31: Jak sčítat pomocí integrování

Název tohoto příkladu je jistou nadsázkou. Příklad však ukazuje, jak nahradit sečtení řady, kterou přímo sečíst neumíme, sečtením řady, pro kterou je to snadné. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

je stejnoměrně a absolutně konvergentní na intervalu $(-1+\delta,\, 1-\delta)$, $0 < \delta < 1$. Majorantou na tomto intervalu je totiž například geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$. Jak ale součet naší řady určit? Přímo, tedy výpočtem posloupnosti částečných součtů a její limity, to dost dobře nejde. Hned nás ale napadne, že derivací n-tého členu řady $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$ je funkce $f_n'(x) = (-1)^n x^{n-1}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1}$ je řadou geometrickou s prvním členem -1 a kvocientem $q = -x$ a na intervalu $(-1+\delta,\, 1-\delta)$ je stejnoměrně konvergentní. Proto například pro libovolné $x \in (0,\, 1-\delta)$ můžeme podle předposledního tvrzení věty 1.11 psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \xi^{n-1} \,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \xi^{n-1} \,\mathrm{d}\xi = -\int_0^x \frac{1}{1+\xi} \,\mathrm{d}\xi = \ln \frac{1}{1+x}.$$

Zadanou řadu jsme tedy „sečetli“ tak, že jsme zintegrovali známý vzorec pro součet geometrické řady, jejíž členy byly derivacemi členů řady zadané.

Některý čtenář možná dostal na základě výsledku nápad: Kdybychom dosadili $x = 1$, získali bychom alternující číselnou řadu z příkladu 1.12. Dost jsme se s ní natrápili a ani jsme zatím její součet nezjistili. Nyní se zdá, že je roven $(-\ln 2)$. Je to však správně? Odpověď se sice později ukáže jako správná, ale v tuto chvíli ji ještě vyslovit nemůžeme. Tvrzení o integrování člen po členu je formulováno pro stejnoměrně konvergentní řady. Geometrická řada však není stejnoměrně konvergentní na intervalu, který by obsahoval bod $x = 1$. O tom jsme se přesvědčili v příkladech 1.21 a 1.22. Integrování člen po členu nemůžeme proto pro interval $[0,\, 1]$ použít. Na druhé straně je stejnoměrná konvergence podmínkou postačující, a tedy v některých případech možná zbytečně silnou. Takže se nakonec může ukázat, a také ukáže, že součet řady skutečně je $(-\ln 2)$. Budeme k tomu však potřebovat jiné tvrzení, které k dispozici zatím nemáme.

Příklad 1.32: Jak sčítat pomocí derivování

V předchozím příkladu jsme výpočet součtu řady, která byla tvořena integrály členů geometrické řady, nahradili integrálem součtu této geometrické řady. V tomto příkladu nepůjde o integrování, nýbrž o derivování řady. Pro členy řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2},$$

kterou bychom nepochybně sčítali velice nesnadno, platí $f_n(x) = (x^n)''$. Řada konverguje stejnoměrně na intervalu $D = (-1+\delta,\, 1-\delta)$ (její majorantou je například řada $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(1-\delta)^{n-2}$). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ konverguje na intervalu $D = (-1+\delta,\, 1-\delta)$ rovněž stejnoměrně (najděte nějakou majorantu), totéž lze konstatovat o geometrické řadě $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (příklad 1.29). Podle věty 1.11 tedy můžeme počítat takto:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^n) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Získali jsme tedy dvojím použitím věty 1.11 součet řady, kterou jsme neuměli sčítat.

Pozn.: Nekonečnou řadu jsme definovali jako součet jejích členů $f_n(x)$ v mezích $n = 1$ do ∞. V předchozím příkladu se najednou objevilo sčítání od $n = 0$ do ∞. Je však zřejmé, že takové „přeindexování" není významné, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(x), \text{ nebo i obecněji, např. } \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+k-1}(x).$$

K podobnému kroku je potřebné, resp. vhodné, občas přistoupit, nebudeme jej však v dalším již podrobněji komentovat.

1.2.3 Cvičení

1. Proveďte důkaz věty 1.8 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí).
   Návod: Předpokládejte, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje na D stejnoměrně a její limitu označte $f(x)$. Použijte nerovnosti

   $$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |(f_{n+m}(x) - f(x)) - (f_n(x) - f(x))| \leq$$

   $$\leq |f_{n+m}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)|,$$

   platné pro všechna $x \in D$ a všechna $n,\, m \in \mathbf{N}$. Dále aplikujte definici stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí.
   V druhé části důkazu předpokládejte, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít index N tak, aby pro všechna $n > N$, všechna $m \in \mathbf{N}$ a co je podstatné, všechna $x \in D$ platilo $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Všechny *číselné* posloupnosti $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbf{N}}$ pro *kterékoli konkrétně zvolené* $a \in D$ jsou tedy podle věty 1.3 konvergentní. Jak vytvoříte funkci $f(x)$ pomocí limit $L(a) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(a)\}$ pro $a \in D$ těchto číselných posloupností? Pro dokončení důkazu si uvědomte, že index N je podle předpokladu univerzální pro D, tj. stejný pro všechny body $x \in D$.

2. Dokažte, že posloupnost funkcí $\left\{x \operatorname{arctg} nx - \frac{1}{2n} \ln\left(1+n^2x^2\right)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ je rostoucí pro $x \neq 0$.
Návod: Nahraďte n spojitou proměnnou y a vypočtěte derivaci vzniklé funkce podle proměnné y. Mělo by se ukázat, že tato derivace je kladná pro všechna $x \neq 0$ a všechna y.

***3.** Dokažte první a třetí tvrzení věty 1.9.
Návod: Dokažte nejprve třetí tvrzení, první je jeho důsledkem pro spojité funkce, tj. pro $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$. Při důkazu třetí vlastnosti postupujte například takto: Označte $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$ a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Je třeba dokázat, že $\lim_{n\to\infty}\{L_n\} = \lim_{x\to a} f(x)$. Nejprve ukažte, že posloupnost limit $\{L_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje, pak vyvstane otázka, co je její limitou. Prošetřete tedy výraz $|L_{n+m} - L_n|$, abyste zjistili, zda je cauchyovská, tj. zda k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ a všechna $m \in \mathbf{N}$ platí nerovnost

$$|L_{n+m} - L_n| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |\lim_{x\to a}[f_{n+m}(x) - f_n(x)]| < \varepsilon.$$

Zvolte $0 < \delta < \varepsilon$. Posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je na $D \setminus \{a\}$ stejnoměrně konvergentní, a proto je cauchyovská. Pro všechna n od jistého indexu N výše, pro všechna $m \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in D \setminus \{a\}$ tedy platí $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \delta$. Tato nerovnost se zachová i pro limity s tím, že přejde v nerovnost neostrou (zdůvodněte). Tedy $|L_{n+m} - L_n| \leq \delta < \varepsilon$. (Právě s vědomím toho, že budeme přecházet k limitám, jsme Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ aplikovali na volbu $\delta < \varepsilon$.) Posloupnost $\{L_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní. Označte její limitu, kterou zatím neznáte, jako L. Abyste pak dokázali, že touto limitou je zrovna číslo $\lim_{x\to a} f(x)$, počítejte (úprava je poněkud „umělá“, ale vede rychle k cíli):

$$\begin{aligned}|f(x) - L| &= |[f_n(x) - L_n] + [L_n - L] - [f_n(x) - f(x)]| \leq \\ &\leq |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| + |f_n(x) - f(x)|.\end{aligned}$$

Z předpokladů je zřejmé, že každý ze sčítanců posledního výrazu lze v jistém okolí bodu a a od jistého indexu N výše „libovolně zmenšit“ tak, aby výsledek byl menší než předem zvolené $\varepsilon > 0$. Proveďte úvahu pořádně.

4. Dokažte následující tvrzení: Nechť pro posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ definovanou na D a číselnou posloupnost $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ platí pro všechna $x \in D$ a všechna n nerovnosti $c_n \geq 0$, $f_n(x) \leq c_n$. Nechť řada $\sum_{n=1}^{n} c_n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně a absolutně na D.
Návod: Použijte první vlastnost z věty 1.11.

5. Dokažte následující tvrzení: Nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je stejnoměrně ohraničená na D a nechť $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je monotónní posloupnost čísel, která konverguje k nule. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na D.
Návod: Použijte třetí vlastnost z věty 1.11.

6. Dokažte poslední tři tvrzení věty 1.11.
Návod: Aplikujte na posloupnost částečných součtů řady odpovídající tvrzení věty 1.9.

7. Určete obor konvergence u následujících řad funkcí:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n^3 x}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+1)}$.

8. Uveďte příklady posloupností funkcí, které jsou na nějakém intervalu D bodově konvergentní, ale nejsou stejnoměrně konvergentní. Uveďte příklady konvergentní posloupnosti spojitých funkcí, jejichž limitou není funkce spojitá.

9. Rozhodněte, zda řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|\cos nx|}}{n(n+1)}$ jsou stejnoměrně konvergentní na $\mathbf{R}$.

***10.** Určete limitu následujících posloupností funkcí na zadaném intervalu a rozhodněte, zda konvergují stejnoměrně:

a) $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ na $D = [0, \frac{1}{2})$,

b) $\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ na $D = (1, \infty)$,

c) $\left\{\frac{1}{n(x-1)}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ na $D = [2, \infty)$.

d) $\{x^{-3n} - x^{-n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ na $D = [1, \infty)$.

Návod: Využijte jako fakt tvrzení, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$ na intervalu D právě tehdy, když pro číselnou posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, kde $a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\}$ platí, že $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$.

11. Rozhodněte, zda je řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{n+1}}$ stejnoměrně konvergentní na intervalu $[2, \infty)$, a určete

$$\int_2^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{n+1}}\, \mathrm{d}x.$$

1.3 Zvlášť užitečné řady funkcí

Oba předchozí odstavce, 8.1 a 8.2, byly přípravou na to, co je podstatné, či dokonce neopomenutelné, pro praktické počítání se dvěma speciálními typy řad funkcí, které se ve fyzice, v aplikovaných matematických disciplínách či v technických oborech vyskytují nejčastěji. Jedná se o řady mocninné a řady Fourierovy. Protože jsme obecné vlastnosti posloupností a řad funkcí postavili na dobrý základ teorie posloupností a řad číselných a vše jsme probrali poměrně důkladně, bude další postup směřovat již přímo k formulacím potřebných důsledků a k praktickým ukázkám vlastností obou zmíněných typů řad.

1.3.1 Mocninná řada

Mocninná řada se poprvé objevila v prvním dílu v odstavci 2.2.3, znovu jsme ji připomněli v úvodu této kapitoly.

Mocninnou řadou se středem v bodě a a koeficienty c_n rozumíme nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n, \quad a,\, c_n \in \mathbf{R}. \tag{1.11}$$

Řada se „trochu podobá“ řadě geometrické, kterou máme prozkoumanou ze všech stran. Přesněji řečeno, geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_1(x-a)^n$ z příkladu 1.29 je jejím speciálním případem, pro který jsou všechny koeficienty rovny a_1. V tomto příkladu jsme viděli, že pro konvergenci řady byla podstatná hodnota kvocientu $q(x) = x - a$, nikoli hodnota koeficientu a_1. Zjistíme nyní, zda závěry o konvergenci geometrické řady lze nějak zobecnit na libovolnou mocninnou řadu.

Je jasné, že mocninná řada konverguje ve svém středu. Pro $x = a$ je totiž součtem obecně nenulového členu c_0 a samých nul. Předpokládejme, že existuje ještě jeden další bod b, v němž řada konverguje. Pro určitost vezměme $b > a$ (pro opačnou nerovnost se úvahy vedou obdobně). Než se pustíme do dalšího počítání, uvědomme si vlastnosti posloupnosti $\{c_n(b-a)^n\}_{n\in\mathbf{N}}$, které plynou z konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(b-a)^n$. Především je $\lim_{n\to\infty} c_n(b-a)^n = 0$ (nutná podmínka konvergence řady — důsledek věty 1.4). Konvergentní posloupnost je však ohraničená (věta 1.2). Označme M libovolnou horní závoru množiny $\{|c_n(b-a)^n|\}_{n\in\mathbf{N}}$. Platí $M > 0$. Zvolme nyní libovolný bod $x \in (a,\, b)$ a počítejme chvíli.

$$|c_n\,(x-a)^n| = |c_n\,(b-a)^n| \left|\frac{x-a}{b-a}\right|^n < M\xi^n, \quad \xi = \left|\frac{x-a}{b-a}\right|, \quad \xi < 1.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} M\xi^n$ konverguje. Je to geometrická řada s kvocientem $\xi < 1$. Je to zjevně také majoranta „naší“ řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$ pro všechna $x \in (a,\, b)$. Proto naše řada konverguje nejen v bodě x, ale podle věty 1.11 (první vlastnost) také absolutně a stejnoměrně na téže množině, na níž konverguje stejnoměrně její majoranta. Touto množinou je každý otevřený interval $(2a-b+\delta,\, b-\delta)$, $0 < \delta < (b-a)$. Na intervalu $(2a-b,\, b)$ konverguje řada absolutně a lokálně stejnoměrně.

