LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, LINEÁRNÍ OPERÁTOR

φ: $V_n \ni \to \varphi(a) + \varphi(b) \in W_m$
Platí:

1. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \qquad \forall a, b \in V_n$
2. $\varphi(\alpha \cdot a) = \alpha\varphi(a) \qquad \forall a \in V_n, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

Je-li lineární zobrazení *injektivní* i *surjektivní* nazývá se **izomorfismus** vektorového prostoru.

Nazývá se **lineárním operátorem**, jestliže $V_n = W_m$ *(do sebe)* je reprezentováno maticí.

JÁDRO

$Ker\varphi = \{a \in V_n \mid \varphi(a) = 0_{W_m}\} \subset V_n$

$dimKer\varphi = d$ defekt
$Ker\varphi \dotplus L_{V_n} = V_n$

IMAGE

$Im\varphi = \{b \in W_n \mid \exists a \in V_n; \varphi(a) = b\} \subset W_m$

$dimIm\varphi = h$ hodnost zobrazení φ (matice)
$n = d + h$

VLASTNÍ VEKTOR, VLASTNÍ HODNOTA

a je nenulový vektor, který po působení operátorem nezmění směr.

$$\varphi(a) = \lambda \cdot a, \qquad \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

Je-li φ....A, pak jsou vlastní hodnoty λ kořeny determinantu:
$det(A - \lambda E) = 0$.

INVARIANTNÍ PODPROSTOR VZHLEDEM K OPERÁTORU

Platí:

$$a \in L \Rightarrow \varphi(a) \in L, \qquad L \subset V_n$$

UNITÁRNÍ OPERÁTOR

$\varphi : U_n \to U_n$ nad $\mathbb{C}$

Pro prostory konečné dimenze lze unitární zobrazení reprezentovat maticí $n \times n$, jejíž sloupcové vektory tvoří ortonormální bází v $\mathbb{C}^n$.

$$\langle a \mid b \rangle = \langle \varphi(a) \mid \varphi(b) \rangle$$

Platí:

Vlastní vektory $(\varphi - \lambda id)$ jsou z $\mathbb{C}$. $\lambda = e^{i\varphi}$
Matice reprezentace: $G = AGA^{T*}$ v ONB: $A^{T*}A = E$

HERMITEOVSKÝ OPERÁTOR

$\varphi : U_n \to U_n$

$$\langle a \mid \varphi(b) \rangle = \langle \varphi(a) \mid b \rangle$$

Platí:

Vlastní hodnoty $(\varphi - \lambda id)$ jsou z $\mathbb{R}$. $\lambda \in \mathbb{R}$
Matice reprezentace: $GA^{T*} = AG$ v ONB: $A^{T*} = A$

ANTIHERMITEOVSKÝ OPERÁTOR κ

Platí, že operátor $(i\kappa)$ je **hermiteovský**.

NORMÁLNÍ OPERÁTOR

Komutuje se svým adjungovaným zobrazením: $AA^{T*} = A^{T*}A$

SPEKTRÁLNÍ REPREZENTACE

$$U_n = L_{\lambda_1} \dotplus L_{\lambda_2} \dotplus ... \dotplus L_{\lambda_r}$$
$$\varphi = \lambda_1\pi_1 + ... + \lambda_r\pi_r$$
$$A = \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_r P_r$$

$det(A - \lambda E) = 0$
$\lambda \to$ matice $C \to P = C^{T*}C$