0.0.1 Spektrální reprezentace a normální operátory

Nejprve ještě trocha obecně užitečné terminologie, ať již připomenuté z dřívějška, nebo nové, která se bude týkat také vektorových prostorů se skalárním součinem.

Matice $A \in \mathcal{M}(n/n)$ se nazývá *normální*, komutuje-li se svou maticí transponovanou a komplexně sdruženou, tj. platí-li $AA^{T*} = A^{T*}A$.

Věta 0.1 (Spektrální věta pro normální matice): *Matici $A \in \mathcal{M}(n/n)$ lze převést na diagonální tvar podobnostní transformací TAT^{-1}, kde T je unitární matice, právě tehdy, je-li matice A normální.*

Především se zaměřme na zjištění, zda v případě, že matice A je normální, je normální také matice $B = TAT^{-1} = TAT^{T*}$ získaná podobnostní transformací s unitární maticí T. Dostáváme (připomeňte si vlastnosti matic a maticového násobení a odůvodněte jednotlivé kroky výpočtu)

$$BB^{T*} - B^{T*}B = (TAT^{-1})(TAT^{-1})^{T*} - (TAT^{-1})^{T*}(TAT^{-1}) =$$

$$= TAT^{-1}(T^{-1})^{T*}A^{T*}T^{T*} - (T^{-1})^{T*}A^{T*}T^{T*}TAT^{-1} = T(AA^{T*} - A^{T*}A)T^{-1}.$$

Je vidět, že platí-li $AA^{T*} = A^{T*}A$, platí i $BB^{T*} = B^{T*}B$, a samozřejmě také naopak. Protože každá diagonální matice je normální (ověřte), máme jeden směr ekvivalence v tvrzení 0.1 dokázán: lze-li matici A převést podobnostní transformací s unitární maticí na diagonální tvar, musí být matice A normální. Opačný směr důkazu využívá vlastností *normálních* operátorů v prostorech se skalárním součinem, o nichž si něco řekneme a pomocí jejich vlastností důkaz věty 0.1 dokončíme.

Nechť $\varphi \in L(V_n, V_n)$ je lineární operátor ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{C}$, resp. nad $\mathbf{R}$. Soubor $\operatorname{Sp}\varphi$ jeho vlastních hodnot se nazývá jeho *spektrum*. Číslo $\varrho(\varphi) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Sp}\varphi\}$ se nazývá *spektrální poloměr* operátoru φ.

Nechť $\varphi \in L(U_n, U_n)$ je lineární operátor v unitárním vektorovém prostoru (nad $\mathbf{C}$), resp. $\varphi \in L(E_n, E_n)$ je lineární operátor v euklidovském vektorovém prostoru (nad $\mathbf{R}$). Operátor φ^* se nazývá *sdružený k operátoru* φ, jestliže pro každé dva vektory $a, b \in U_n$, resp. $a, b \in E_n$, platí

$$(\varphi(a), b) = (a, \varphi^*(b)). \tag{1}$$

Operátor φ se nazývá

- *hermiteovský* (*samoadjungovaný*), resp. *symetrický*, jestliže je $\varphi^* = \varphi$,
- *antihermiteovský*, resp. *antisymetrický*, jestliže je $\varphi^* = -\varphi$,
- *normální*, jestliže je $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.

Pojem antihermiteovského či antisymetrického operátoru a pojem normálního operátoru doplňují terminologii, kterou jsme zavedli pro lineární operátory v prostorech se skalárním součinem již v kapitole 6 druhého dílu. Tam jsme definovali unitární a samoadjungovaný (nazývaný zejména fyziky též *hermiteovský*) operátor, aniž jsme potřebovali pojem sdruženého operátoru. V situaci, kdy jsme pojem sdruženého operátoru definovali, je zřejmé, že definičním vztahem pro samoadjungovaný operátor je rovnost $\varphi^* = \varphi$ a definičním vztahem pro unitární operátor pak rovnost $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

