1 Skalární součin

Vektorový prostor, vektorový podprostor, lineární závislost a nezávislost souboru vektorů, báze a dimenze vektorového prostoru, lineární obal množiny, součet a přímý součet podprostorů, doplněk. Skalární součin, ortogonální a ortonormální soubor vektorů, ON báze, ortogonální doplněk, ortogonální projekce a komponenta.

---

1. Skalární součin v $\mathbf{R}^2$ je definovaný standardně: $\langle (x_1, x_2) \mid (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Dokažte, že toto číslo je součinem velikostí vektorů a kosinu úhlu, který svírají.

2. Pro $\vec{u}, \vec{v} \in V$ nad $\mathbf{K}$ dokažte:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Longleftrightarrow ||\vec{u}|| \leq ||\vec{u} + a\vec{v}||, \quad \forall a \in \mathbf{K}.$$

3. Víme, že $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 4$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 6$. Určete $||\vec{v}||$.

4. Rozhodněte, zda existuje skalární součin v $\mathbf{R}^2$, který by indukoval normu: $(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$.

5. Pro reálný vektorový V prostor dokažte:

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

6. Pro komplexní vektorový prostor V dokžte:

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 + ||\vec{u} + \mathrm{i}\vec{v}||^2 \mathrm{i} - ||\vec{u} - \mathrm{i}\vec{v}||^2 \mathrm{i}\right), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

7. *Norma* na vektorovém prostoru V je funkce:$|| \cdot || : V \to \langle 0, \infty)$, splňující:

- $||\vec{u}|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = \vec{o}$,
- $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$,
- $||\alpha\vec{u}|| = |\alpha| ||\vec{u}||$.

Jak skalární součin indukuje normu? Uveďte příklad normy, pro kterou neexistuje skalární součin, který by ji indukoval. Norma je totiž indukována skalárním součinem právě tehdy, když splňuje rovnoběžníkovou rovnost

$$||a+b||^2 + ||a-b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2).$$

8. Na vektorovém prostoru spojicých funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ je definován skalární součin:

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x.$$

Ukažte, že systém funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}. \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$$

je ortonormální.

9. Pomocí ortogonalizačního procesu ortogonalizujte standardní bázi v prostoru polynomů, je-li skalární součin definován jako určitý integrál ze součinu polynomů v mezích od nuly do jedné. Podobné příklady vymyslete i v jiných prostorech. Co se stane, když ortogonalizační proces aplikujeme na systém, který je závislý?

10. Dokažte, že v každém prostoru se skalárním součinem konečné dimenze existuje ortonormální báze.

11. Nechť $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ je ortonormální systém vektorů. Dokažte, že

$$||\vec{v}||^2 = |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_1 \rangle|^2 + \ldots + |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_n \rangle|^2$$

právě tehdy, když $\vec{v} \in [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n]$.

12. Nalezněte ortonormální bázi v prostoru polynomů (skalární součin definován standardně integrálem) takovou, že operátor derivace je v ní reprezentován horní trojúhelníkovou maticí.

13. Jaký je vztah mezi dimenzí podprostoru a jeho ortogonálního doplňku. Dokažte.

14. Nechť pro lineární operátor platí: $P \circ P = P$ a každý vektor z jádra je ortogonální ke každému vektoru z obrazu. Ukažte, že P je ortogonální projekce.

15. Nechť pro lineární operátor platí: $P \circ P = P$ a $||P(\vec{v})|| \leq ||\vec{v}||$ pro každý vektor $\vec{v}$. Ukažte, že P je ortogonální projekce.

16. Ukažte, že podprostor U je invariantní vzhledem k lineárnímu operátoru T právě tehdy, když

$$P_U \circ T \circ P_U = T \circ P_U.$$

17. Ukažte, že podprostor U i jeho ortogonální doplněk jsou oba invariantní vzhledem k operátoru T právě tehdy, když P_U a T komutují.

18. V $\mathbf{R}^4$ je $U = [(1,1,1,2),(1,1,0,0)]$. Nalezněte vektor $\vec{u} \in U$ tak, aby vektor $(\vec{u} - (1,2,3,4))$ byl co nejmenší.

19. Nalezněte polynom p v prostoru polynomů stupně nejvýše 3 takový, že $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$ a aby integrál $\int_0^1 [2 + 3x - p(x)]^2 \mathrm{d}x$ byl co nejmenší.

