DEFINICE 5

- **Normovaný vektorový prostor** je vektorový prostor(VP) V nad nějakým tělesem (třeba $\Re$) obohacený o **normu** p, která nám říká, jak je daný vektor velký. Tedy:

  $p : V \ni x \to \|x\| \in \Re :$

  1. $\|x\| \geq 0$ $(\|x\| \Leftrightarrow x \equiv 0)$
  2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \alpha \in \Re$
  3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

  Normu lze definovat pomocí skalárního součinu jako:
  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

- **Metrický vektorový prostor** je VP, ve kterém je definována vzdálenost dvou vektorů. Té se říká metrika ρ:

  $\rho : V \text{x} V \to \Re :$

  1. $\rho(x.y) \geq 0$
  2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
  4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

  Metriku lze pomocí normy nadefinovat jako:
  $\rho(x, y) = \|x - y\|$

- **Konvergentní posloupnost** je taková posloupnost a_n, která má limitu (vektor, ke kterému se nekonečně blíží). Tedy:
  $\exists L \in \Re :$
  $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} :$
  $\forall m \in \mathbb{N}, m > n$ platí:
  $\rho(a_m, L) < \epsilon$
  Tuto podmínku lze nadefinovat i pomocí normy a (v Hausdorfovském prostoru) i pomocí topologie, nejsme tedy vázáni na existenci metriky.

- Pomyslná limita, ke které zkoumaná posloupnost konverguje ale nemusí nutně ležet v daném vektorovém prostoru. Proto se definuje pojem **Cauchyovská posloupnost**. Ta musí splňovat následující podmínku:
  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} :$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_0$ platí:
$\rho(a_n - a_m) < \epsilon$
Opět lze tento pojem zavést i pomocí topologie, čili nejsme svázání existencí metriky.

- Pomocí těchto pojmů lze zavézt pojem **úplný vektorový prostor**. Podmínka úplnosti zní:
  Každá Cauchyovská posloupnost má limitu (konverguje)
  Tuto podmínku nelze formulovat topologicky - nejedná se tedy o topologický invariant.
  Do neúplného prostoru lze limity doplnit, čímž se z něj stane prostor úplný. Příkladem mohou být racionální čísla doplněná limitami na čísla reálná.

- **Banachův prostor** je úplný normovaný vektorový prostor.

- **Hilbertův prostor** je Banachův prostor obohacený o skalární součin.
  Ve fyzice se často objevuje Hilbertův prostor integrovatelných spojitých funkcí, normovaných tak, aby jejich integrál přes celý prostor by roven jedné, opatřený skalárním součinem $\langle\psi,\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \phi dx$

- Velice často pro zkoumání prostoru stačí daleko méně informací, než kolik je schováno ve skalárním součinu a metrice. Proto se zavádí pojem **Topologický prostor**. To je prostor (nemusí být nutně vektorový) opatřený **topologií** τ. Ta nám v podstatě říká, které množiny jsou otevřené. (Je to vlastně množina všech otevřených množin.) Topologie musí splňovat následující axiomy:

  1. $\emptyset \in \tau \ni V$
  2. $U_i \in \tau, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$ (libovolné sjednocení množin z τ stále leží v τ)
  3. $U_i \in \tau, i \in I$(konečná)$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i \in \tau$ (konečný průnik množin z τ leží v τ

  Z každé metriky lze sestavit topologii (klasická definice otevřené množiny), ale ne z každé topologie lze sestavit metriku.

- Topologický prostor nemusí být nutně vektorový. Strukturu vektorového a topologického prostoru má **Topologický vektorový prostor**, splňující následující axiomy:

1. je zde definovaná topologie
2. je zde definovaná struktura vektorového prostoru
3. operace sčítání a násobení skalárem jsou spojitá.

- Zobrazení je **spojité**, pokud se lze vhodnou volbou vzorů dostat jejich obrazy do libovolné blízkosti.
  Matematicky řečeno, pro vektorové prostory X a Y s metrikami ρ a σ:

  $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$

  $\forall x_0 \in X$ a $\forall \epsilon > 0, \epsilon \in \Re$
  $\exists \delta$:
  $\forall x \in X$: $\rho(x, x_0) < \delta$ platí:
  $\sigma(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

- Poněkud silnější požadavek je, aby hledané ϵ bylo společné pro všechny body z množiny vzorů. Pokud takové ϵ existuje řekneme, že je zobrazení **stejnoměrně spojité**. Matematicky:

  $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ je stejnoměrně spojité, když:

  $\forall \epsilon \exists \delta$ tak, že:
  $\forall x, y \in X$ platí:
  $\rho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \epsilon$

  Například stejnoměrně spojitá funkce na ohraničeném intervalu je omezená.

- Na zobrazení můžeme také pohlížet tak, že změní vzdálenosti jednotlivých bodů (body přeskládá a eventuálně přemístí do jiného prostoru s jinak definovanou metrikou). Z tohoto hlediska lze definovat **Lipschitzovu podmínku spojitosti**:

  Zobrazení $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ je lipschitzovsky spojité, když
  $\exists K > 0, K \in \Re$ tak, že
  $\sigma(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y),\ x, y \in X$
  Tato podmínka je ze všech tří spojitostí nejsilnější.