Přeskočte teď k úloze 12 Cvičení 16.3.4 a zjistěte, jakou maticí je reprezentován normální operátor v ortonormálních bázích unitárního (nad $\mathbf{R}$ euklidovského) prostoru. V odstavci 16.2.5 jsme s odkazem na normální operátory slíbili druhý směr důkazu spektrální věty pro normální matice (věta 0.1), reprezentující v ortonormálních bázích právě normální operátory. Vlastnosti normálních operátorů, které jsou pro důkaz podstatné, se samozřejmě týkají vlastních hodnot a vlastních vektorů (jak jinak — potřebujeme přece dokázat, že soubor vlastních vektorů normálního operátoru generuje celý vektorový prostor U_n a zajistí tak existenci diagonální reprezentace operátoru) a dokazují docela jednoduše:

- Nejprve uvažujme o lineárním operátoru φ v U_n a operátoru sdruženém φ^*, aniž předpokládáme cokoli dalšího. Označme $\mathcal{L}$ invariantní podprostor operátoru φ a $\mathcal{L}_\perp$ jeho ortogonální doplněk. Zvolme libovolný vektor $a \in \mathcal{L}$. Pak $\varphi(a) \in \mathcal{L}$. Pro libovolný vektor $b \in \mathcal{L}_\perp$ platí
$$(\varphi^*(b), a) = (b, \varphi(a)) = 0 \implies \varphi^*(b) \in \mathcal{L}_\perp,$$
takže $\mathcal{L}_\perp$ je invariantním podprostorem operátoru φ^*.

- Položme si otázku, zda vlastní hodnoty a vlastní vektory normálního operátoru nějak souvisejí s vlastními hodnotami operátoru s ním sdruženého. Z toho, co víme o speciálních případech normálních operátorů, operátorech unitárních a samoadjungovaných, očekáváme, že zde nějaká souvislost bude. Označme a vlastní vektor operátoru φ příslušný vlastní hodnotě λ. Pak

$$\varphi(a) - \lambda a = 0_{U_n} \implies$$

$$(a, (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(a)) = ((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(a), (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(a)) = 0.$$

S využitím předpokladu, že operátor φ je normální, a skutečnosti, že operátorem sdruženým k α-násobku operátoru φ je α^*-násobek operátoru φ^* (dokažte), dostaneme

$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n}) = \varphi^*\varphi - \lambda\varphi^* - \lambda^*\varphi + |\lambda|^2\,\mathrm{id}_{U_n} =$$

$$\varphi\varphi^* - \lambda\varphi^* - \lambda^*\varphi + |\lambda|^2\,\mathrm{id}_{U_n} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*,$$

a odtud

$$((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(a), (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(a)) = (a, (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(a)) = 0_{U_n} \implies$$

$$\implies \varphi^*(a) - \lambda^* a = 0_{U_n}.$$

Vektor a je tedy také vlastním vektorem operátoru φ^*, přísluší však vlastní hodnotě λ^*. Operátory φ a φ^* mají stejný soubor vlastních vektorů.

- Předchozí vlastnost má jednoduchý, ale důležitý důsledek: Nechť $\mathcal{L} = [|a_1, \ldots, a_k|]$, $1 \leq$ $\leq k \leq n$ je vektorový podprostor v U_n generovaný vlastními vektory operátoru φ. Tento podprostor je invariantním podprostorem jak operátoru φ, tak operátoru φ^*. Díky první vlastnosti, týkající se navzájem sdružených operátorů obecně, je také ortogonální doplněk $\mathcal{L}_\perp$ invariantním podprostorem obou operátorů.

- A co myslíte, že bude platit o dvou vlastních vektorech a a b normálního operátoru, příslušných různým vlastním hodnotám λ_a a λ_b? Pro speciální typy normálních operátorů, jimiž jsme se zabývali v kapitole 6, jsme ukázali, že takové vlastní vektory jsou ortogonální (věty 6.1 a 6.2). Vyzkoušíme, zda to platí pro normální operátory obecně. Pro

$$\varphi(a) = \lambda_a a, \quad \varphi(b) = \lambda_b b, \quad \lambda_a \neq \lambda_b,$$

  dostaneme (s využitím předchozí vlastnosti)

$$= (\varphi(a), b) - (a, \varphi^*(b)) = (\lambda_a a, b) - (a, \lambda_b^* b) = (\lambda_a - \lambda_b)(a, b) \implies (a, b) = 0.$$