20. V prostoru polynomů stupně nejvýše dva nalezněte polynom q tak, že pro libovolný polynom p platí:

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 p(x) \cdot q(x) \mathrm{d}x.$$

2 Vlastní vektory

Lineární zobrazení, lineární operátor, jádro, image, vlastní vektor a vlastní hodnota, samoadjungovaný operátor, unitární operátor, normální operátor, spektrální reprezentace.

---

1. Nechť $T \in L(V,V)$ a podprostory $U_1, \ldots, U_m$ jsou invariantní vzhledem k T. Ukažte, že jejich součet je invariantní vzhledem k T.

2. Ukažte, že průnik libovolného souboru podprostorů invariantních vzhledem k T je invariantní vzhledem k T.

3. Rozhodněte (a dokažte), zda platí následující tvrzení: Je-li U podprostor V invariantní vzhledem ke každému $T \in L(V,V)$, pak $U = \{\vec{o}\}$ nebo $U = V$.

4. Nechť $T, S \in L(V,V)$ komutují. Ukažte, že podprostor $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$ je invariantní vzhledem k S pro každé λ.

5. Nechť $T \in L(\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2)$, $T(z,w) = (w,z)$. Najděte jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory. (Podobně pro $T \in L(\mathbf{C}^3, \mathbf{C}^3)$, $T(x,y,z) = (2y, 0, 5z)$.)

6. Nechť $T \in L(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n)$,

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Nalezněte jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

7. Nechť $T \in L(\mathbf{C}^\infty, \mathbf{C}^\infty)$, $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Nalezněte jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

8. Dokažte, že pro regulární $T \in L(V,V)$ je $\lambda \neq 0$ vlastní hodnotou T právě tehdy, když $1/\lambda$ je vlastní hodnotou T^{-1}.

9. Nechť $S, T \in L(V,V)$. Dokažte, že ST a TS mají stejné vlastní hodnoty.

10. Popište množinu všech lineárních zobrazení v $L(V,V)$, pro které platí, že každý vektor $\vec{v} \in V$ je jejich vlastním vektorem.

11. Popište množinu všech lineárních zobrazení v $L(V,V)$, pro které platí, že každý podprostor dimenze $(\dim V - 1)$ je vzhledem k nim invariantní.

12. Nechť $T, S \in L(V,V)$ jsou regulární. p je polynom (v odpovídajícím tělese). Ukažte, že:

$$p(STS)^{-1} = Sp(T)S^{-1}.$$

13. Nad **C**: Nechť $T \in L(V, V)$, p je polynom. Ukažte, že a je vlastní hodnota $p(T)$ právě tehdy, když $a = p(\lambda)$ pro nějakou vlastní hodnotu λ zobrazení T.

14. Nad **C**: Dokažte, že každé $T \in L(V, V)$ má invariantní podprostor dimenze j, pro libovolné $j = 1, \ldots \dim V$.

15. Uveďte příklad regulárního lineárního operátoru, jehož matice v nějaké bázi má na diagonále samé nuly.

16. Uveďte příklad singulárního lineárního operátoru, jehož matice má v nějaké bázi na diagonále samá nenulová čísla.

17. Dokažte, že dva diagonalizovatelné operátory komutují právě tehdy, když mají stejný soubor vlastních vektorů. Je možné předpoklad diagonalizovatelnosti vynechat? (Zdůvodněte.)

18. Uveďte příklady operátorů v reálných vektorových prostorech různých dimenzí, které nemají žádný vlastní vektor. Ukažte, že každý invariantní podprostor vůči takovému operátoru musí mít sudou dimenzi.

19. Určete vlastní hodnoty projekce ($T^2 = T$) a involuce ($T^2 = \mathrm{Id}$).

20 V prostoru polynomů stupně nejvýše dva se standardně (integrálem od nuly do jedné) definovaným skalárním součinem je dáno zobrazení: $f(ax^2 + bx + c) = ax$. Ukažte, že toto zobrazení není samoadjungované. Najděte jeho matici ve standardní bázi. Ukažte, že je samoadjungovaná. Vysvětlete, jak je to možné?

21 Rozhodněte, zda platí: Složení dvou samoadjungovaných operátorů je samoadjungovaný operátor.

22. Ukažte, že pro euklidovský prostor E tvoří samoadjungované operátory podprostor v $L(E, E)$, zatímco pro unitární prostor U tomu tak není.