Příklad 1.33: „Přídavek“ k předchozímu výsledku

Nemůžeme právě získaný výsledek ještě zesílit? Vždyť o řadě $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$ víme, že v bodě b konverguje. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(b-a)^n$ je číselná, nezávisí na x. Můžeme ji tedy chápat jako řadu konstantních funkcí, která konverguje stejnoměrně pro všechna x. Pro naše úvahy bude důležitá její stejnoměrná konvergence na (uzavřeném) intervalu $[a,\, b]$. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(b-a)^n \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n .$$

Členy řady jsou na intervalu $[a,\, b]$ součiny členů stejnoměrně konvergentní řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(b-a)^n$ a členů nerostoucí stejnoměrně ohraničené posloupnosti $\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n\right\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$. Řada na tomto intervalu konverguje stejnoměrně podle druhého tvrzení věty 1.11 (Abelovo kritérium). Celkově tedy dospíváme k závěru, že řada konverguje absolutně a stejnoměrně na intervalu $[2a-b+\delta,\, b]$ pro libovolné δ, $0 < \delta < b-a$.

A nemůžeme závěr o stejnoměrné konvergenci rozšířit až do bodu $2a-b$? Vždyť přece tento bod je položen symetricky k bodu b vzhledem k bodu a. Nemělo by pro něj platit totéž, co pro bod b? K tomuto závěru nemáme oprávnění. Zatímco o bodu b jsme předpokládali, že v něm číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(b-a)^n$ konverguje, o chování řady v bodě $2b-a$, tj. řady $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\,c_n(b-a)^n$ obecně nic nevíme. Zaručit proto můžeme absolutní a lokálně stejnoměrnou konvergenci na intervalu $(2a-b,\, b]$ a absolutní a stejnoměrnou konvergenci na intervalu $[2a-b+\delta,\, b]$ pro libovolně malé $\delta > 0$.

Získali jsme velmi užitečnou a silnou informaci o konvergenci mocninné řady. Je z ní vidět, že mezi středem řady a a dalším bodem b, v němž řada také konverguje, je její konvergence zajištěna bez ohledu na koeficienty, a to dokonce absolutní a (lokálně) stejnoměrná! Jak to vypadá „za bodem“ b, zatím nevíme. Očekáváme však, že to, „jak daleko“ můžeme bod b „oddalovat“, aby řada ještě konvergovala, již na koeficientech nějak záviset musí — co kdyby třeba rychle rostly s narůstající hodnotou n, například $a_n = 2^n$, nebo dokonce n^n? Tento problém řeší následující věta.

Věta 1.12 (Poloměr konvergence): *Předpokládejme, že pro posloupnost koeficientů řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ platí $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\} = L$, kde $L \in [0,\infty) \cup \{+\infty\}$. Označme $R = L^{-1}$. Pak řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v intervalu $(a-R,\, a+R)$ a na množině $(-\infty,\, a-R) \cup (a+R,\, \infty)$ nekonverguje, tj. diverguje, nebo osciluje. V intervalu $a-R+\delta,\, a+R-\delta$ konverguje řada absolutně a stejnoměrně pro libovolně malé $\delta > 0$.*

Číslo R se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady.

K tomu, abychom větu dokázali, stačí již jen prověřit intervaly bodové konvergence odpovídající řady z absolutních hodnot. Stejnoměrná, resp. lokální stejnoměrná konvergence pak totiž vyplývá z výsledku, který jsme odvodili předtím. Zvolme tedy pevně $x = b$ a hledejme podmínku pro b, která zajistí konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n\,(b-a)^n|$. Použijeme limitního odmocninového kritéria (jde o řadu s nezápornými členy $a_n \geq 0$).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |b-a|\,\sqrt[n]{|c_n|} < 1 \implies |b-a| < \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Pozn. 1: V případech, kdy $L = +\infty$, nebo $L = 0$, platí pro výpočet hodnoty R tabulka pro počítání s nekonečny z příkladu 1.7. Je-li $R = 0$, je množina $(a-R,\, a+R)$ prázdná, řada tedy diverguje pro všechna $x \in \mathbf{R}$ s výjimkou svého středu. Naopak pro $R = \infty$ řada konverguje (absolutně a stejnoměrně) na $\mathbf{R}$. V bodech $x = a \pm R$, $R \neq 0,\, +\infty$, nelze o konvergenci podle věty 1.12 rozhodnout. Tyto body je nutné prověřit zvlášť.

Pozn. 2: Větu lze zobecnit na situace, kdy limita L neexistuje. Pak je $R^{-1} = \limsup\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ (pojem limity superior je zaveden v dodatku E prvního dílu).

Připomeňme ještě, že z vlastností stejnoměrné konvergence posloupností funkcí a řad vyplývá, že naše mocninná řada je absolutně a stejnoměrně konvergentní na každém uzavřeném podintervalu intervalu $(a-R,\, a+R)$. Nejčastěji se pracuje s intervalem symetrickým, tj. $[a-r,\, a+r]$, $0 < r < R$.

Na mocninné řady lze v intervalu jejich konvergence vztáhnout všechna tvrzení věty 1.11. Jejich použití je obzvláště jednoduché a přímočaré proto, že všechny členy mocninné řady jsou spojité funkce, které mají (dokonce spojitou) derivaci a (samozřejmě spojitou) primitivní funkci. Součtem mocninné řady je tedy spojitá funkce. Mocninné řady lze derivovat a integrovat člen po členu, a to dokonce vícekrát po sobě. Získáváme tak jeden z nejpraktičtějších důsledků jejich stejnoměrné konvergence. Konkrétně to uvidíme na příkladech.

Příklad 1.34: Derivování mocninné řady člen po členu

Jediné, co zbývá k vyjasnění při derivování mocninné řady člen po členu, je obor konvergence derivované řady. Uvažme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad \text{tj.} \quad f_n(x) = c_n (x-a)^n \implies$$

$$f_n'(x) = n c_n (x-a)^{n-1} \text{ pro } n \geq 1, \quad f_0'(x) = 0.$$

Poloměr konvergence této řady je $R = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|})^{-1}$, pokud limita existuje. Koeficienty derivované řady jsou nc_n a vzhledem k tomu, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (ověřte výpočtem), je poloměr konvergence derivované řady také R. Na každém intervalu $[a-r,\, a+r] \subset (a-R,\, a+R)$ jsou tedy splněny požadavky věty 8.11 a řadu lze derivovat člen po členu. Platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \, (x-a)^{n-1}.$$

Příklad 1.35: Integrování mocninné řady člen po členu

Situace je obdobná jako při derivaci. Všechny členy mocninné řady mají primitivní funkci a řada utvořená z těchto primitivních funkcí má stejný poloměr konvergence jako původní řada. Konkrétně

$$\int c_n \, (x-a)^n \, \mathrm{d}x = \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Platí

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + \text{konst.}$$

Příklad 1.36: Součet řady v krajních bodech

V příkladu 1.31 jsme nedokázali odpovědět na otázku, zda součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, která by vznikla dosazením $x = 1$ do řady

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = -\ln(1+x)$$

na intervalu $D = (-1,\, 1)$, kde řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně, je roven $(-\ln 2)$. Nemohli jsme přece „jen tak“ rozšířit platnost předchozího vztahu na krajní bod $x = 1$ intervalu $\bar{D} = [-1,\, 1]$. Žádná z vět, se kterými jsme do té doby pracovali, možnost takového rozšíření nezajišťovala. V příkladu 1.12 jsme sice zjistili, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje k nějaké hodnotě $s = s(1)$, ale nepřišli jsme na to, k jaké. Abychom mohli tvrdit, že $s(1) = -\ln 2$, museli bychom ukázat, že funkce $s(x)$ vyjadřující součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ je spojitá zleva v bodě $x = 1$. Spojitost součtu řady je zajišťována například její stejnoměrnou konvergencí (čtvrté tvrzení věty 1.11). Nyní se stačí vrátit k příkladu 1.33 a položit v něm $b = 1$. Z konvergence mocninné řady v bodě b totiž vyplynula, použitím Abelova kritéria, její stejnoměrná konvergence na intervalu $[2a - b + \delta,\, b]$.

Výsledek příkladu 1.36 pro případ mocninných řad lze zobecnit: Je-li R, $0 < R < \infty$, poloměr konvergence mocninné řady (1.11) a konverguje-li odpovídající číselná řada pro $b = a + R$, pak součet řady $s(x)$ je funkce spojitá v bodě $a + R$ zleva.

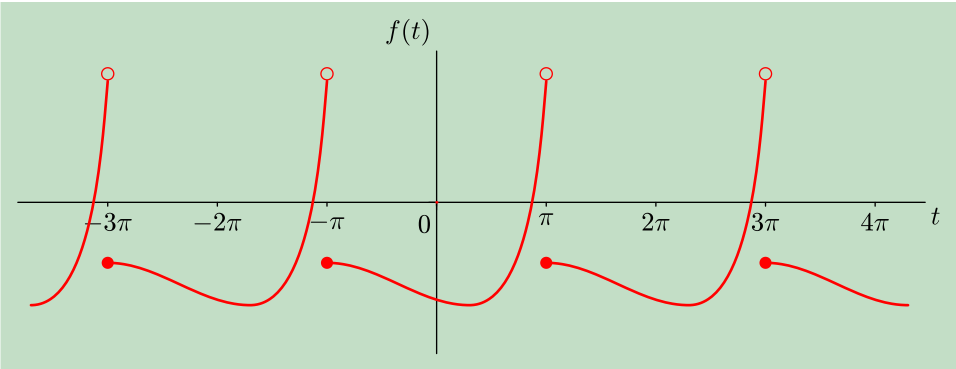
1.3.2 Fourierova řada

V úvodu jsme avizovali, že obecnou periodickou funkci s periodou řekněme T bude možné rozepsat jako superpozici harmonických, tj. sinových a kosinových signálů o úhlových frekvencích, které jsou násobky základní frekvence $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Nyní postavíme řešení tohoto problému na poněkud pevnější teoretický základ.

Především oživíme znalosti z algebry. V kapitole 6 jsme definovali skalární součin ve vektorovém prostoru a v odstavci 6.1.3 jsme jej použili k ortogonálnímu promítání na vektorové podprostory. Pro naše další úvahy si uvědomme, že funkce tvoří vzhledem k operacím sčítání $h(t) = f(t) + g(t)$, $t \in D_f \cap D_g$, a násobení číslem $q(t) = \alpha p(t)$, $t \in D_p$, $\alpha \in \mathbf{R}$, rovněž vektorový prostor. Problémem jeho dimenze, která může být dokonce až nespočetná, se zabývat do detailů nebudeme. Budeme také uvažovat pouze o takových vektorových podprostorech tohoto prostoru, které budou tvořeny funkcemi potřebných vlastností (jsou například spojité, mají na určitém intervalu derivace potřebných řádů, jsou integrabilní, apod.). Tuto charakteristiku samozřejmě vždy včas vymezíme. Pro tuto chvíli uvažujme o vektorovém podprostoru funkcí integrabilních na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pomocí nich můžeme definovat funkce periodické s periodou 2π na celé reálné ose například tak, že základní motiv z intervalu $[-\pi, \pi)$ opakujeme na intervalech $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, tj.

$$\mathbf{R} \ni t \longrightarrow f(t) \in \mathbf{R}, \quad f(t + 2k\pi) = f(t), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{1.12}$$

Příklad takového opakování je na obrázku 1.16.



Obr. 1.16 Vytvoření periodické funkce opakováním motivu.

Pozn.: Pro názornost fyzikálních aplikací jsme nezávisle proměnnou označili t (obvykle čas), v principu může být samozřejmě označena jakkoli.

Definujme skalární součin funkcí způsobem, který je pro funkce obvyklý a použili jsme jej již v kapitole 6 pro polynomy (příklady **??**, **??**, **??**, **??** a **??**),

$$(f,\, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Prověřovat axiomy skalárního součinu ani nemusíme, leda pro zopakování toho, co jsme mnohokrát prováděli v kapitole 6.

