Písemka matematika 3 s řešením

---

1. Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+n^2}-n), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n.$$

Řešení: $1/2$, $1/\sqrt{e}$

---

2. Určte hromadné body, limitu superior a limitu inferior posloupností:

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{2}, \qquad b_n = n\left(-\frac{1}{n}\right)^{a_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Řešení: $\{0, 1, -1\}$, $\{\infty, -\infty, -1\}$

---

3. Vypočtěte:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right).$$

Řešení: $1/3$, $1-\sqrt{2}$

---

4. Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3+1)(3+2)\dots(3+n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}.$$

Řešení: diverguje, diverguje, konverguje, konverguje

---

5. Určete poloměr a obor konvergence:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^n}{n+\sqrt{n}}.$$

Řešení: $[-1, 1)$, $[-1/2, 1/2]$, $(-\infty, \infty)$, $(-3, -1]$

---

6. Určete součet řady funkcí (první příklad) resp. pomocí součtu řady funkcí sečtěte číselné řady (druhý a třetí příklad):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{8^n}.$$

Řešení:

$$\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x, \quad 3, \quad \frac{128}{343}$$

---

7. Vypočtěte Taylorovu řadu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, v bodě $x_0 = -2$ a určete její obor konvergence. Vypočtěte Maclaurinovu řadu funkce e^{-x^2}.

Řešení:

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{4}(x+2)^2 + \ldots + \frac{1}{2^n}(x+2)^n \ldots\right), x \in (-4, 0),$$

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

---

8. Je dáno zobrazení $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ověřte, že jsou splněny podmínky Banachovy věty a metodou postupných aproximací určete jeho pevný bod, tj. bod (x_0, y_0) splňující $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

$$f(x, y) = \left(-\frac{1}{3}y + 2, \frac{1}{3}x - 4\right).$$

Řešení: $[3, -3]$

---

9. Vypočtěte Fourierovu řadu funkce e^x na intervalu $[0, 2\pi]$.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \cos nx - \frac{n}{n^2+1} \sin nx\right)\right]$$

---

10. Spočtěte Fourierovu transformaci funkcí f, g, jejich konvoluci $f * g$ a také její Fourierovu transformaci (ověřte, že je to součin Fourierových transformací původních funkcí):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Řešení:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{\xi}\sin\xi, \quad \mathcal{F}(g)(\xi) = \frac{4}{\xi^3}\sin\xi - \frac{4}{\xi^2}\cos\xi,$$

$$f * g(y) = \begin{cases} \frac{|y|^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3} & y \in [-2,2] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad \mathcal{F}(f*g)(\xi) = \frac{8\sin^2}{\xi^4} - \frac{8\sin\xi\cos\xi}{\xi^3}.$$

---

11. Nalezněte obecné řešení rovnice i partikulární řešení splňující zadanou okrajovou podmínkou, načrtněte charakteristiky i okrajovou křivku a proveďte zkoušku:

$$xu_x + yu_y = 2(x^2+y^2), \quad u(1,y) = 2y^2+1.$$

Řešení:

$$u = x^2 + y^2 + C\left(\frac{y}{x}\right), \qquad u_p = x^2 + y^2 + \frac{y^2}{x^2}.$$

---

12. Metodou separace proměnných nalezněte ohraničené řešení Laplaceovy rovnice na vnitřku jednotkového kruhu splňující zadanou okrajovou podmínku. Proveďte zkoušku.

$$\Delta u = 0 \quad \text{pro} \quad x^2+y^2<1, \qquad u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sin\varphi + \cos^2\varphi.$$

Řešení: $u = (1 + 2y + x^2 - y^2)/2$

---

13. Klasifikujte parciální rovnici druhého řádu, převeďte na kanonický tvar, nalezněte řešení a proveďte zkoušku.

$$x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} + xu_x = 0.$$

Řešení: $u = yF(y + \ln x) + G(y + \ln x)$

---

14. Vypočtěte plochu ohraničenou křivkami $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2 - x$ a $y = 1 - x$.

- jednoduchým integrálem v kartézských souřadnicích,
- dvojnásobným integrálem s proměnnými mezemi nejprve podle proměnné x, potom podle proměnné y,
- dvojnásobným integrálem s proměnnými mezemi nejprve podle proměnné y, potom podle proměnné x,

- dvojným integrálem v pevných mezích pomocí jakobiánu a věty o transformaci (zvolte vhodné souřadnice),
- pomocí Greenovy věty, tj. vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = (-y, x)$ po uzavřené křivce ohraničující plochu.