23. Definujte *normální* operátor a *normální* matici. Dokažte větu o spetkrální reprezentaci pro normální operátory: Nechť $\varphi \in L(U_n, U_n)$ je normální operátor. Pak existuje ortonormální báze prostoru U_n, v níž je operátor reprezentován diagonální maticí. Označme $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$

navzájem různé vlastní hodnoty a L_i vektorový podprostor prostoru U_n generovaný vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě λ_i, $1 \leq i \leq r$. Pak platí

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i, \quad \pi_i \circ \pi_j = \pi_i \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{r} \pi_i = \mathrm{id}_{U_n},$$

kde π_i je ortogonální projekce na podprostor L_i.

3 Tenzory

Tenzor typu (p,q) (co znamená slovo kovariantní a kontravariantní), duální prostor, duální báze, tenzorový součin, symetrizace, antisymetrizace (alternace), vnější součin, kontrakce (úžení) a stopa, úžení vektorovým nebo kovektorovým argumentem, snižování indexu, zvedání indexu, metrický tenzor, signatura.

---

1. Nechť e_1, e_2, e_3 je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$, $\omega \in \mathcal{T}_2^2\mathcal{V}$:

$$\omega = 1e_1 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1 +$$

$$+5e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^2 + 3e_1 \otimes e_3 \otimes e^2 \otimes e^2 -$$

$$-5e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^2 - 2e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 -$$

$$-1e_3 \otimes e_2 \otimes e^3 \otimes e^3 + 4e_3 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^2$$

Nechť

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je kovariantní metrika, zadaná v příslušné indukované bázi.

a) symetrizujte ω v horních indexech
b) antisymetrizujte ω v dolních indexech
c) úžete ω v prvém horním a druhém dolním indexu
d) úžete ω vektorovým argumentem $\xi = 1e_1 + e_3$ na druhé pozici
e) úžete ω kovektorovým argumentem $\xi = -\frac{1}{3}e^3 + e^2$ na druhé pozici
f) spočtěte všechny stopy výsledku příkladu d)
g) spočtěte všechny stopy výsledku příkladu e)

h) určete kontravariantní metriku (g^{ij})
i) snižte první horní index u tenzoru ω na pozici druhého dolního pomocí metriky
j) zvedněte dolní index výsledku příkladu c) na pozici druhého horního (pozn. výsledky, pokud možno, vyjádřete stejnou formou jako je zadání, vždy napište, do jakého prostoru patří váš výsledek)

2. Jednu z výše použitých operací definujte, odvoďte vztahy pro složky a dokažte nezávislost na bázi.

3. Definujte tenzorový součin prostorů $T_1 \otimes T_2$. Lze každý tenzor z $T_1 \otimes T_2$ zapsat ve tvaru $\alpha \otimes \beta$, kde $\alpha \in T_1$, $\beta \in T_2$? Odpověď zdůvodněte.

4. Nalezněte bázi duální k bázi $e_1 = (2, -2, 0), e_2 = (1, 2, 3), e_3 = (0, 0, -1)$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Nalezněte složky lineární formy ω v této bázi, je-li $\omega(x) = x^1 + x^2 - 2x^3$.

5. Buď (e_i) báze ve $\mathcal{V}$, (e^i) báze ve $\mathcal{V}^*$, k ní duální, dim$\mathcal{V} = n$. Vypočtěte:
a)$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$
b)$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
c)$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$
d)$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
e)$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$
f)$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
g)$\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
h)$\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$

6. Ukažte, že vztah $\xi \otimes \eta = \xi^i \eta^\alpha e_i \otimes f_\alpha$ je definován nezávisle navolbě báze.

7. Přepište následující vztahy do složek:
$(\xi + \eta) \otimes \lambda = \xi \otimes \lambda + \eta \otimes \lambda$
$\xi \otimes (\eta + \lambda) = \xi \otimes \eta + \xi \otimes \lambda$
$(c_1\xi) \otimes (c_2\eta) = c_1c_2\xi \otimes \eta$
Dokažte.

8. Určete složky tenzoru $\Delta = \delta^i_j f_i \otimes f^j$ vůči bázi $e_i \otimes e^j$, matice přechodu mezi bázemi je A.

9. Je operace tenzorového součinu tenzorů komutativní? Dokažte.

10. Lze každý tenzor jednoznačně vyjádřit ve tvaru součtu symetrického a antisymetrického?

11. Určete dimenzi prostoru (vše nad $\mathcal{R}^n$):
a) úplně symetrických k-tenzorů
b) úplně antisymetrických k-tenzorů
c) symetrických tenzorů ve dvou indexech
d) antisymetrických tenzorů ve dvou indexech
e)tenzorů typu $(1, 2)$ symetrických ve spodních dvou indexech (tenzor torze)
f) tenzorů typu $(0, 4)$ antisymetrických v prvních dvou indexech, v posledních dvou indexech a symetrických vůči záměně první a druhé dvojice indexů.
g) stejně jako f), ale navíc splňují rovnost $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$ (tenzor křivosti).