Příklad 1.37: Jiná periodicita

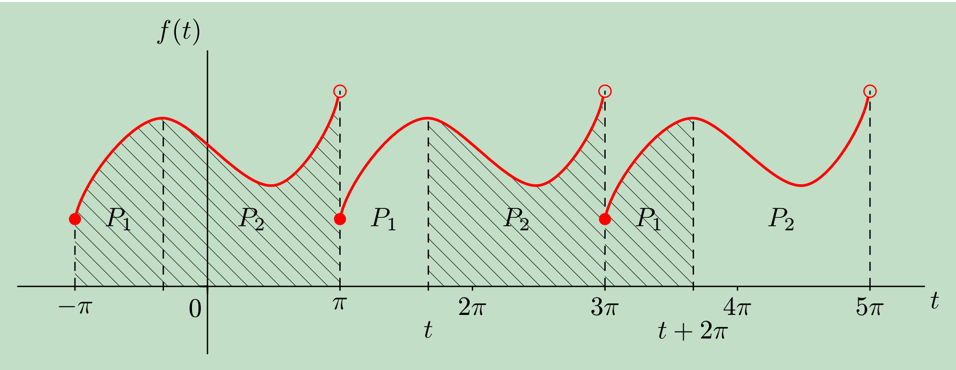
Samozřejmě, že periodicita funkce může být obecná, nemusí vždy jít o periodu 2π. Dejme tomu, že základní motiv je definován na intervalu $[a,\, a+T]$, perioda je T. Vhodnou substitucí $t \to \alpha\tau + \beta$ lze přejít k funkci definované na $[-\pi,\, \pi]$ a rozšířit ji na funkci periodickou s periodou 2π. Čísla α a β je třeba zvolit tak, aby funkce $g(\tau) = f(\alpha\tau + \beta)$ byla definována na intervalu $[-\pi,\, \pi]$. Řešíme tedy soustavu $\alpha(-\pi) + \beta = a$, $\alpha\pi + \beta = a + T$. Odtud $\alpha = \frac{T}{2\pi}$, $\beta = a + \frac{T}{2}$. Pak $g(\tau) = f(\frac{T}{2\pi}\tau + a + \frac{T}{2})$.

Příklad 1.38: Zachování integrálu přes periodu

Předpokládejme, že jsme periodickou funkci s periodou 2π získali opakováním základního motivu definovaného na intervalu $[-\pi,\, \pi)$. Předpokládali jsme, že původní funkce je integrabilní na $[-\pi,\, \pi]$. Je vcelku samozřejmé, že platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi+2k\pi}^{\pi+2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Jak ale dopadne integrál v mezích $[t,\, t+2\pi]$, zvolíme-li t libovolně? Názorná představa a obrázek 1.17 říkají,



Obr. 1.17 K příkladu 1.38.

že výsledek bude opět stejný. Ukážeme to:

$$\int_{t}^{t+2\pi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{t}^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{\pi}^{t+2\pi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_t^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{-\pi}^{t} f(\zeta + 2\pi)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

V druhém integrálu jsme nejprve použili substituce $\xi = \zeta + 2\pi$ a poté periodicity funkce, $f(\zeta + 2\pi) = f(\zeta)$.

Všimněme si nyní ve vektorovém prostoru funkcí vektorového podprostoru $\mathcal{T}_{2N+1}$ generovaného goniometrickými funkcemi

$$\{1,\, \cos t, \sin t,\, \cos 2t,\, \sin 2t,\, \ldots,\, \cos Nt,\, \sin Nt\}. \tag{1.13}$$

Tyto funkce jsou lineárně nezávislé, dimenze vektorového podprostoru $\mathcal{T}_{2N+1}$ je tedy $2N+1$. Libovolný prvek $\mathcal{T}_{2N+1}$

$$T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,,\ \ a_0,\, a_n,\, b_n \in \mathbf{R},\ \ n \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, N\}, \tag{1.14}$$

se nazývá *trigonometrický polynom*. Pokud připustíme libovolné $n \in \mathbf{N}$, budou všechny funkce typu (1.13) generovat vektorový podprostor $\mathcal{T}$ nekonečné, ale spočetné dimenze a jako jeho obecný prvek dostaneme nekonečnou *trigonometrickou řadu*

$$T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,,\ \ a_0,\, a_n,\, b_n \in \mathbf{R},\ \ n \in \mathbf{N}. \tag{1.15}$$

A už je nastolena otázka konvergence, resp. stejnoměrné konvergence takových řad. Zůstaňme však ještě u algebry a problému nalezení ortonormální báze vektorového podprostoru $\mathcal{T}_{2N+1}$, resp. $\mathcal{T}$. Určíme skalární součiny funkcí tvořících bázi (1.13):

$$(\cos nt,\, \cos kt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos{(n-k)t} + \cos{(n+k)t}\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin{(n-k)t}}{n-k} + \frac{\sin{(n+k)t}}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{pro} \quad n \neq k,$$

$$(\cos nt,\, \cos nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nt}{2}\,\mathrm{d}t = \pi,$$

$$(\sin nt,\, \sin kt) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos{(n-k)t} - \cos{(n+k)t}\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-k)t}{n-k}-\frac{\sin(n+k)t}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0 \quad \text{pro} \quad n\neq k,$$

$$(\sin nt,\ \sin nt)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nt\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nt}{2}\,\mathrm{d}t=\pi,$$

$$(\sin nt,\ \cos kt)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\cos kt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(n-k)t+\sin(n+k)t\right)\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n-k)t}{n-k}-\frac{\cos(n+k)t}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$(1,\ \cos nt)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t=0,\quad (1,\ \sin nt)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t=0,\quad (1,\ 1)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

Funkce (1.13) tedy tvoří pro libovolné N ortogonální bázi a pro získání báze ortonormální stačí už jen normovat:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t,\ \dots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\ \dots\right\}. \tag{1.16}$$

Nechť $f(t)$ je libovolná funkce integrabilní na $[-\pi,\ \pi]$. Pak můžeme snadno určit její ortogonální průmět $f_{\mathcal{T}}(t)$ do vektorového podprostoru $\mathcal{T}_{2N+1}$, resp. $\mathcal{T}$ pomocí procedur uvedených v kapitole 6. Hledáme tento průmět ve tvaru trigonometrické řady

$$f_{\mathcal{T}}=a_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right),\ \text{resp.}\ f_{\mathcal{T}}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right).$$

Vyjádříme postupně skalární součiny funkce $f_{\mathcal{T}}(t)$ s prvky báze a uvědomíme si, že pro libovolný prvek $e(t)\in\mathcal{T}_{2N+1}$, resp. $e(t)\in\mathcal{T}$ je $(f_{\mathcal{T}}(t),\ e(t))=(f(t),\ e(t))$ (kapitola 6). Pro koeficienty $a_0,\ a_n,\ b_n,\ n\in\mathbf{N}$, dostaneme

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

Čísla a_0, a_n, b_n určená vztahy (1.17) se nazývají *Fourierovy koeficienty* funkce $f(t)$, ortogonální průmět $f_{\mathcal{T}}(t)$ funkce $f(t)$ na podprostor $\mathcal{T}$ se nazývá *Fourierova řada* funkce $f(t)$.

Součet Fourierovy řady funkce $f(t)$ ovšem ještě nemusí být této funkci roven.

Bez důkazu uvedeme důležitou větu, která obsahuje postačující podmínky pro to, aby Fourierova řada funkce $f(t)$ k této funkci také konvergovala. Označme $f(t^+) = \lim_{\xi \to t^+} f(\xi)$, resp. $f(t^-) = \lim_{\xi \to t^-} f(\xi)$.

Věta 1.13 (Dirichletova): *Nechť funkce $f(t)$ je po částech spojitá a po částech monotónní na intervalu $[-\pi,\, \pi]$. Pak její Fourierova řada $f_{\mathcal{T}}(t)$ na tomto intervalu konverguje*

- *k součtu $f(t)$ pro každé $t \in (-\pi,\, \pi)$, je-li t bodem spojitosti funkce $f(t)$,*
- *k součtu $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$ pro každé $t \in (-\pi,\, \pi)$, je-li t bodem nespojitosti funkce $f(t)$,*
- *k součtu $\frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)]$ v bodech $t = -\pi$ a $t = \pi$.*

Připomeňme, že funkce se nazývá na daném intervalu *po částech spojitá*, je-li nespojitá nejvýše v konečném počtu bodů tohoto intervalu. Předpokládáme však, že v těchto bodech existují obě jednostranné limity funkce, tj. její limita zprava i zleva. Jestliže Fourierova řada konverguje na intervalu $[-\pi,\, \pi]$, pak je díky výsledku příkladu 1.38 zřejmé, že konverguje na libovolném intervalu $[t,\, t + 2\pi]$, a tedy i na $\mathbf{R}$. Všechny funkce tvořící Fourierovu řadu jsou periodické se společnou periodou 2π. Součtem konvergentní Fourierovy řady s definičním oborem $\mathbf{R}$ je periodická funkce s periodou 2π.

Příklad 1.39: Důležité důsledky

Z vlastností ortogonálního průmětu plyne nerovnost

$$(f_{\mathcal{T}}(t),\, f_{\mathcal{T}}(t)) \leq (f(t),\, f(t)) \implies$$

$$\implies \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,,\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right) \leq (f(t),\, f(t)) \implies$$

$$\implies \left(2|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \right) \leq \frac{1}{\pi}(f(t),\, f(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, \mathrm{d}t.$$

Poslední výsledek se nazývá *Besselova nerovnost*. Uvědomme si, že řada na levé straně této nerovnosti konverguje. Jedná se totiž o řadu s nezápornými členy, jejíž posloupnost částečných součtů je samozřejmě neklesající a je shora omezená hodnotou skalárního součinu $(f(t),\, f(t))$ (poslední vlastnost věty 1.2). Z konvergence řady samozřejmě plynou vztahy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (nutná podmínka konvergence řady). Rovnost, zvaná *Parsevalova rovnost*, nastává právě tehdy, když funkce $f(t)$ leží ve vektorovém podprostoru $\mathcal{T}$. Ortogonální průmět vektoru do podprostoru, v němž vektor leží, je totiž tomuto vektoru přímo roven, průmět na ortogonální doplněk k $\mathcal{T}$ je nulový. Parsevalova rovnost tedy platí právě tehdy, když Fourierova řada funkce $f(t)$ konverguje k $f(t)$.

Příklad 1.40: Fourierovy řady sudých a lichých funkcí

Předpokládejme, že funkce $f(t)$ je sudá, tj. $f(t) = f(-t)$ pro všechna $t \in [-\pi, \pi]$. Pro její Fourierovy koeficienty pak platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt\,\mathrm{d}t, \quad b_n = 0.$$

Pro lichou funkci, $f(t) = -f(-t)$ pro všechna $t \in [-\pi, \pi]$, naopak platí

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt\,\mathrm{d}t.$$

Konkrétních příkladů rozvoje zadaných funkcí do jejich Fourierových řad si všimneme v následujícím odstavci. V závěru tohoto odstavce se však ještě zamysleme nad Dirichletovou větou (věta 1.13), která uvádí do souvislosti funkci $f(t)$ definovanou na intervalu $[-\pi, \pi]$ a funkci $f_{\mathcal{T}}(t)$, k níž konverguje Fourierova řada funkce $f(t)$. Připomeňme také, že funkce $f_{\mathcal{T}}(t)$ je dokonce definována na $\mathbf{R}$, neboť všechny funkce tvořící Fourierovu řadu jsou periodické se společnou periodou. Předpokládejme, že výchozí funkce $f(t)$ je na intervalu $[-\pi, \pi]$ spojitá (v bodě $-\pi$, resp. π jde o spojitost zprava, resp. zleva). Funkce $f_{\mathcal{T}}(t)$ však spojitá být nemusí. Podle Dirichletovy věty je totiž její hodnota v bodech $t = -\pi$ a $t = \pi$ průměrem hodnot $f(-\pi^+)$ a $f(\pi^-)$. Pokud jsou odlišné, jsou body $t = -\pi$ a $t = \pi$, a tedy i všechny body tvaru $t = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, body nespojitosti funkce $f_{\mathcal{T}}(t)$. Jedna z takových situací je na obrázku 1.20. Fourierova řada je však tvořena jen samými spojitými funkcemi. Je-li její součet nespojitá funkce, znamená to, že konvergence řady k jejímu součtu není stejnoměrná (čtvrté tvrzení věty 1.11). Pozor! Ze spojitosti součtu řady obráceně *neplyne* stejnoměrná konvergence. Pokud je funkce $f(t)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ spojitá, po částech monotónní a platí-li $f(-\pi) = f(\pi)$, pak podle Dirichletovy věty nevzniknou žádné body nespojitosti ani u funkce $f_{\mathcal{T}}(t)$ a bude platit $f_{\mathcal{T}}(t) = f(t)$.

1.3.3 Několik opravdu užitečných aplikací

V tomto odstavci si všimneme použití mocninných a Fourierových řad pro praktické účely. Půjde zejména o numerické odhady, vyjádření funkcí řadami třeba při řešení diferenciálních rovnic či použití řad pro fyzikální a technické aplikace.

Pokud jde o mocninné řady, samozřejmě nás možnosti jejich použití ihned napadnou. Stačí si vzpomnět na Taylorovu řadu v prvním dílu. Tam jsme ovšem uvažovali poněkud nepřesně. Pojmů konvergence a stejnoměrná konvergence jsme se jen dotkli, aniž bychom je rozebírali podrobněji. „Rozklad“ funkce $f(x)$ v okolí daného bodu a do Taylorovy řady jsme psali jaksi automaticky a nezabývali jsme se ani tím, pro jaké hodnoty proměnné x řada konverguje, ani tím, zda v případě její konvergence se její součet opravdu rovná funkci $f(x)$. Nyní, se znalostí problematiky konvergence řad, již dokážeme na mnohé otázky odpovědět lépe.