Řešení: $1/2$

---

15. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní kružnice s jednotkovou hustotou o poloměru R vzhledem k jejímu průměru.

Řešení: πR^3

---

16. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (0, 0, x^2y^2z^2)$ plochou zadanou rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leq 0$ a orientovanou vnější normálou

- přímo,
- převodem na objemový integrál pomocí Stokesovy věty.

Řešení: $-\pi R^8/96$

---

17. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = \mathrm{rot}\vec{G}$, kde $\vec{G} = (ky, -kx, 0)$, kde $k = \text{konst.}$, plochou $z = v - \frac{x^2+y^2}{a^2}$, $z \geq 0$, orientovanou vnější normálou

- přímo,
- pomocí integrální věty.

Řešení: $-2\pi ka^2v$

---

18. Vypočtěte objem, hmotnost, polohu těžiště a moment setrvačnosti kolem osy symetrie pro plný homogenní (hustota $\varrho = \text{konst.}$) kužel o výšce h a poloměru podstavy R. Vypočtěte povrch pláště (bez podstavy), hmotnost pláště (plošná hustota $\sigma = \text{konst.}$), polohu těžiště pláště a moment setrvačnosti pláště kolem osy symetrie pro tento kužel.

- jednoduchým integrálem (kužel vznikne rotací úsečky kolem osy x).
- vícenásobným integrálem (zvolte vhodnou parametrizaci).

Řešení: Objem $V = \pi R^2 h/3$, $M = \varrho\pi R^2 h/3$, $T = (3h/4, 0, 0)$ je-li osa symetrie x a vrchol $(0,0,0)$, $J = \varrho\pi h R^4/10$. Povrch $S = \pi R\sqrt{R^2+h^2}$, $M = \sigma\pi R\sqrt{R^2+h^2}$, $T = (2h/3, 0, 0)$, $J = \sigma R^3\sqrt{R^2+h^2}/2$.

---

19. Lineární zobrazení $f : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ je zadáno ve standardní bázi (v řádkové symbolice) maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory f.

b) Určete Jordanův normální tvar J_A matice A.

c) Určete podobnostní transformaci, které převede matici A na J_A (obecně).

d) Vypočtěte matici A^5.

Řešení: $\lambda = 3$, $L_\lambda = \{(t, -2t, s, -s) | t, s \in \mathbf{C}\}$

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = TAT^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} T & t-2T & \frac{s-3S}{3} & S \\ t & -2t & s & -s \\ A & a-2A & \frac{b-3B}{3} & B \\ a & -2a & b & -b \end{pmatrix},$$

kde $(a,b) \neq k(s,t), (s,t) \neq (0,0)$. $A^5 = T^{-1}J^5T$. Např.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1\,053 & -1\,620 & 0 & 0 \\ 405 & -567 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\,458 & -1\,215 \\ 0 & 0 & 1\,215 & -972 \end{pmatrix}.$$

---

20. Lineární operátor $f : \mathbf{C}^5 \to \mathbf{C}^5$ má pětinásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 3$, napište všechny možnosti Jordanova normálního tvaru matice tohoto operátoru (bez ohledu na pořadí bloků). U každé z nich zapište příslušný kanonický tvar charakteristické matice. U všech případů uveďte dimenzi podprostoru L_λ vlastních vektorů a hodnost matice $(J - \lambda E)$.

Řešení: Existuje sedm navzájem nepodobných operátorů (další Jordanovy matice se liší pouze pořadím bloků).

---

21. Operátor $\varphi : P_1[x] \to P_1[x]$ (nad $\mathbf{R}$) je zadán předpisem

$$\varphi(ax+b) = -ax + a + b.$$

Zvolme skalární součin v $P_1[x]$ takto:

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Dokažte, že operátor φ je symetrický a nalezněte jeho spektrální rozklad:

$$\varphi = \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2,$$

projekce $\pi_1(ax+b) = \ldots$ a $\pi_2(ax+b) = \ldots$ zapište předpisem.

Řešení: $\pi_1(ax+b) = a/2 + b$, $\pi_2(ax+b) = ax - a/2$

---

22. Nechť $H = L^2[0,\pi]$ je Hilbertův prostor kvadraticky integrabilních funkcí se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že operátor $A(y) = y''$ definovavý na $D(A) = \{y \in L^2[0,\pi], y'(0) = y(\pi) = 0\}$ (tzv. *smíšené podmínky*) je hermiteovský, tj.

$$\langle A(y)|z\rangle = \langle y|A(z)\rangle, \quad \forall y,z \in D(A).$$

Nalezněte jeho vlastní čísla a vlastní funkce.