12. Sestavte úplně symetrický tenzor čtvrtého řádu, jehož všechny složky jsou invariantní vůči transformaci souřadnic.

4 Hilbertovy prostory

Hilbertův prostor, Banachův prostor, normovaný lineární prostor (NLP), metrický prostor, topologický prostor - souvislosti. Konvergentní a cauchyovská posloupnost, úplnost. Homeomorfismus, spojité zobrazení, stejnoměrně spojité zobrazení, Lipschitzovsky spojité zobrazení, kontrakce, izometrické zobrazení. Separabilní prostor. Ortogonální a ortonormální soubor prvků v Hilbertově prostoru. Úplný a uzavřený ortonormální soubor. Fourierovy koeficienty vzhledem k ON-souboru. Lineární nezávislost souboru prvků v nekonečněrozměrném prostoru. Duální prosor k NLP versus algebraický duál. Co je reflexivní prostor? Ohraničený operátor. Spektrum operátoru (diskrétní, spojité, residuální). Hamelova a Schauderova báze.

---

1. Ukažte ortogonalitu systému $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že Fourierova řada 2π-periodické funkce má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2. Ukažte, že V je nekonečněrozměrný právě tehdy, když existuje posloupnost $(v_1, v_2, \ldots)$ prvků V taková, že $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je lineárně nezávislý soubor pro každé $n \in \mathbf{N}$.

3. Ukažte, že $\mathbf{C}^\infty$ a $\mathbf{R}^\infty$ jsou nekonečněrozměrné prostory.

4. Ukažte, že $C[a, b]$ prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je nekonečněrozměrný.

5. Ukažte, že vektorový prosor $\mathbf{R}$ nad polem $\mathbf{Q}$ je nekonečněrozměrný.

6.Nechť $H = L^2[-\pi, \pi]$ je Hilbertův prostor kvadraticky integrabilních funkcí se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že operátor $A(y) = y''$ definovavý na $D(A) = \{y \in L^2[-\pi, \pi], y(-\pi) = y(\pi) = 0\}$ (tzv. *Dirichletovy podmínky*) je symetrický, tj.

$$\langle A(y)|z\rangle = \langle y|A(z)\rangle, \quad \forall y, z \in D(A).$$

Nalezněte jeho vlastní čísla a vlastní funkce a normujte je.

7. Nechť $H = L^2[-\pi, \pi]$ je Hilbertův prostor kvadraticky integrabilních funkcí se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že operátor $A(y) = y''$ definovavý na $D(A) = \{y \in L^2[-\pi, \pi], y'(-\pi) = y'(\pi) = 0\}$ (tzv. *Neumanovy podmínky*)je symetrický, tj.

$$\langle A(y)|z\rangle = \langle y|A(z)\rangle, \quad \forall y, z \in D(A).$$

Nalezněte jeho vlastní čísla a vlastní funkce a normujte je.

8. Řešte předchozí úlohu pro interval $[-h, h]$.

9. Ukažte, že *Sturm-Liouvillův operátor* na $L^2[a, b]$:

$$Af = (pf)' + qf, \quad D(A) = \{y|y(a) = y(b) = 0\}$$

je symetrický.

10. Ukažte, že pro $p = 1 - x^2$ a $q = 0$ není třeba klást podmínky na definiční obor Sturm-Liouvillova operátoru z předchozí úlohy a že jeho vlastní čísla jsou $n = 0, 1, 2, \ldots$ a vlastní funkce *Legendreovy polynomy*:

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n.$$

Normujte je.

11. Uveďte příklad zobrazení, které je spojité, ale není stejnoměrně spojité.

12. Uveďte příklad úplného a neúplného metrického prostoru, které jsou homeomorfní.

13. Uveďte příklad dvou norem resp. metrik na vektorovém prostoru V tak, že (V, ϱ_1) je úplný a (V, ϱ_2) je neúplný prostor.

14. Najděte spektrum operátoru

$$T : \mathbf{C}^\infty \ni (x_1, x_2 \ldots) \to T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) \in \mathbf{C}^\infty.$$

Ukažte, že T je injektivní, nalezněte $T^{-1} : ImT \to \mathbf{C}^\infty$.