Uvažujme o funkci $f(x)$, která má v bodě $x \in D$ vlastní derivace všech řádů. (Příklady takových funkcí jsou po ruce — polynomy, funkce $\sin x$, $\cos x$, exponenciála, racionální lomené funkce s případnými omezujícími požadavky, atd.)

Má-li funkce $f(x)$ v bodě $x \in D$ vlastní derivace všech řádů, pak mocninnou řadu

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.18}$$

nazýváme *Taylorovou řadou funkce $f(x)$ v bodě a.* Je-li $a = 0$, hovoříme o *Maclaurinově řadě.*

A hned se nabízejí otázky: Za jakých podmínek lze funkci $f(x)$ takovou řadou vyjádřit? Kolik prvních členů řady je třeba sečíst, abychom funkční hodnotu $f(x)$ získali s předepsanou přesností? Zda a kdy je vůbec možné omezit se na konečný počet členů?

Především je třeba předchozí otázky přeformulovat „pořádně“ matematicky. Co to vlastně znamená „vyjádřit“ funkci $f(x)$ pomocí Taylorovy řady? Jde o posouzení možnosti napsat rovnítko mezi funkci $f(x)$ a její Taylorovu řadu, tj. mocninnou řadu s koeficienty odvozenými z funkce $f(x)$. Taková rovnost není samozřejmostí — nemusí totiž obecně platit. Abychom ji mohli napsat, musíme mít vyřešen problém, za jakých podmínek a na jakém oboru řada (1.18) konverguje (rozumí se samo sebou absolutně a stejnoměrně) a za jakých podmínek je její součet $s(x)$ roven funkci $f(x)$.

Příklad 1.41: Kdy se funkce nerovná své Taylorově řadě

Takovým jednoduchým příkladem je třeba funkce $f(x) = \ln(1+x)$, jejímž zápisem (až na znaménko) ve tvaru mocninné řady jsme se již zabývali v příkladu 1.36. Na intervalu $(-1, 1]$, kde řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ konverguje, je její součet roven uvedené funkci. Uvažme, jak vypadá Taylorova řada funkce $f(x)$ v bodě $a = 0$. Pro derivace platí

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(0) &= \ln(1+x)\big|_{x=0} = 0,\\
f^{(1)}(0) &= \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0} = 1,\\
f^{(2)}(0) &= -\left.\frac{1}{(1+x)^2}\right|_{x=0} = -1,\\
f^{(3)}(0) &= \left.\frac{2}{(1+x)^3}\right|_{x=0} = 2,\\
\cdots\cdots &\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}\left.\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\right|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!,\\
\cdots\cdots &\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ je Taylorovou řadou funkce $\ln(1+x)$ v bodě $a = 0$. Pro $x \in (-1, 1]$ řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně a její součet se rovná funkci $f(x) = \ln(1+x)$. Pro $x \in (1, \infty)$ je funkce $f(x) =$

$= \ln(1+x)$ stále definována, ale řada nekonverguje. Proto na intervalu $(1, \infty)$ nelze mezi funkci $\ln(1+x)$ a její Taylorovu řadu psát rovnítko.

Zapišme Taylorovu řadu funkce $f(x)$ jako součet prvních n členů a jakéhosi „zbytku",

$$T_f(x) = s_n(x) + z_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{1.19}$$

Jak jsme již řekli, je třeba formulovat podmínky, kdy posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ řady $T_f(x)$ konverguje na nějakém oboru D k funkci $f(x)$. K dalším úvahám potřebujeme znát přímou souvislost funkce $f(x)$ s posloupností částečných součtů její Taylorovy řady. Taková souvislost je obsažena v následujícím tvrzení náležejícím k základům analýzy funkcí jedné proměnné. Uvedeme je bez důkazu, lze jej najít ve všech standardních učebnicích.

Věta 1.14 (Taylorova): *Nechť funkce $f(x)$ má na otevřeném intervalu D vlastní derivace do řádu $n+1$ včetně pro jisté $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$. Nechť $[a, x] \subset D$. Pak existuje bod $\xi \in (a, x)$ tak, že platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + Z_n(x), \quad Z_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{1.20}$$

Výraz $Z_n(x)$ se nazývá *Taylorův zbytek* a fakticky určuje, jaké chyby se dopustíme, aproximujeme-li funkci $f(x)$ pomocí prvních n členů nekonečné Taylorovy řady, tj. jejím n-tým částečným součtem. Je také hned vidět, že posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ Taylorovy řady funkce $f(x)$ konverguje k funkci $f(x)$ právě tehdy, když posloupnost Taylorových zbytků $\{Z_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ konverguje k nule. Skutečně,

$$\lim_{n\to\infty}\{Z_n(x)\} = \lim_{n\to\infty}(\{f(x) - s_n(x)\}) = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\{s_n(x)\} = f(x).$$

Pak také konverguje k nule posloupnost zbytků $\{z_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ ve vztahu (1.19). (Uvědomte si, že $\{Z_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ a $\{z_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ jsou obecně dvě různě definované posloupnosti.)

Posloupnost Taylorových zbytků nám umožnila formulovat vztah mezi funkcí $f(x)$ a její Taylorovou řadou. Jako nevýhoda se může jevit skutečnost, že neznáme čísla ξ. Pro každý Taylorův zbytek je totiž číslo ξ obecně jiné. Jisté je pouze to, že leží v intervalu (a, x). Vzhledem k tomu, že Taylorovy zbytky používáme pouze k odhadům a nevyčíslujeme je, není tato nevýhoda příliš na závadu.

Příklad 1.42: Odhady pomocí Taylorových zbytků

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má na otevřeném intervalu D derivace všech řádů. Nechť $[a, x] \subset D$.

Taylorův zbytek pak můžeme vyjádřit pro libovolné n a provést odhad jeho absolutní hodnoty

$$|Z_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|, \quad \xi \in (a,\, x).$$

Hledáme obor proměnné x, pro který je $\lim_{n\to 0}\{Z_n(x)\} = 0$. Studujme řadu těchto zbytků z hlediska absolutní konvergence:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Z_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi_n)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |x-a|^{n+1},$$

kde $\xi_n \in (a,\, x)$. Například za situace, kdy je posloupnost $\{f^{(n)}(x)\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{\mathbf{0}\}}$ stejnoměrně ohraničená, tj. kdy existuje takové číslo M, pro které $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$ pro všechna $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a všechna $x \in D$, lze psát

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Z_n(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Řada na pravé straně je za těchto okolností majorantou řady Taylorových zbytků. Tato majoranta konverguje pro všechna $x \in D$ (přesvědčte se o tom použitím některého kritéria pro řady s nezápornými členy). Pak konverguje i řada absolutních hodnot zbytků a limita posloupnosti zbytků je tedy nulová (text za větou 1.4).

V následujících příkladech uvedeme ukázky Taylorových řad známých funkcí.

Příklad 1.43: Polynom n-tého stupně

Polynom n-tého stupně

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n, \quad A_0,\, \ldots,\, A_n \in \mathbf{R},\;\; A_n \ne 0,$$

představuje přímo svou Taylorovu řadu se středem v bodě $a = 0$. Členy posloupnosti jejích částečných součtů se od n-tého členu již nemění, Taylorovy zbytky jsou nulové počínaje n-tým. Řada konverguje k $f(x)$ na $\mathbf{R}$ stejnoměrně. Jak ale vypadá Taylorova řada téhož polynomu s jiným středem? Pro k-tou derivaci funkce $f(x)$ v bodě a platí

$$f^{(k)}(a) = k!A_k + (k+1)\cdots 2A_{k+1}\, a + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1)\, A_n\, a^{n-k} =$$

$$= \sum_{m=k}^{n} \frac{m!}{(m-k)!} A_m\, a^{m-k}, \quad 0 \le k \le n.$$

Taylorova řada funkce $f(x)$ se středem v bodě a konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na $\mathbf{R}$ a platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} A_m\, a^{m-k} \right) (x-a)^k.$$

Příklad 1.44: Exponenciální a logaritmická funkce

Nejjednodušší exponenciální funkcí je samozřejmě $f(x) = \exp x$. Její derivace v bodě a jsou $f^{(n)}(a) = \exp a$ a příslušná Taylorova řada má tvar

$$T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^a}{n!}(x-a)^n. \tag{1.21}$$

Tato řada konverguje na $\mathbf{R}$ k funkci $f(x) = \exp x$. Skutečně, pro její poloměr konvergence platí (podílové kritérium — úloha 1 cvičení 8.3.4)

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\mathrm{e}^a}{(n+1)!} \right| : \left| \frac{\mathrm{e}^a}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Zvolme libovolný interval $[-r, r]$, $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$. Posloupnost derivací funkce $f(x)$ je na něm stejnoměrně ohraničená, například hodnotou $M = \exp r$. Limita posloupnosti Taylorových zbytků je tedy nulová. Pro praktické použití je nejobvyklejší Taylorova řada se středem v nule,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots. \tag{1.22}$$

Nyní spočtěme derivace funkce $f(x) = \ln x$ v obecném bodě $a > 0$. Platí

$$f^{(1)}(a) = \frac{1}{a}, \quad f^{(2)}(a) = -\frac{1}{a^2}, \quad f^{(3)}(a) = \frac{2}{a^3}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}.$$

Taylorova řada logaritmické funkce je

$$\ln x = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{na^n}(x-a)^n, \tag{1.23}$$

její poloměr konvergence vypočteme ze vztahu

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{na^n} \right|} = \frac{1}{a}.$$

Interval stejnoměrné konvergence řady k funkci $\ln x$ je tedy $(0,\, 2a)$. Pro naši oblíbenou funkci $\ln(1+x)$ a pro $a = 0$ dostaneme Taylorovu řadu ve tvaru

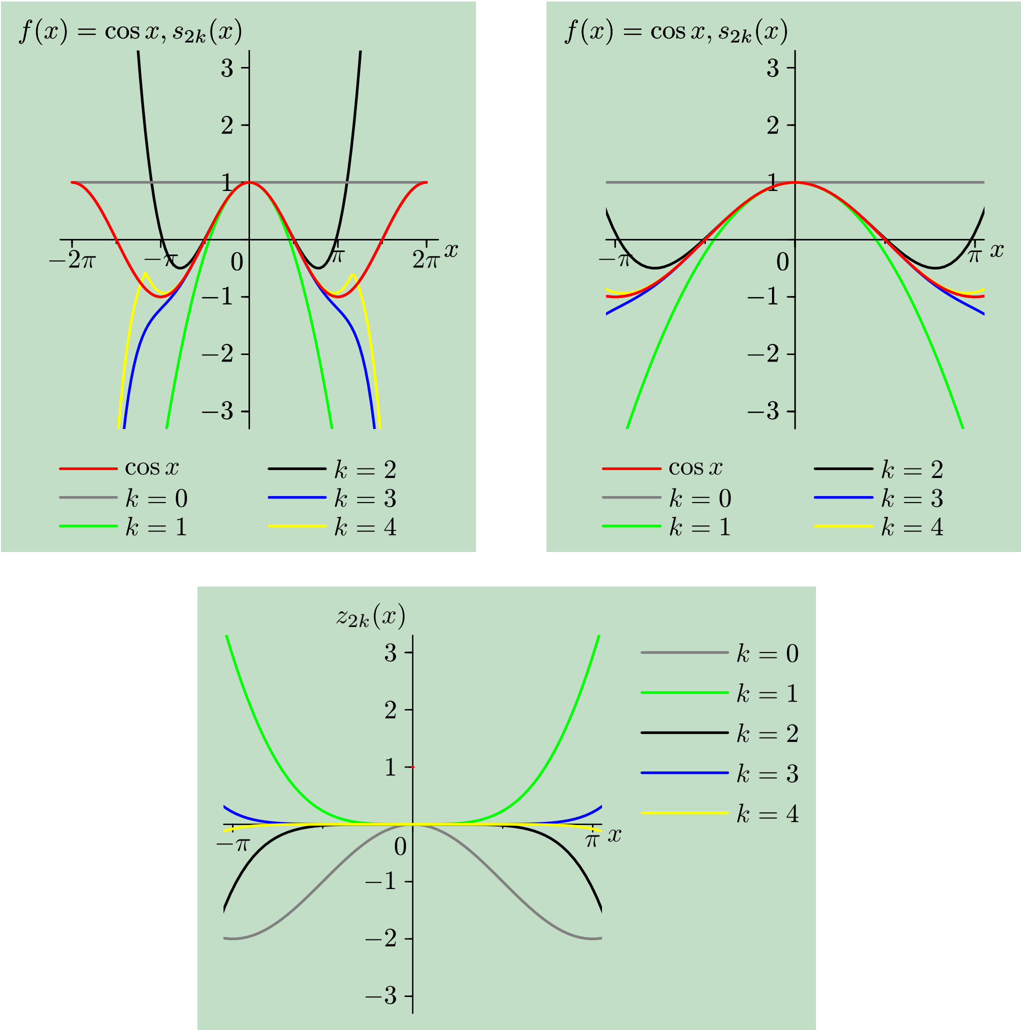
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots. \tag{1.24}$$

Interval konvergence této řady je $(-1,\, 1)$. Na něm řada konverguje stejnoměrně k funkci $\ln(1+x)$.

