1. Definujte *normu* a *skalární součin* ve vektorovém prostoru. Jak skalární součin indukuje normu? Dokažte:

> Norma ve vektorovém prostoru V nad ($\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ - vybrat si) je indukována skalárním součinem právě tehdy, když splňuje rovnoběžníkovou rovnost
>
> $$||a+b||^2 + ||a-b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2).$$

Nad $\mathbf{R}$ pak platí:

$$(a,b) = \frac{1}{4}(||a+b||^2 - ||a-b||^2),$$

nad $\mathbf{C}$:

$$(a,b) = \frac{1}{4}\left(||a+b||^2 - ||a-b||^2 + \mathrm{i}||a+\mathrm{i}b||^2 - \mathrm{i}||a-\mathrm{i}b||^2\right).$$

---

2. Definujte *metriku* (jako tenzor) a její *signaturu.* (Jaké metriky rozlišujeme ve fyzice podle signatury? Jak souvisí metrika–tenzor s metrikou definovanou v metrických prostorech?) Dokažte Sylvestrův zákon setrvačnosti:

> Pro každou reálnou čtvercovou symetrickou matici A existuje regulární matice S tak, že $SAS^T = D$, kde D je diagonální matice s čísly pouze 1, -1 resp. 0, je určena jednoznačně, až na pořadí čísel na diagonále (tj. počet jedniček, mínus jedniček a nul je vždy stejný — signatura).

---

3. Definujte *normální* operátor a *normální* matici (hermiteovský, antihermiteovský a unitární operátor jsou jeho speciální případy). Dokažte větu o spetkrální reprezentaci pro normální operátory:

Nechť $\varphi \in L(U_n, U_n)$ je normální operátor. Pak existuje ortonormální báze prostoru U_n, v níž je operátor reprezentován diagonální maticí. Označme $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ navzájem různé vlastní hodnoty a L_i vektorový podprostor prostoru U_n generovaný vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě λ_i, $1 \le i \le r$. Pak platí

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i, \quad \pi_i \circ \pi_j = \pi_i \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{r} \pi_i = \mathrm{id}_{U_n},$$

kde π_i je ortogonální projekce na podprostor L_i.

---

4. Definujte *Hilbertův prostor*. Definujte *úplnou ortonormální množinu* v Hilbertově prostoru a *uzavřenou ortonormální množinu* v Hilbertově prostoru. Dokažte:

Nechť H je Hilbertův prostor a $S \subset H$ ortonormální množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- S je úplná.
- S je uzavřená.
- Pro každé $x \in H$ platí *Parsevalvova rovnost*:

$$\sum_{u \in S} |\langle x|u \rangle|^2 = ||x||^2.$$

---

5. Definujte *skalární součin* ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{C}$ a dokažte Schwarzovu nerovnost:

$$|\langle x|y \rangle| \le ||x|| \cdot ||y||.$$
