Matematika 3 F3712

---

1. Rozkladem na parciální zlomky určete součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$.

---

2. Formulujte dvě kritéria konvergence číselné řady s kladnými členy a ilustrujte jejich použití na příkladech.

---

3. Zapište funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ jako geometrickou řadu funkcí a integrací člen po členu z ní vypočtěte Taylorovu řadu pro funkci $g(x) = \ln(1+x)$. Určete poloměr a obor konvergence.

---

4. Definujte metrický prostor. Určete vzdálenost funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = \sqrt{x}$ v metrických prostorech $(C[0,1], \varrho_I)$ a $(C[0,1], \varrho_c)$, kde

$$\varrho_I(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x, \quad \varrho_c(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)|; x \in [0,1]\}.$$

---

5. Pomocí jakobiánu a věty o transformaci převeďte integrál pro plochu ohraničenou funkcemi $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x$, $h(x) = 2 - x$, $k(x) = x + 1$ do vhodných souřadnic a vypočtěte.

---

6. Vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = (z, y, xy)$ po šroubovici $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0, \pi]$. Je silové pole konzervativní?

---

7. Lineární operátor $\varphi : \mathbf{C}^6 \to \mathbf{C^6}$ má jedinou, šestinásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 2$. Víme, že dimenze podprostoru generovaného vlastními vektory je $\dim L_\lambda = 3$. Zapište všechny možnosti JNT (záměnu pořadí bloků neuvažujte).

---

8. Nalezněte spektrální reprezentaci matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

9. Definujte *hermiteovský operátor* v Hilbertově prostoru a ukažte, že operátor $A(f) = ((1-x^2)f')'$ je hermiteovský v prostoru $L^2[-1,1]$ se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

---

10. Zapište tenzor α vzniklý symetrizací tenzoru $\omega \in T_2^0(V_3)$ a tenzor β vzniklý jeho antisymetrizací, kde

$$\omega = 3e^1 \otimes e^1 + 2e^1 \otimes e^2 - 8e^3 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^3.$$

Vyčíslete všechny tři tenzory na vektorech $\xi = e_1 + 3e_2$, $\zeta = 2e_1 - e_3$.