Abychom si byli jisti, že rovnost (1.24) platí, musíme dokázat, že funkce $f(x) = \ln(1+x)$ je na intervalu $(-1, 1)$ opravdu součtem řady na pravé straně. Vybavíme-li si ovšem příklad 1.31, uvědomíme si, že jsme důkaz již provedli integrací člen po členu. (Řada v příkladu 1.31 se od té nynější liší pouze opačným znaménkem členů.) Důkaz vztahu (1.24) můžeme provést také tak, že zjistíme limitu posloupnosti Taylorových zbytků

$$Z_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}.$$

Pro $\xi \in [0, x]$, $0 < x < 1$ je $|Z_n(x)| \le \frac{1}{n+1}$. Proto je limita posloupnosti Taylorových zbytků nulová.



Obr. 1.18 Prvních 5 členů a zbytků Maclaurinovy řady funkce $\cos x$.

Příklad 1.45: Goniometrické funkce $\sin x$ a $\cos x$

Goniometrické funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$ mají derivace všech řádů na $\mathbf{R}$ a jejich posloupnosti jsou na $\mathbf{R}$ stejnoměrně ohraničené. Platí totiž

$$|f^{(2k)}(a)| = |(-1)^k \sin a| \le 1, \quad |f^{(2k+1)}(a)| = |(-1)^k \cos a| \le 1,$$

$$|g^{(2k)}(a)| = |(-1)^k \cos a| \le 1, \quad |g^{(2k+1)}(a)| = |(-1)^{k+1} \sin a| \le 1.$$

Taylorovy řady v bodech a, resp. 0 mají tvar

$$\sin x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{\sin a}{(2k)!} \cdot (x-a)^{2k} + (-1)^k \frac{\cos a}{(2k+1)!} \cdot (x-a)^{2k+1} \right], \tag{1.25}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k \frac{\cos a}{(2k)!}\cdot(x-a)^{2k} + (-1)^{k+1}\frac{\sin a}{(2k+1)!}\cdot(x-a)^{2k+1}\right],$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots. \tag{1.26}$$

Na obrázku 1.18 je znázorněna funkce $f(x) = \cos x$ (červeně) a prvních 5 částečných součtů $s_{2k}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, její Maclaurinovy řady (Taylorova řada se středem v bodě $a = 0$). Znázorněny jsou také zbytky $z_{2k}(x) = \cos x - s_{2k}(x)$ pro výše uvedené hodnoty k. Připomeňme jako samozřejmost, že x je v obloukové míře (v radiánech).

Další příklady výpočtu Taylorovy řady funkce budeme řešit ve cvičení.

Příklad 1.46: Přibližné určení funkčních hodnot

Často je třeba určit hodnotu funkce $f(x)$ pouze přibližně, avšak s předem zadanou přesností, leží-li bod x v blízkém okolí bodu a, v němž funkční hodnotu $f(a)$ známe. Lze použít Taylorovy řady funkce se středem v bodě a a vzít v úvahu tolik jejích prvních členů, aby bylo žádané přesnosti dosaženo. K tomu je třeba provést odhad „zanedbávaného" zbytku řady. Pro odhady máme k dispozici vztahy, které jsme odvodili v příkladu 1.18.

V příkladu 2.51 v prvním dílu jsme se zabývali matematickým kyvadlem a prováděli jsme poněkud intuitivně odhad chyby, jaké se dopustíme, nahradíme-li v pohybové rovnici kyvadla funkci úhlové výchylky $\sin\varphi$ přímo úhlovou výchylkou φ. Taková náhrada nám totiž umožnila snadno vyřešit pohybovou rovnici kyvadla. Nyní máme k dispozici aparát nekonečných řad, který pomůže provádět takové odhady kvalifikovaněji. Řešit můžeme dvě základní úlohy.

(a) Kolik členů Maclaurinovy řady funkce $\sin x$ musíme vzít v úvahu, abychom ji pro zadanou malou výchylku φ vyjádřili s předepsanou přesností?

(b) Jak „malá" musí být výchylka φ, aby první člen Maclaurinovy řady funkce $\sin\varphi$ vyjadřoval funkční hodnotu s předepsanou přesností?

Maclaurinova řada (1.26) funkce sinus je řadou alternující. Proto k řešení obou úkolů můžeme využít výsledku uvedeného v závěru příkladu 1.18. Podle něj platí pro n-tý zbytek řady odhad $|z_n(\varphi)| < a_{n+1}$. V úloze (a) tedy řešíme nerovnost $|a_{2k+1}| \le \varepsilon$, resp. $\frac{|a_{2k+1}|}{|s_{2k-1}|} \le \varrho$, je-li ε, resp. ϱ předepsaná absolutní, resp. relativní chyba, tj.

$$\frac{|\varphi^{2k+1}|}{(2k+1)!} \le \varepsilon, \quad \text{resp.} \quad \left|\frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{\varphi^{2m+1}}{(2m+1)!}}\right| \le \varrho.$$

Pro odpověď na otázku (b) řešíme nerovnost $\frac{|\varphi^3|}{3!} \le \varepsilon$, resp. $\frac{|\varphi^2|}{3!} \le \varrho$. Pro $\varrho = 0{,}001$ dostáváme $\varphi \le \sqrt{0{,}006} \doteq 0{,}078\,\text{rad} \doteq 4{,}44^\circ$. Až tedy v návodu k fyzikálním praktiku narazíte na „definici", že malými výchylkami rozumíme výchylky do pěti stupňů, hned budete mít jasno, o čem je řeč — o náhradě sinu úhlu úhlem s přesností jednoho promile.

Všimněme si však podrobněji otázky (a), ta je přece jen zajímavější. Požadujeme-li například stanovení hodnoty $\sin\varphi$ pro $\varphi = 12^\circ$ s přesností na pět platných míst, činí povolená absolutní chyba $\varepsilon = 5\cdot 10^{-6}$. Přesná hodnota zapsaná s přesností na 6 platných míst je $\sin 12^{\circ} \doteq 0{,}207\,911_7$, relativní chyba je tedy $\varrho \doteq 2{,}4 \cdot 10^{-5} \doteq$ $\doteq 3 \cdot 10^{-5}$. Následující tabulka uvádí absolutní hodnoty $|a_{2k+1}|$ prvních členů řady $\sin 12^{\circ}$ pro $k = 0$ až $k = 5$ s přesností na dvě platná místa a zaokrouhlením nahoru (jde o odhad absolutní chyby), součty s_{2k-1} s přesností na 6 platných míst se standardním zaokrouhlením a podíly $\frac{|a_{2k+1}|}{|s_{2k-1}|}$ opět s přesností na dvě platná místa a zaokrouhlením nahoru (odhad relativní chyby).

k	0	1	2	3	4	5
$\lvert a_{2k+1}\rvert$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$3{,}6 \cdot 10^{-6}$	$3{,}6 \cdot 10^{-9}$	$2{,}3 \cdot 10^{-12}$	$8{,}6 \cdot 10^{-16}$
s_{2k+1}	$0{,}209\,429_5$	$0{,}207\,908_3$	$0{,}207\,911_7$	$0{,}207\,911_7$	$0{,}207\,911_7$	$0{,}207\,911_7$
$\frac{\lvert a_{2k+1}\rvert}{\lvert s_{2k-1}\rvert}$	nedef.	$7{,}4 \cdot 10^{-3}$	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$	$1{,}1 \cdot 10^{-11}$	$4{,}1 \cdot 10^{-15}$

Z tabulky je vidět, že pro docílení požadované přesnosti $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ musíme vzít v úvahu částečný součet řady odpovídající číslu $k = 1$, tj. první dva členy. Přibližná hodnota s přesností na pět platných míst je $\sin 12^{\circ} \doteq 0{,}207\,91$. Odpovídající relativní chyba je menší než $2 \cdot 10^{-5}$. Zdá se, že Maclaurinova řada funkce sinus konverguje rychle. Zkusme ještě sestavit podobnou tabulku pro úhel nikoli malý, například $\varphi = 60^{\circ}$ (přepočtěte jej na radiány). Tabulková hodnota s přesností na 6 platných míst je $\sin 60^{\circ} \doteq 0{,}866\,025_4$, „povolená“ relativní chyba je $5{,}8 \cdot 10^{-6}$.

k	0	1	2	3	4	5
$\lvert a_{2k+1}\rvert$	$1{,}1 \cdot 10^{0}$	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	$2{,}8 \cdot 10^{-4}$	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$	$4{,}2 \cdot 10^{-8}$
s_{2k+1}	$1{,}047\,197_6$	$0{,}855\,800_8$	$0{,}866\,295_3$	$0{,}866\,021_3$	$0{,}866\,025_5$	$0{,}866\,025_4$
$\frac{\lvert a_{2k+1}\rvert}{\lvert s_{2k-1}\rvert}$	nedef.	$1{,}9 \cdot 10^{-1}$	$1{,}3 \cdot 10^{-2}$	$3{,}2 \cdot 10^{-4}$	$4{,}9 \cdot 10^{-6}$	$4{,}8 \cdot 10^{-8}$

Pro požadovanou přesnost určení sinu úhlu 60° stačí vzít první čtyři členy řady — konvergence je to tedy opravdu rychlá! Hledaná hodnota je $\sin 60^{\circ} \doteq 0{,}866\,02$.

Příklad 1.47: Přibližná integrace

V prvním dílu jsme v příkladu 3.23 narazili na Laplaceův integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi},$$

v příkladu 3.24 jsme pomocí něj odvodili Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul v ideálním plynu

$$f_M(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

které udává hustotu pravděpodobnosti rozdělení velikostí rychlostí molekul ideálního plynu. Problém výpočtů spočíval v tom, že ačkoli k funkcím typu $\exp(-x^2)$, resp. $x^2 \exp(-x^2)$ existují na $\mathbf{R}$ funkce primitivní (neboť výchozí funkce jsou spojité), nelze je vyjádřit nějakým vzorcem pomocí elementárních funkcí. Integrály v nekonečných mezích jsme mohli spočítat na základě znalosti Laplaceova integrálu, ale ani ten jsme neuměli určit přímou integrací právě pro nemožnost vhodného zápisu primitivní funkce. A co teprve kdybychom měli určit integrály v obecných mezích? V některých případech nám mohou pomoci řady. Důležitá pro tyto výpočty je stejnoměrná konvergence řad a z ní vyplývající možnost jejich integrace člen po členu. Předpokládejme, že bychom potřebovali určit, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná molekula plynu má velikost rychlosti v intervalu $[0,\, v]$. Tato pravděpodobnost je dána integrálem

$$P([0,\, v]) = \int_0^v f_M(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^v \xi^2 \exp\left(-\frac{m\xi^2}{2kT}\right)\mathrm{d}\xi.$$

Pokud je hodnota v blízká nule, může se ukázat užitečným rozvinout integrand v Maclaurinovu řadu a aproximovat jej konečným počtem prvních členů určeným tak, aby výsledek byl získán s požadovanou přesností. Pokusme se o takový postup. Označme pro zjednodušení $m/2kT = K$ a proveďme substituci $t = \xi\sqrt{K}$. Dostáváme

$$P([0,\, v]) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{v\sqrt{K}} t^2 \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{v\sqrt{K}} t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{v\sqrt{K}} t^{2n}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(v\sqrt{K})^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{(v\sqrt{K})^3}{3\cdot 0!} - \frac{(v\sqrt{K})^5}{5\cdot 1!} + \frac{(v\sqrt{K})^7}{7\cdot 2!} - \frac{(v\sqrt{K})^9}{9\cdot 3!} + \frac{(v\sqrt{K})^{11}}{11\cdot 4!} - \cdots\right).$$

Pro rychlosti splňující podmínku $v\sqrt{K} \le 1$, tj. $v \le \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, dostáváme opět alternující řadu s klesajícími absolutními hodnotami členů. Její n-tý zbytek lze shora odhadnout $(n+1)$-tým členem. Připomeňme, že „mezní hodnota“ rychlosti, pro kterou lze na takový odhad spoléhat, představuje nejpravděpodobnější rychlost molekul $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ — příklad 3.24 v prvním dílu. (Například pro molekuly kyslíku O_2 o hmotnosti $m = 32\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg a pokojovou teplotu $T = 300\,\mathrm{K}$ má hodnotu $v_p \doteq 3{,}95\cdot 10^2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.) Pro $v = v_p$ má řada tvar

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{3\cdot 0!} - \frac{1}{5\cdot 1!} + \frac{1}{7\cdot 2!} - \frac{1}{9\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 4!} - \cdots\right).$$

Následující tabulka uvádí velikosti prvních sedmi ($n = 1, 2, \ldots, 7$) členů předchozí řady zaokrouhlených na 4 platná místa nahoru a n-tý částečný součet řady zaokrouhlený podle standardních pravidel rovněž na 4 platná místa. Velikosti členů pro $n = 2$ až $n = 7$ představují odhad (absolutní) chyby aproximace pravděpodobnosti $P([0,\, v_p])$ prvním až šestým částečným součtem.