Řešení:

$$\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2}{4}, \quad y_n = \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \quad n \in \mathbf{N}_0$$

---

23. Je zadán tenzor $\omega \in \mathcal{T}_2^2(V)$, kde $\dim V = 2$:

$$\omega = e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 \otimes e^1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^1 +$$

$$+3e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^2 + 5e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 - 11e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1.$$

a) Určete dimenzi příslušného tenzorového prostoru.

b) Vypište složky tenzoru ω.

c) Antisymetrizujte ω v horních indexech.

d) Symetrizujte ω v dolních indexech.

e) Úžete ω v prvním horním a prvním dolním indexu.

f) Úžete ω vektorovým argumentem $\xi = e_1 + e_2$ na druhé pozici.

g) Zvedněte první dolní index na pozici třetího horního pomocí kontravariantní metriky (g^{ij}) k metrice kovariantní (g_{ij}), kde $g_{11} = 2$, $g_{12} = g_{21} = -1$, $g_{22} = 1$.

Vše zapište ve tvaru jako je zadání ω.

Řešení:

1. určíme dimenzi $\mathcal{T}_2^2(V)$.

$$\dim \mathcal{T}_2^2(V) = 2^4 = 16$$

2. vypíšeme nenulové složky ω:

$$\begin{aligned} \omega_{11}^{11} &= 1 \\ \omega_{11}^{12} &= 2 \\ \omega_{21}^{12} &= -1 \\ \omega_{22}^{12} &= 3 \\ \omega_{11}^{21} &= 5 \\ \omega_{21}^{21} &= -11 \end{aligned}$$

3. antisymetrizujeme ω v horních indexech:

$$\bar{\omega}_{kl}^{ij} = \frac{1}{2}(\omega_{kl}^{ij} - \omega_{kl}^{ji})$$

Celkem vyjde:

$$\bar{\omega} = -3e_1 \wedge e_2 \otimes e^1 \otimes e^1 + 10e_1 \wedge e_2 \otimes e^2 \otimes e^1 + 3e_1 \wedge e_2 \otimes e^2 \otimes e^2$$

4. symetrizujeme ω v dolních indexech:

$$\tilde{\omega}_{kl}^{ij} = \frac{1}{2}(\omega_{kl}^{ij} + \omega_{kl}^{ji})$$

Celkem vyjde:

$$\tilde{\omega} = e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 \otimes e^1 - \frac{1}{2}e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 \otimes e^2 +$$

$$+3e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^2 + 5e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 - \frac{11}{2}e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 +$$

$$-\frac{1}{2}e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^1 - \frac{11}{2}e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1$$

5. Zúžíme ω v prvním horním a prvním dolním indexu:

$$(\iota_1^1 \omega)_j^i = \omega_{jm}^{im}$$

Celkem vyjde:

$$\iota_1^1 \omega = -10e_1 \otimes e^1 + 2e_2 \otimes e^1$$

6. zúžíme ω vektorovým polem $\xi = e_1 + e_2$, tedy vyčíslíme toto pole na druhém vektorovém argumentu. Vyjde:

$$\iota_2(\xi)\omega =$$

$$= e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 + 5e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 - 11e_2 \otimes e_1 \otimes e^2$$

7. Zvedneme první dolní index na pozici třetího horního indexu. Metrika je zadaná jako:

   Celkem vyjde:

$$g \uparrow_1^3 \omega = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 + 3e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 +$$

$$+6e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 \otimes e^2 - 6e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 - 17e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e^1$$

---

24. Nechť $V = \mathbf{R}^3$. Nalezněte duální bázi $(\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3)$ k bázi

$$\tilde{e}_1 = (1, 1, 0), \quad \tilde{e}_2 = (0, 1, 1), \quad \tilde{e}_3 = (0, 0, -2).$$

(Zapište ve tvaru $\tilde{e}^i(\xi) = \dots$ pro $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$.)
Určete složky formy

$$\omega(\xi) = \xi^1 + \xi^2 + \xi^3$$

v této duální bázi.

Řešení:

$$e^1(\xi) = \xi^1, \quad e^2(\xi) = -\xi^1 + \xi^2, \quad e^3(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^1 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3,$$

$$\omega = 2e^1 + 2e^2 - 2e^3.$$

---

25. Vypracujte jeden složitější příklad (popřípadě i důkaz nějakého tvrzení) dle vlastního výběru, týkající se některého z témat v sylabu předmětu Matematika 3.