Tenzory

Samuel Valach a Jan Revenda

October 8, 2017

1 Definícia tenzoru

Nech V_n je vektorový priestor nad $\mathbf{R}$ a $p, q \geq 0$ sú celé čísla, $p + q \neq 0$. Tenzorom (p, q) -tého rádu typu (p, q) na V_n (tenzor p-krát kontravariantný a q-krát kovariantný) rozumieme zobrazenie

$$\tau : (\times_p V_n^*) \times (\times_q V_n) \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \longmapsto \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R}$$

ktoré je lineárne v kažom zo svojich kovektorových aj vektorových argumentoch.

2 Duálny priestor, duálna báza

Nech V_n je vektorový priestor nad poľom $\mathbf{R}$. *Duálnym priestorom* V_n* rozumieme množinu všetkých lineárnych zobrazení $\varphi : V_n \ni a \longmapsto \varphi(a) \in \mathbf{R}$ so štandardne zavedenými štruktúrami vektorového priestoru. Báza duálneho priestoru $(e^1, \dots, e^n)$ indukovaná bázou $(e_1, \dots, e_n)$ pomocou vzťahu $e^i(e_j) = \delta^i_j$) sa nazýva *duálna báza.*

3 Tenzorový súčin

Nech V_n je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel a $T^q_p(V_n)$ a $T^r_s(V_n)$ sú tenzory. *Tenzorovým súčinom* sa nazýva zobrazenie:

$$\otimes : T^q_p(V_n) \times T^r_s(V_n) \ni (\tau, \eta) \longmapsto \tau \otimes \eta \in T^{p+r}_{q+s}(V_n).$$

4 Symetrizácia a antisymetrizácia tenzorov

Symetrizáciou tenzoru $\eta \in T^0_2(V_n)$ nazveme zobrazenie

$$sym\eta : V_n \times V_n \ni (\xi, \zeta) \longmapsto sym\eta(\xi, \zeta) = \frac{1}{2}(\eta(\xi, \zeta) + \eta(\zeta, \xi)) \in \mathbf{R}$$

jeho *antisymetrizáciou*, resp. *alternáciou* nazveme zobrazenie:

$$alt\eta : V_n \times V_n \ni (\xi, \zeta) \longmapsto alt\eta(\xi, \zeta) = \frac{1}{2}(\eta(\xi, \zeta) - \eta(\zeta, \xi)) \in \mathbf{R}$$

5 Vonkajší súčin

Nech $\tau \in T^p_q(V_n)$ a $\eta \in T^r_s(V_n)$ sú tenzory antisymetrické vo všetkých svojich vektorových argumentoch. Ich *vonkajším súčinom* rozumieme zobrazenie

$$(\times_{p+r}V_n^*)\times(\times_{q+s}V_n) \ni (\omega_1,\dots,\omega_{p+r};\xi_1,\dots,\xi_{q+s}) \longmapsto (\tau\wedge\eta)(\omega_1,\dots,\omega_{p+r};\xi_1,\dots,\xi_{q+s}) \in \mathbf{R},$$

$$\tau \wedge \eta = \frac{(q+s)!}{q!s!} alt(\tau \otimes \eta).$$

(alternácia sa týka iba vektorových argumentov.)

6 Kontrakcia

Zobrazenie

$$\iota^\alpha_\beta : T^p_q(V_n) \ni \tau \longmapsto \iota^\alpha_\beta\tau \in T^{p-1}_{q-1}(V_n)$$

sa nazýva *kontrakcia* (= *úženie*) tenzoru v α-tom hornom a β-tom dolnom indexe. Obraz $\iota^\alpha_\beta\tau$ sa nazýva *stopa* tenzoru τ v indexoch α a β.

7 Znižovanie a zdvíhanie indexov

Nech $g \in T^0_2(V_n)$, resp. $\gamma \in T^2_0(V_n)$ je kovariantná, resp. kontravariantná metrika. Zobrazenie

$$T^p_q(V_n) \ni \tau \longmapsto \eta = \iota^\alpha_2(g \otimes \tau) \in T^{p-1}_{q+1}(V_n), 1 \le \alpha \le p$$

sa nazýva *zníženie* α-tého indexu (metrikou g). Zobrazenie

$$T^p_q(V_n) \ni \tau \longmapsto \eta = \iota^2_\beta(\gamma \otimes \tau) \in T^{p+1}_{q-1}(V_n), 1 \le \beta \le q$$

sa nazýva *zdvihnutie* β-tého indexu (metrikou γ).