n	1	2	3	4	5	6	7
$\lvert a_n\rvert$	0,752 3	0,451 4	0,161 2	0,041 8	0,008 6	0,001 5	0,000 3
s_n	0,752 3	0,300 9	0,462 1	0,420 3	0,428 9	0,427 4	0,427 6

Příklad 1.48: Řady a diferenciální rovnice

V kapitole 7 jsme se zabývali řešením různých typů obyčejných diferenciálních rovnic. Existují však i složitější typy rovnic, na které popsané metody nejsou použitelné. Řešení některých speciálních rovnic třeba ani nemusí jít vyjádřit nějakým jednoduchým vzorcem. V takových situacích může pomoci hledat řešení ve tvaru nekonečné řady a popřípadě je aproximovat konečným počtem členů. Abychom ukázali, že nekonečné řady mohou opravdu představovat funkční a účinný způsob pro hledání řešení rovnic, použijeme je pro řešení diferenciální rovnice, se kterou jsme již dobře obeznámeni. Jedná se o pohybovou rovnici lineárního harmonického oscilátoru

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Zadejme rovnou počáteční podmínky třeba ve tvaru $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$. Předem tedy víme, že řešením této počáteční úlohy bude funkce $x(t) = x_0 \cos \omega t$. Hledejme je ale jako nekonečnou řadu s neznámými koeficienty c_n a se středem v bodě $t_0 = 0$, v němž jsou zadány počáteční podmínky,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \implies \dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} \implies \ddot{x}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}.$$

Samozřejmě předpokládáme, že s řadou pracujeme na oboru konvergence a že s ní tedy můžeme provádět operace člen po členu. Z počáteční podmínky kladené na polohu oscilátoru v čase $t = 0$ dostáváme $c_0 = x_0$, podmínka nulové počáteční rychlosti dává $c_1 = 0$. Dosazením do pohybové rovnice a s uvážením hodnot $c_0 = x_0$, $c_1 = 0$ dostaneme

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + \omega^2 \left(x_0 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n t^n \right) = 0$$

a po přeindexování

$$(\omega^2 x_0 + 2c_2) + 6c_3 t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\omega^2 c_n + (n+2)(n+1) c_{n+2} \right] t^n = 0.$$

Součet mocninné řady je roven identicky nulové funkci právě tehdy, jsou-li všechny koeficienty řady nulové, tj.

$$c_2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x_0, \quad c_3 = 0, \quad c_{n+2} = -\frac{\omega^2 c_n}{(n+2)(n+1)} \quad \text{pro} \quad n \geq 2.$$

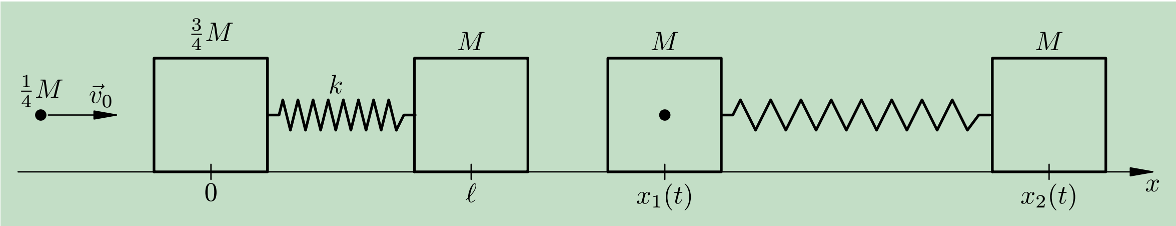
Odtud dostáváme

$$c_{2k+1} = 0, \quad c_{2k} = (-1)^k \frac{\omega^{2k} x_0}{(2k)!}, \quad \text{pro} \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad x(t) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!}.$$

Z příkladu 1.45 již ale víme, že získaná řada je Maclaurinovou řadou funkce $x_0 \cos \omega t$. Použitím mocninné řady jsme tak dospěli k očekávanému řešení počáteční úlohy.

Příklad 1.49: A ještě jeden fyzikální ...

Na vodorovné podložce leží dvě kostky spojené pružinou o tuhosti k, jejíž délka v nenapjatém stavu je ℓ. Kostka vlevo má hmotnost $\frac{3}{4}M$, kostka vpravo hmotnost M. Zleva přiletí střela o hmotnosti $\frac{1}{4}M$ vodorovnou rychlostí $\vec{v}_0$ a pevně uvázne v levé kostce. Situace je znázorněna na obrázku 1.19. Úkolem je popsat pohyb obou kostek po srážce. Sestavíme pohybové rovnice a budeme je řešit pomocí nekonečných řad. Než začneme počítat, proveďme jednoduchou fyzikální úvahu, která nám potom pomůže ověřit správnost řešení. Celková hybnost soustavy všech tří těles před srážkou je $\vec{p} = \frac{1}{4}M\vec{v}_0$. Je dána nenulovou hybností střely (kostky mají před srážkou



Obr. 1.19 Kostky na pružině — k příkladu 1.49.

nulovou hybnost). Střed hmotnosti soustavy se před srážkou pohybuje rychlostí $\vec{V} = \frac{\vec{p}}{2M} = \frac{1}{8}\vec{v}_0$, která zůstane zachována i po srážce. Tato skutečnost by měla být později patrná i z nalezeného řešení pohybových rovnic soustavy. Dále by z řešení mělo vyplynout, že kostky budou kmitat kolem středu hmotnosti soustavy se shodnými amplitudami (po spojení střely s levou kostkou mají obě kostky stejnou hmotnost).

Přistupme nyní k podrobnému řešení. Okamžitou polohu levé kostky na ose x označme $x_1(t)$, poloha pravé kostky bude $x_2(t)$. Okamžitá délka pružiny je $x_2(t)-x_1(t)$, okamžitá změna její délky je $\Delta\ell(t) = x_2(t)-x_1(t)-\ell$. Po srážce na sebe kostky působí prostřednictvím pružiny silami o velikosti $F_p = k|\Delta\ell|$. Pohybové rovnice kostek jsou

$$M\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell), \quad M\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell).$$

Vyloučíme například x_2 z první rovnice a dostaneme pro x_1 rovnici čtvrtého řádu

$$x_1^{(4)}(t) + \omega^2 x_1^{(2)}(t) = 0, \quad \omega^2 = \frac{2k}{M}. \tag{1.27}$$

Určíme ještě počáteční podmínky pro tuto rovnici čtvrtého řádu. V okamžiku srážky, $t = 0$, platí $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \ell$ (pružina není napjatá), $\dot{x}_1(0) = \frac{1}{4}v_0$ (hybnost střely před srážkou je rovna hybnosti střely spojené s levou kostkou bezprostředně po srážce, $\frac{1}{4}Mv_0 = (\frac{1}{4}M + \frac{3}{4}M)\dot{x}_1(0)$), $\dot{x}_2(0) = 0$ (pravá kostka je bezprostředně po srážce ještě v klidu). Z těchto podmínek a z pohybových rovnic dostáváme $x_1^{(2)}(0) = 0$, $x_1^{(3)}(0) = -\frac{kv_0}{4M} = -\frac{\omega^2 v_0}{8}$. Hledejme nyní řešení $x_1(t)$ ve tvaru nekonečné řady

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad \dot{x}_1(t) = x_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}, \quad \ddot{x}_1(t) = x_1^{(2)}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2},$$

$$x_1^{(3)}(t) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) c_n t^{n-3}, \quad x_1^{(4)}(t) = \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) c_n t^{n-4}.$$

Použitím počátečních podmínek vychází $c_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{4}v_0$, $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{kv_0}{24M} = -\frac{\omega^2}{3!}\frac{v_0}{8}$. Dosazením do rovnice (1.27) pro neznámou funkci $x_1(t)$ a pak vhodným přeindexováním dostaneme

$$\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) c_n t^{n-4} + \omega^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} = 0 \implies$$

$$\implies \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)(n)(n-1) c_{n+2} + \omega^2 n(n-1) c_n\right] t^{n-2} = 0.$$

Aby se hodnoty tohoto polynomu rovnaly nule pro všechna t, musí být nulové všechny koeficienty. Odtud

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} + \omega^2 c_n = 0, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Protože je $c_2 = 0$, jsou nulové i všechny další koeficienty se sudými indexy. Koeficienty s lichými indexy získáme pomocí c_3. Nakonec dostáváme

$$c_{2k} = 0, \quad c_{2k+1} = (-1)^k \frac{\omega^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{v_0}{8\omega}, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$x_1(t) = \frac{v_0 t}{8} + \frac{v_0}{8}\sqrt{\frac{M}{2k}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\omega t)^{2k+1} = \frac{v_0 t}{8} + \frac{v_0}{8}\sqrt{\frac{M}{2k}} \sin \omega t.$$

(Při předchozí úpravě jsme člen $c_1 t = \frac{v_0 t}{4}$ museli „rozpůlit“, neboť pouze jeho část $\frac{v_0 t}{8}$ představuje lineární člen v řadě vyjadřující $\frac{v_0}{8}\sqrt{\frac{M}{2k}} \sin \omega t$.) Z první pohybové rovnice pak získáme $x_2(t)$. Výsledek je

$$x_1(t) = \frac{v_0 t}{8} + \frac{v_0}{8}\sqrt{\frac{M}{2k}} \sin \omega t, \quad x_2(t) = \ell + \frac{v_0 t}{8} - \frac{v_0}{8}\sqrt{\frac{M}{2k}} \sin \omega t.$$

Poloha středu hmotnosti soustavy po srážce a vzájemná poloha kostek jsou v každém okamžiku

$$x_{\mathrm{sh}}(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = \frac{\ell}{2} + \frac{v_0 t}{8}, \quad x_2(t) - x_1(t) = \ell - \frac{v_0}{4}\sqrt{\frac{M}{2k}} \sin \omega t.$$

Tyto výsledky odpovídají naší předběžné fyzikální úvaze.

Pohybovou rovnici (1.27) jsme právě vyřešili, jak by se dalo říci, „od samého začátku“. Pomocí již vyřešeného příkladu 1.48 jsme si však postup mohli velice zjednodušit zavedením nové neznámé funkce $u(t) = \ddot{x}_1(t)$ a převedením rovnice (1.27) na tvar $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$. Teď už by jen stačilo použít výsledků příkladu 1.48 pro počáteční podmínky $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = -\frac{k v_0}{4M}$, které lze získat z pohybové rovnice $Mu = M\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell)$ a podmínek $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \ell$, $\dot{x}_1(0) = \frac{1}{4}v_0$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Pokuste se sami problém takto řešit. Nezapomeňte, že funkci $u(t)$ je pak ještě třeba dvakrát po sobě zintegrovat, abyste získali $x_1(t)$.

Příklad 1.50: … a jeden nefyzikální

Pro procvičení řešme pomocí řad ještě rovnici $\ddot{x}(t) + t^2 x(t) = \mathrm{e}^t$ při počátečních podmínkách $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Předpokládané řešení ve tvaru řady a jeho druhou derivaci

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad \ddot{x}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2}$$

dosadíme do rovnice, v níž pravou stranu rovněž vyjádříme řadou. Po dosazení jako obvykle provedeme vhodné přeindexování a postupně dostaneme

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \implies$$

$$\implies (2c_2 - 1) + (6c_3 - 1)t + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+4)(n+3)c_{n+4} + c_n - \frac{1}{(n+2)!}\right] t^{n+2} = 0.$$

Odtud získáme přímo koeficienty c_2 a c_3 a pro ostatní rekurentní vzorec:

$$c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{6}, \quad c_{n+4} = \frac{1}{(n+4)(n+3)}\left(\frac{1}{(n+2)!} - c_n\right).$$

Zůstávají neurčené dva koeficienty, například c_0 a c_1, které představují v obecném řešení rovnice druhého řádu integrační konstanty. Při zadaných počátečních podmínkách $x(0) = 0$ a $\dot{x}(t) = v_0$ pak dostaneme $c_0 = 0$, $c_1 = v_0$. Vyjádřete explicitně prvních deset členů řady, která představuje partikulární řešení.

Příklad 1.51: Speciální funkce

Ve fyzikálních a technických aplikacích se často vyskytují speciální funkce, které bývají nekonečnými řadami buď přímo zadány, nebo jsou definovány jako řešení speciálních diferenciálních rovnic, které se pak pomocí nekonečné řady hledá, popřípadě jsou definovány speciálními integrály. Dva takové příklady si nyní ukážeme. Jedná se o příklady poměrně pracné a vyžadující pozornost. Netrpělivý čtenář se bez nich může i obejít.