Nyní už snadno dokončíme důkaz spektrální věty 16.13, kterou pro normální operátory můžeme přeformulovat takto:

Věta 0.2 (O spektrálním rozkladu normálního operátoru): *Nechť $\varphi \in L(U_n, U_n)$ je normální operátor. Pak existuje ortonormální báze prostoru U_n, v níž je operátor reprezentován diagonální maticí. Označme $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ navzájem různé vlastní hodnoty a L_i vektorový podprostor prostoru U_n generovaný vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě λ_i, $1 \leq i \leq r$. Pak platí*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i, \quad \pi_i \circ \pi_j = \pi_i \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{r} \pi_i = \mathrm{id}_{U_n}, \tag{2}$$

kde π_i je ortogonální projekce na podprostor L_i.

Klíčem k důkazu existence diagonální reprezentace je právě skutečnost, že podprostor $\mathcal{L}_\perp$, který je ortogonálním doplňkem libovolného podprostoru $\mathcal{L}$ generovaného vlastními vektory operátoru φ, je *invariatní* vzhledem k operátoru φ. Označme $\mathcal{L}_\perp = (L_1)_\perp \cap \ldots \cap (L_r)_\perp = (L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_r)_\perp$ ortogonální doplněk invariantního podprostoru $\mathcal{L} = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_r$. Zúžíme-li operátor φ na podprostor $\mathcal{L}_\perp$, můžeme najít jeho vlastní vektor v tomto prostoru — to je však spor s předpokladem, že každý z podprostorů L_i, $1 \leq i \leq r$ obsahuje *všechny* vlastní vektory příslušné λ_i a žádnou další vlastní hodnotu operátor φ nemá. Podprostor $\mathcal{L}_\perp$ musí být proto triviální, tj. $\mathcal{L}_\perp = 0_{U_n}$, a $\mathcal{L} = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_r = U_n$ (podrobně jsme tyto skutečnosti rozebrali na sraně 170 druhého dílu v analogickém důkazu pro unitární operátor).

V každém prostoru L_i můžeme pomocí ortogonalizačního procesu a normování najít ortonormální bázi. Dostaneme tím nakonec ortonormální bázi v celém prostoru U_n tvořenou společnými vlastními vektory operátorů φ a φ^*.

Vztah (2) je již zřejmým důsledkem předchozího důkazu. Připomeňme ještě, že pro projekce π_i, $1 \leq i \leq r$, platí stejné vztahy jako (6.9) v odstavci 6.1.3, $\pi_1 + \cdots + \pi_r = \mathrm{id}_{U_n}$, $\quad \pi_i \circ \pi_j = \pi_j \circ \pi_i = \pi_i \delta_{ij}$.

Vztah (2) se nazývá *spektrální reprezentace*, neboli *spektrální rozklad* lineárního operátoru pomocí projekcí.

Pozn.: O spektrální reprezentaci jsme už mluvili v souvislosti se samoadjungovanými operátory. Nyní jsme ji rozšířili na větší třídu operátorů, operátory normální, s tím, že další rozšíření již není možné, neboť věta 0.1 představuje podmínku nutnou a postačující. (Samoadjungovaný operátor je totiž speciálním případem normálního operátoru, neboť z jeho definičního vztahu $\varphi^* = \varphi$ plyne okamžitě $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^2 = \varphi^* \circ \varphi$. Každý samoadjungovaný operátor je tedy normální, ale obecně ne naopak.)

Co myslíte, platí věta 0.2 i v případě, že máme co do činění s lineárním operátorem

$\varphi \in L(E_n, E_n)$? Nebo musíme dodat nějaký další předpoklad? (Na tuto otázku snadno odpovíte, uvědomíte-li si, jaká je nutná a postačující podmínka kladená na charakteristické kořeny operátoru $\varphi \in L(E_n, E_n)$, aby vůbec mohl být v nějaké vhodné bázi prostoru E_n nad $\mathbf{R}$ reprezentován Jordanovou maticí.)