- Zobrazení nazveme **kontrakce**, pokud je vzdálenost obrazů menší, než vzdálenost bodů. To lze pomocí konstanty K z Lipschitzovi podmínky definovat jako: $K < 1$

- **Izometrické zobrazení** je takové zobrazení, které zachovává vzdálenosti. Tedy:

  $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ je izometrie, když:
  $\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y))$

- **Homeomorfismus** je zobrazení f, které zachovává topologické vlastnosti. na to musí být splněny následující podmínky:

  1. f je bijekce
  2. f je spojité
  3. inverzní zobrazení f^{-1} je spojité

- V Eukleidovském prostoru jsme schopni libovolné dvě disjunktní otevřené množiny oddělit čárou. Tento fakt však při práci s abstraktnějšími prostory není samozřejmostí. Proto se zavádí pojem **Separabilní prostor**, který je definován následující podmínkou:
  Prostor V je separabilní, pokud v něm existuje spočetná hustá podmnožina M (V libovolné blízkosti libovolného bodu V se nachází alespoň jeden bod z M)

- Máme-li ve vektorovém prostoru nadefinovaný skalární součin, můžeme hovořit o **ortogonalitě** a **normování**

- **Ortogonální soubor** prvků je takový soubor $a_i \in V$, pro který platí:

  $i \neq j \Leftrightarrow \langle a_i, a_j \rangle = 0$

- **ortonormální soubor** prvků $a_i \in V$ je takový soubor, pro který platí:

  $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{i,j}$
  Oproti ortogonální souboru máme jistotu jednotkové normy (indukované skal. souč.) každého z vektorů tohoto souboru.

- V konečně rozměrném VP V nazveme soubor vektorů **úplný**, pokud pomocí něj lze lineární kombinací vyjádřit libovolný vektor z V, tedy:
  $\{e_i\}$ je úplný $\Leftrightarrow \forall v \in V \exists \{v_i\}$:
  $\sum_i v_i e_i = v$
  V nekonečně rozměrných prostorech však musíme být trochu opatrnější.

- **Úplný ortogonální soubor** S je takový soubor, pro který platí:

  $\forall x \in S$ platí:
  $\langle y, x\rangle = 0 \forall x \in S \Rightarrow y = 0$

  Jinými slovy neexistuje nenulový vektor, který je kolmý ke všem stávajícím.

- **uzavřený ON soubor** je takový soubor, jehož uzávěrem lineárního obalu je celý prostor:
  $S \subset X, X = \bar{A}$, kde $A = [\![S]\!]$
  Úplný a uzavřený ON soubor jsou v prostorech konečné dimenze a v nekonečně rozměrných Hilbertových prostorech totožné.

- Mějme Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. V takovém prostoru bude soubor funkcí $\{1, \frac{1}{\pi}\sin nt, \frac{1}{\pi}\cos nt\}$ tvořit ON-bázi. V této bázi lze každou funkci přibližně vyjádřit jako **Fourierovu řadu**:

  $f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kt) + b_k \sin kt]$, $k \in \mathbb{N}$
  Kde **koeficienty** a_k a b_k spočteme jako:

  $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$
  $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$

- V **kvantové mechanice** se používá Hilbertův prostor (H) kvadraticky integrovatelných (ve smyslu Lebesgueova integrálu) komplexních funkcí , tedy:

  $\phi \in H \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx < \infty$
  Tento prostor dále opatříme skalárním součinem:
  $\langle \psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \phi dx$

  Dále budeme chtít funkce $|\psi(x)|^2$ a $|\phi(x)|^2$ považovat za hustotu pravděpodobnosti v daném bodě. Proto budeme požadovat:
  $\phi, \psi \in H \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

  Jedná se vlastně o fázový prostor popisující zkoumaný systém. Každý jeho prvek popovídá právě jednomu stavu tohoto systému.

- Mějme operátor $A : X \to Y$. Takový operátor nazveme **ohraničený** (omezený), jestliže:

$\exists \mu > 0, \mu \in \Re$:
$\forall f \in X$:
$\|Af\|_Y \leq \mu \|f\|_X$
Kde indexy X a Y značí, ve kterém prostoru se norma počítá.

- Vektor ψ nazveme **vlastním vektorem** operátoru A, pokud se jím zobrazí na nějaký svůj násobek. Tedy:
  $A\psi = \alpha\psi,\ \alpha \in \Re$
  Každý operátor má charakteristické vlastní vektory s charakteristickými vlastními čísly. Soubor vlastních čísel se nazývá **spektrum operátoru** A.

- Spektrum operátoru může být tvořeno diskrétní množnou prvků. Takovému spektrum se říká **diskrétní**. Opakem je spektrum **spojité**, jehož hodnoty tvoří spojitý interval. Poslední variantou je spektrum **reziduální**, které je z části spojité a z části diskrétní.

- Soubor vektorů je **lineárně nezávislý**, pokud platí:
  $\sum_i (\alpha_i \vec{x}_i) = 0 \Rightarrow \sum_i |\alpha_i| = 0$
  Tedy aby byl součet skalárních násobků lineárně nezávislých vektorů roven vektoru nulovému, musí být každý jeden vektor z tohoto souboru vynásobený nulou.

- **Hamelova báze** je báze v nekonečně rozměrném prostoru, se kterou pracujeme tak, jak jsme zvyklí pracovat s bázemi konečně rozměrných prostorů. Každý vektor lze napsat jako lineární kombinaci konečného množství prvků báze, ale jejich počet není nijak omezený.
  Například standardní báze v prostoru polynomů.

- **Schauderova báze** je báze v nekonečně rozměrném prostoru definovaná limitně, pomocí normy:
  $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$
  Chápáno ve smyslu:
  $\lim_{x\to\infty} \|\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| = 0$
  Výhodou oproti Hamelově bázi je možnost vytvořit vektor jako lineární kombinaci nekonečného množství bázových vektorů