Velký význam pro fyziku mají Besselovy koeficienty, nazývané také Besselovy funkce prvního druhu celočíselného řádu $J_n(x)$. Odvodíme je jako koeficienty absolutně a stejnoměrně konvergentních řad speciálně zvolených exponenciálních funkcí. Uvažujme o funkci

$$f\,:\,\mathbf{R}\times(\mathbf{R}\setminus\{0\})\ni(x,\,z)\;\longrightarrow\;f(x,\,z)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})}\in\mathbf{R},$$

kterou vyjádříme jako součin dvou funkcí

$$f(x,\,z)=f_1(x,\,z)\cdot f_2(x,\,z)=\exp\left(\frac{x}{2}z\right)\cdot\exp\left(-\frac{x}{2}z^{-1}\right).$$

Obě jsou to ovšem funkce dvou proměnných, x a z, a my jsme takové funkce dosud nestudovali. Pro tento příklad to však není nijak na závadu. S problémem si snadno poradíme tak, že u funkce f_1 budeme na chvíli považovat za proměnnou výraz $\xi = \frac{x}{2}z$, u funkce f_2 bude hrát roli proměnné výraz $\zeta = -\frac{x}{2}z^{-1}$.

Obě funkce , tj. $f_1(\xi) = \exp\xi$ a $f_2(\xi) = \exp\zeta$, vyjádříme pomocí řad, které konvergují absolutně a stejnoměrně na $\mathbf{R}$. Společným oborem absolutní a stejnoměrné konvergence pro proměnnou z je $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Konkrétně platí

$$\begin{aligned}
f_1(\xi) &= \mathrm{e}^{\xi}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\xi^r}{r!} &&= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^r\frac{z^r}{r!},\\
f_2(\zeta) &= \mathrm{e}^{\zeta}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\zeta^s}{s!} &&= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^s\frac{z^{-s}}{s!}.
\end{aligned}$$

Funkce $f(x,\,z)$ je pak součinem těchto řad, resp. přesněji řečeno součinem jejich součtů:

$$f(x,\,z)=\left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^r\frac{z^r}{r!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^s\frac{z^{-s}}{s!}\right).$$

V tuto chvíli musíme přistoupit na malou odbočku od slibovaného zavedení Besselových koeficientů. Objevil se totiž problém, který jsme v textu neřešili a v obecnosti to ani není nezbytné. Tím problémem je, zda a jak můžeme součin součtů řad vyjádřit pomocí jejich členů. Zapišme funkce f_1 a f_2 obecně jako

$$f_1(\xi)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\xi^r,\quad f_2(\zeta)=\sum_{s=0}^{\infty}b_s\zeta^s.$$

Jejich částečné součty jsou

$$s_{1,n}=(a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n),\quad s_{2,m}=(b_0+b_1\zeta+\cdots+b_m\zeta^m),\quad n,\,m\in\mathbf{N}\cup\{0\}.$$

Vynásobíme-li je, dostaneme

$$s_{1,n}\, s_{2,m} = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_r b_s\, \xi^r \zeta^s.$$

Jednoduše vynásobíme každý sčítanec prvního součtu s každým sčítancem druhého součtu. Řadu, kterou nazveme *součinem řad* $f_1(\xi)$ a $f_1(\xi)$, tedy můžeme definovat jako součet všech možných členů typu $a_r b_s\, \xi^r \zeta^s$, kde $r,\, s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Háček je v tom, že nevíme, v jakém pořadí máme takové členy sčítat. Obecně totiž, nebude-li zaručena absolutní konveregence řady vzniklé z takovýchto členů, bude součet na jejich pořadí závislý, a dokonce by řada mohla i divergovat. Při sčítání obecně neplatí komutativní zákon, takže členy nemůžeme poskládat, jak chceme. (Připomeňte si třeba příklad 1.14 pro číselné řady.) Platí však, že jsou-li výchozí řady absolutně konvergentní, bude řada vytvořená z výrazů typu $a_r b_s\, \xi^r \zeta^s$ také absolutně konvergentní. Na pořadí sčítání tedy záležet nebude. V rámci cvičení se můžete pokusit toto tvrzení dokázat.

Vraťme se nyní z odbočky na „hlavní trasu“. Víme z dřívějška, že řady, které vyjadřují exponenciální funkce, jsou absolutně a stejnoměrně konvergentní na $\mathbf{R}$. Proto můžeme jejich součin vytvořit s takovým pořadím sčítání členů, jaké se nám hodí. Dosadíme-li zpět $\xi = \frac{x}{2} z$ a $\zeta = -\frac{x}{2} z^{-1}$, vidíme, že obecný člen součinu řad je $(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} z^{r-s}$. Řada tedy obsahuje jak nezáporné, tak záporné mocniny proměnné z. A právě podle tohoto kritéria rozdělíme součet výsledné řady

$$f(x,z) = \sum_{r=0,s=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} \frac{(-1)^s\, z^{r-s}}{r!s!}$$

na část, v níž jsou členy s nezáporným exponentem proměnné z, tedy $r \geq s$, a část, v níž má proměnná z exponenty záporné, tj. $s > r$. Zápis má tvar

$$f(x,z) = \sum_{r=s,s=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} \frac{(-1)^s\, z^{r-s}}{r!s!} + \sum_{s=r+1,r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} \frac{(-1)^s\, z^{r-s}}{r!s!}.$$

V prvním sčítanci označíme $n = r - s$, ve druhém $n = s - r$. Výsledek nyní vypadá velice jednoduše,

$$f(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x) z^{-n}.$$

Funkce proměnné x

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{1.28}$$

pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ jsou slibované *Besselovy koeficienty*. Jsou řešením obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0 \tag{1.29}$$

pro neznámou funkci $y(x)$. Skutečně, položme $y(x) = J_n(x)$ a vypočtěme první a druhou derivaci této funkce podle proměnné x. Řada, kterou je funkce vyjádřena, je stejnoměrně konvergentní a lze ji tedy derivovat člen po členu i opakovaně. Platí

$$\begin{aligned}
y(x) &= J_n(x) &&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \\
y'(x) &= J_n'(x) &&= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k+n)}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad \text{pro } n \geq 1, \\
y''(x) &= J_n''(x) &&= \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k+n)\,(2k+n-1)}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad \text{pro } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Nyní stačí dosadit do rovnice (1.29) a po malé úpravě v závěru vyžadující přeindexování $k \to k-1$ dostaneme

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[n^2 + 4k(n+k)\right]}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} =$$

$$n^2 J_n(x) + x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n+k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)+n} = \left(n^2 - x^2\right) J_n(x).$$

Vidíme, že Besselova funkce je skutečně řešení rovnice (1.29).

Pozn.: Faktoriál pro přirozená čísla je definován jako $k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Chceme-li do definičního oboru přidat nulu, můžeme faktoriál definovat jako (přesvědčte se, že pro $k \in \mathbf{N}$ dává správné výsledky)

$$k! = \int_0^{\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Pokud bychom chtěli řešení Besselovy rovnice „aktivně“ hledat, je vhodné zahájit hledání předpokládaným vyjádřením neznámé funkce ve tvaru mocninné řady s neurčenými koeficienty c_k, která začíná až n-tou mocninou proměnné x, tj.

$$y(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

Po dosazení do rovnice dostáváme přehlednější výraz

$$(2n+1)c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(2n+k)k c_k + c_{k-2}\right] x^k = 0.$$

Položíme-li rovny nule koeficienty u jednotlivých mocnin x, získáme postupně vztahy pro čísla c_k:

$$c_1 = c_3 = \ldots = 0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{2(2n+2)},$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2n+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}, \ldots$$

Pomocí wronskiánu (odstavec 7.4.3) sestaveného z řešení Besselovy rovnice (1.29) uvidíme, že druhé nezávislé řešení nemůže být vyjádřeno pomocí mocninné řady se středem v $a = 0$. Označme $J_n(x)$ a $y_n(x)$ dvě řešení Besselovy rovnice. Pro wronskián a jeho derivaci platí

$$W(J_n,\, y_n)(x) = \det \begin{pmatrix} J_n(x) & y_n(x) \\ J_n'(x) & y_n'(x) \end{pmatrix} = J_n(x) y_n'(x) - J_n'(x) y_n(x),$$

$$W'(J_n,\, y_n)(x) = J_n(x) y_n''(x) - J_n''(x) y_n(x).$$

Zapíšeme-li Besselovu rovnici pro $J_n(x)$ i pro $y_n(x)$, pak vynásobením prvé z nich funkcí $y_n(x)$, druhé funkcí $J_n(x)$ a odečtením dostaneme

$$x^2 \left(J_n(x) y_n''(x) - J_n''(x) y_n(x)\right) + x \left(J_n(x) y_n'(x) - J_n'(x) y_n(x)\right) = 0,$$

$$x^2 W'(J_n,\, y_n)(x) + x W(J_n,\, y_n)(x) = 0 \Longrightarrow W(J_n,\, y_n)(x) = \frac{K}{x},$$

kde K je integrační konstanta. Dostáváme tak vztah

$$J'_n(x)y_n(x) - J_n(x)y'_n(x) = \frac{\text{konst.}}{x}$$

Z vyjádření Besselových koeficientů $J_n(x)$ mocninnými řadami (vztah 1.28) plyne, že je-li konstanta nenulová, pak pro $x \to 0$ (při zanedbání vyšších mocnin proměnné x druhou počínaje) platí

$$y_0(x) \longrightarrow \ln x, \quad y_n(x) \longrightarrow x^{-n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Tyto funkce se po vhodném normování nazývají *Neumannovy* a značí se $N_n(x)$ nebo $Y_n(x)$.

Dalšími důležitými speciálními funkcemi, bez nichž se například neobejde optika, jsou *Fresnelovy integrály*, sinový $S(x)$ a kosinový $C(x)$. Jsou definovány takto:

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin \xi^2 \, \mathrm{d}\xi, \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos \xi^2 \, \mathrm{d}\xi. \tag{1.30}$$

S přibližným výpočtem těchto integrálů si poradíme. Funkci $\sin \xi^2$ lze totiž na $\mathbf{R}$ snadno vyjádřit stejnoměrně a absolutně konvergentní mocninnou řadou se středem v nule, kterou lze integrovat člen po členu. Platí

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{4k+2}}{(2k+1)!} \right) \mathrm{d}\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^x \xi^{4k+2} \, \mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x^{4k+3}}{4k+3}.$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{4k}}{(2k)!} \right) \mathrm{d}\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^x \xi^{4k} \, \mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{x^{4k+1}}{4k+1}.$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} - \frac{x^{15}}{75600} + \cdots \right),$$

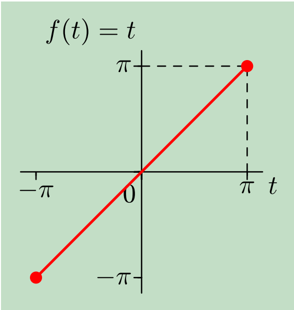
$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{13}}{9360} + \cdots \right).$$

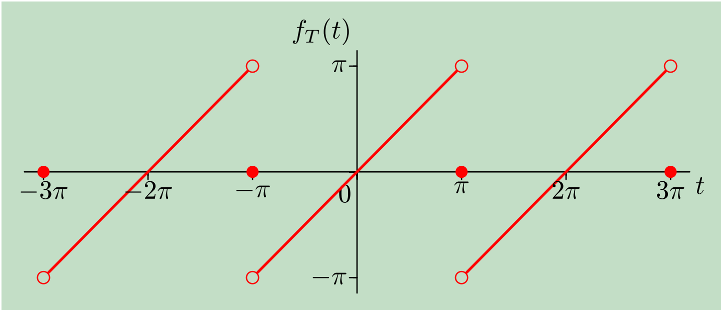
Pro $x > 1$ tyto řady konvergují pomalu vinou vysokých mocnin proměnné x.

Příklad 1.52: Fourierova řada lineární funkce

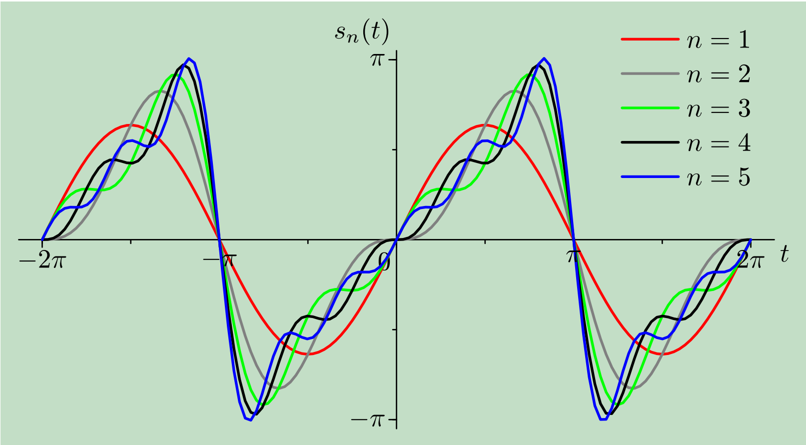
Nechť je funkce $f(t)$ definovaná na intervalu $[-\pi, \pi]$ předpisem $f(t) = t$ (v praxi může představovat velmi zjednodušený model tzv. *pilového signálu*). Je to lichá funkce, jejíž Fourierovy koeficienty jsou, podle výsledku příkladu 1.40,

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt \, \mathrm{d}t =$$





Obr. 1.20 K příkladu 1.52.



Obr. 1.21 Součty s_1 až s_5 Fourierovy řady funkce $f(t) = t$.

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n} = -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{n}, \quad n = 1,\, 2,\, \dots\, .$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{n}\sin nt, \quad \text{pro} \quad t \in (-\pi,\, \pi), \quad \frac{1}{2}\big(f(-\pi^+) + f(\pi^-)\big) = 0.$$

Obrázek 1.20 znázorňuje funkci $f(t) = t$ na intervalu $[-\pi, , \pi]$ a funkci, k níž konverguje příslušná Fourierova řada podle Dirichletovy věty. Na obrázku 1.21 jsou částečné součty s_1 až s_5 Fourierovy řady funkce $f(t) = t$ na intervalu $[-2\pi,\, 2\pi]$. Je vidět, jak se postupně vytváří pilový signál přibýváním vyšších harmonických frekvencí.

Příklad 1.53: Jak se zbavit sudých, nebo lichých harmonických

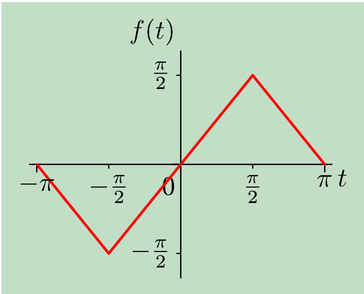
Pokusme se řešit obrácenou úlohu. Nepůjde o to rozložit daný signál $f(t)$ do Fourierovy řady a zjistit obsah (amplitudy) vyšších harmonických frekvencí, ale naopak, zvolit výchozí signál tak, aby v něm chyběly například sudé násobky základní frekvence. Půjde to vůbec zařídit? Zjednodušme ještě úlohu tak, že budeme hledat signál, který je sudou, nebo lichou funkcí proměnné t. Zvolme třeba požadavek signálu daného lichou funkcí na intervalu $[-\pi,\, \pi]$. Její Fourierova řada nebude obsahovat absolutní člen ani členy s kosiny (příklad 1.40), takže bude mít tvar

$$f_{\mathcal{T}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t.$$

Počítejme b_n metodou integrace per partes,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-f(t) \frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(t) \frac{\cos nt}{n} \, \mathrm{d}t.$$

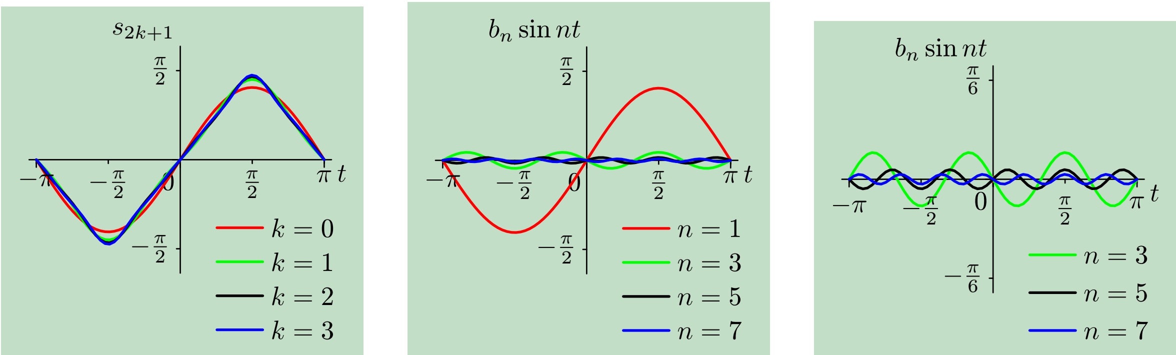
Na funkci $f(t)$ jsme zatím nekladli žádné další požadavky, než že má být lichá. Omezme tedy dále její možnosti například tak, aby $f(0) = f(\pi) = 0$. Tím zajistíme nulovost prvního sčítance v předchozím mezivýsledku. Dále volme funkci $f(t)$ pro výpočet co nejjednodušší, například tak, že bude mít konstantní derivaci na vhodných podintervalech integračního intervalu $[0, \pi]$. Jedna z takových možností se hned nabízí (vidíme ji na obrázku 1.22).



Obr. 1.22 Pilový signál.

$$f(t) = t \text{ pro } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(t) = \pi - t \text{ pro } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Pro její Fourierovy koeficienty dostaneme



Obr. 1.23 Lichá funkce bez obsahu sudých harmonických frekvencí.

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos nt \, \mathrm{d}t - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos nt \, \mathrm{d}t \right) = \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \implies$$

$$\Longrightarrow\ b_{2k} = 0,\ \ b_{2k+1} = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2}, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

$$f_{\mathcal{T}}(t) = f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} \sin{(2k+1)t}.$$

Obrázek 1.23 ukazuje grafy prvních čtyř nenulových členů Fourierovy řady a jejich částečných součtů. Odpovídají frekvencím ω, 3ω, 5ω a 7ω. Sudé násobky základní frekvence nejsou v signálu obsaženy. Vidíme, že čtyři členy Fourierovy řady již velice dobře vystihují tvar signálu.

1.3.4 Cvičení

1. Dokažte, že existuje-li (vlastní, nebo nevlastní) limita $L = \lim_{n\to\infty} \left\{\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right\}$, kde c_n jsou koeficienty mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, je poloměr konvergence této řady roven $R = L^{-1}$. (Pro $L = 0$ a $L = +\infty$ platí tabulky pro počítání s nekonečny z příkladu 1.7.)
Návod: Použijte limitního podílového kritéria pro konvergenci řady.

2. Rozložte následující funkce v Taylorovu řadu se středem v bodě x_0, v úlohách a) až i) určete také obor konvergence (v úlohách j), k) a l) zapište pouze první čtyři nenulové členy):

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, $x_0 = 0$,
b) $f(x) = x^{-1}$, $x_0 = 1$,
c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 1$,
d) $f(x) = \ln x^2$, $x_0 = 1$,
e) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$,
f) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$, $x_0 = 0$,
g) $f(x) = \mathrm{arctg} x$, $x_0 = 0$,
h) $f(x) = \mathrm{sinh} x$, $x_0 = 0$,
i) $f(x) = \mathrm{cosh} x$, $x_0 = 0$,
j) $f(x) = \mathrm{tg} x$, $x_0 = 0$,
k) $f(x) = \mathrm{arcsin} x$, $x_0 = 0$,
l) $f(x) = \mathrm{arccos} x$, $x_0 = 0$.

3. Určete součet a obor konvergence u následujících řad:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$,
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n x^{n+p}}{(n+p)!}$,
c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,
d) $\sum_{n=1}^{\infty} -2\frac{x^{2n}}{2n}$.

4. Určete přibližnou hodnotu následujících výrazů pomocí prvních $n+1$ členů Taylorovy řady:

a) $\cos 2°$, $n = 4$,
b) $\frac{1}{\sqrt{3{,}8}}$, $n = 2$,
c) $\mathrm{arctg}\, 1{,}02$, $n = 2$,
d) $\sqrt[3]{29}$, $n = 2$,
e) $\sin 2°$, $n = 5$.

5. Rozložte následující funkce ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$:

a) $f(x) = |x|$,
b) $f(x) = C$ pro $x < 0$, $f(x) = -C$ pro $x > 0$, $f(0) = 0$, $C \in \mathbf{R}$,
c) $f(x) = 1 - x^2$,

d) $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

6. Pomocí rozvoje vhodné funkce v Taylorovu řadu vypočtěte přibližně následující určité integrály, použijte první tři nenulové členy řady a odhadněte chybu výpočtu:

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$, b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\, dx$.

7. V příkladu 1.39 jsme pracovali s řadou $2|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$, utvořenou z Fourierových koeficientů funkce $f(t)$. Z konvergence této řady plyne $\lim_{n\to\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = 0$ (nutná podmínka konvergence řady). Ukažte, že platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

8. Nechť $f(t)$ je spojitá a po částech monotónní funkce na intervalu $[-\pi, \pi]$ a platí $f(-\pi) = f(\pi)$. Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ utvořené z Fourierových koeficientů funkce $f(t)$ konvergují, pak Fourierova řada $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ konverguje na intervalu $[-\pi, \pi]$ k funkci $f(t)$ stejnoměrně. Dokažte. Zdůvodněte předpoklad $f(-\pi) = f(\pi)$.
Návod: Na řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$ aplikujte Weierstrassovo kritérium. Ke zdůvodnění předpokladu $f(-\pi) = f(\pi)$ použijte Dirichletovy věty (věta 1.13).

9. Předpokládejte, že funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou vyjádřeny svými Fourierovými řadami

$$f(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos \frac{2\pi n x}{\ell} + \beta_n \sin \frac{2\pi n x}{\ell}\right],$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_n \cos \frac{2\pi n x}{\ell} + \delta_n \sin \frac{2\pi n x}{\ell}\right].$$

Ukažte, že platí

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} [f(x)]^2\, dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right) \quad \text{a obdobně pro } g(x) \text{ a}$$

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) g(x)\, dx = \frac{\alpha_0 \gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \gamma_n + \beta_n \delta_n).$$

Návod: Postupujte tak, že funkce za integrály vyjádříte jejich Fourierovými řadami a využijete vlastností těchto řad.

Výsledky cvičení

8.1.3

3. a) $\{+\infty\}$, b) $\{+\infty, -\infty\}$, c) $\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right\}$, d) $\{2\}$. Limitu mají posloupnosti a) a d) (limita je stejná jako jejich hromadný bod). **13.** a) konverguje pro $k > 1$ (integrální kritérium), pro $k \le 1$ diverguje, b) konverguje absolutně pro $k > 1$, pro $k \le 1$ řada z absolutních hodnot diverguje (srovnání s řadou ad a)), c) konverguje pro $m + 2 \le$ $\le k$, jinak diverguje, d) konverguje absolutně (limitní podílové kritérium), e) konverguje (limitní podílové kritérium), f) konverguje absolutně (limitní odmocninové kritérium), g) nekonverguje absolutně (integrální kritérium), konverguje obyčejně (Leibnizovo kritérium).

8.2.3

7. a) na intervalu $(-2, 0)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně (Weierstrassovo kritérium, majorantou je geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x+1|^{n+1}$, obor konvergence lze zjistit například použitím podílového kritéria), v bodě $x_0 = -2$ konverguje neabsolutně (Leibnizovo kritérium), b) řada s kladnými členy pro libovolné x, na intervalu $(-\infty, 0)$ konverguje lokálně stejnoměrně (obor konvergence lze určit například odmocninovým kritériem), c) řada s kladnými členy pro libovolné x, na intervalu $[0, \infty)$ konverguje stejnoměrně (Weierstrassovo kritérium, majorantou je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$). **9.** Ano (například podle Weierstrassova kritéria). **10.** Limitou je ve všech případech nulová funkce, a) ano, b) ne, pouze lokálně stejnoměrně, konverguje však stejnoměrně na intervalu $(1 + \delta, \infty)$ pro libovolné $\delta > 0$, c) ano (například podle poslední vlastnosti věty 1.9), d) na intervalu $[1, \infty)$ konverguje bodově, na intervalu $(1, \infty)$ konverguje lokálně stejnoměrně, na intervalu $(1+\delta, \infty)$, $\delta > 0$ konverguje stejnoměrně. **11.** $\frac{1}{2}$ (s využitím věty 1.11), řada konverguje stejnoměrně.

8.3.4

2. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$, $\mathbf{R}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, $(0,\ 2)$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-1)^n$, $(-1,\ 3)$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$, $(0,\ 2)$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $(-1,\ 1)$, f) $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1,\ 1)$,

g) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1,\,1)$, h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\mathbf{R}$, i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\mathbf{R}$, j) $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+$ $+\frac{17}{315}x^7$, k) $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}$, l) $\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}$. **3.** a) $-\ln(1-x)$, $|x|<1$, b) $\frac{1}{(-k)^p}\mathrm{e}^{-kx}$, $x\in\mathbf{R}$, c) $\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$, d) $\ln(1-x^2)$, $|x|<1$. **4.** a) $1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4$, b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{80}+\frac{3}{3\,200}$, c) $\frac{\pi}{4}+0{,}01-0{,}000\,1$, d) $3+\frac{2}{27}-\frac{8}{2187}$, e) $\frac{\pi}{90}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3+\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5$. **5.** a) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, b) $-\frac{4C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, c) $1-\frac{\pi^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$, d) $\frac{2(-1)^{n+1}\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin nx$. **6.** a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\doteq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots}{x}\,\mathrm{d}x=\left[x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\ldots\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\doteq$ $\doteq\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi^3}{64\cdot 18}+\frac{31\pi^5}{1\,024\cdot 600}$, řada je alternující, chyba je tedy menší než nejbližší následující nenulový člen: $\left[\frac{x^7}{7\cdot 7!}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$, b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}\doteq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\ln x-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\ldots\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\doteq\ln 2-\frac{3\pi^2}{64}+\frac{15\pi^4}{256\cdot 96}$, řada je alternující, chyba je tedy menší než nejbližší následující nenulový člen: $\left[\frac{x^6}{6\cdot 6!}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$.