PÍSEMKA - MATEMATICKÉ REPETITORIUM
František Martínek

1. Jsou zadány 2 komutující operátory ϕ, ψ. Chceme ukázat, že podprostor $L = Ker(\psi - \lambda\,\mathrm{Id})$ je invariantní vzhledem k ϕ, Tedy že $(\psi - \lambda\,\mathrm{Id})\phi a = 0 \forall a \in Ker(\psi - \lambda\,\mathrm{Id})$.

   Nechť $a \in \mathrm{Ker}(\psi - \lambda\,\mathrm{Id})$. Pak platí:

   $$(\psi - \lambda\,\mathrm{Id})\phi a = \psi\phi a - \lambda\,\mathrm{Id}\,\phi a = \phi(\psi a - \lambda\,\mathrm{Id}\,a) = 0$$

   $$\implies \phi a \in \mathrm{Ker}(\psi - \lambda\,\mathrm{Id}).$$

2. Máme zadaný operátor $\phi : P_1[x] \to P_1[x]$ nad $\mathbf{R}$ následovně:

   $$\phi(ax + b) = -ax + a + b$$

   Skalární součin je definován jako:

   $$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

   (a) Dokážeme, že takto zadaný operátor je symetrický (platí: $\langle a, \phi(b)\rangle = \langle \phi(a), b\rangle$)

   $$\langle ax + b| - cx + c + d\rangle = b(c + d) + (a + b)d$$
   $$\langle -ax + a + b|cx + d\rangle = (a + b)d + b(c + d)$$

   (b) Spočteme spektrální rozklad ϕ.

      i. Bázové vektory $(x, 1)$ netvoří ortogonální systém, jelikož $\langle 1|x\rangle = 1$. Provedeme tedy ortogonalizaci:

      $$e_1 \equiv x$$

      $$e_2 = x - \frac{\langle 1|x\rangle}{\langle x|x\rangle}x = 1 - x$$

      Je hned vidět, že jsou oba vektory jednotkové. V této bázi bude operátor ϕ raprezentován maticí:

      $$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. Nalezneme vlastní hodnoty operátoru ϕ:

$$\det(\phi - \lambda E) = 0$$
$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

iii. Nalezneme vlastní vektory k příslušným lambdám:

$$(\phi - \lambda_{1,2} E) u_{1,2} = 0$$
$$L_{\lambda_1} = \left[\left|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|\right]$$
$$L_{\lambda_2} = \left[\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right|\right]$$

iv. Spočteme matice projekce jako $P_{1,2} = C_{1,2} C_{1,2}^{T*}$, kde $C_{1,2}$ jsou normované vektory $u_{1,2}$. Spektrkální rozklad je potom

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

v. Převodem zpět do původní báze získáme předpis

$$\pi_1(ax+b) = \frac{a}{2} + b, \quad \pi_2(ax+b) = ax - \frac{a}{2}, \quad \phi = 1 \cdot \pi_1 + (-1) \cdot \pi_2.$$

vi. Příklad lze řešit i bez převodu do ON báze, když si uvědomíme, že $\mathrm{Im}\pi_1 = \mathrm{Ker}\pi_2 = L_{\lambda_1=1} = [|1|]$ a $\mathrm{Im}\pi_2 = \mathrm{Ker}\pi_1 = L_{\lambda_2=-1} = [|2x-1|]$ (je vidět ze zadání vpodstatě bez počítání), pak již předpis pro spetrální rozklad vytvoříme snadno (také téměř bez počítání).

3. V $\mathbf{R}^3$ je zadána báze

$$e_1 = (1,1,0), \quad e_2 = (0,1,1) \quad e_3 = (0,0,-2)$$

Nalezneme bázi duální. Pro tu platí $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Z čehož rovnou vidíme:

$$e^1(\xi) = \xi^1, \quad e^2(\xi) = -\xi^1 + \xi^2, \quad e^3(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^1 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3$$

Nakonec nalezneme předpis formy

$$\omega(\xi) = \xi^1 + \xi^2 + \xi^3 = -2e^3(\xi) + 2e^2(\xi) + 2e^1(\xi)$$
$$\omega = 2e^1 + 2e^2 - 2e^3$$

4. Je zadán tenzor $\omega \in \mathcal{T}_2^2(V)$, $\dim V = 2$ následovně:

$$\omega = e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 \otimes e^1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^1 + 3e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^2 +$$

$$+5e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 - 11e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1$$

(a) určíme dimenzi $\mathcal{T}_2^2(V)$.

$$\dim \mathcal{T}_2^2(V) = 2^4 = 16$$

(b) vypíšeme nenulové složky ω:

$$\begin{aligned} \omega^{11}_{11} &= 1 \\ \omega^{12}_{11} &= 2 \\ \omega^{12}_{21} &= -1 \\ \omega^{12}_{22} &= 3 \\ \omega^{21}_{11} &= 5 \\ \omega^{21}_{21} &= -11 \end{aligned}$$

(c) antisymetrizujeme ω v horních indexech:

$$\bar{\omega}^{ij}_{kl} = \frac{1}{2}(\omega^{ij}_{kl} - \omega^{ji}_{kl})$$

Celkem vyjde:

$$\bar{\omega} = -3e_1 \wedge e_2 \otimes e^1 \otimes e^1 + 10e_1 \wedge e_2 \otimes e^2 \otimes e^1 + 3e_1 \wedge e_2 \otimes e^2 \otimes e^2$$

(d) symetrizujeme ω v dolních indexech:

$$\tilde{\omega}^{ij}_{kl} = \frac{1}{2}(\omega^{ij}_{kl} + \omega^{ji}_{kl})$$

Celkem vyjde:

$$\tilde{\omega} = e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 \otimes e^1 - \frac{1}{2}e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 \otimes e^2 +$$

$$+3e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^2 + 5e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 - \frac{11}{2}e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 -$$

$$-\frac{1}{2}e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^1 - \frac{11}{2}e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1$$

(e) Zúžíme ω v prvním horním a prvním dolním indexu:

$$(\iota_1^1\omega)^i_j = \omega^{mi}_{mj}$$

Celkem vyjde:

$$\iota_1^1\omega = -10e_1 \otimes e^1 + 2e_2 \otimes e^1$$

(f) zúžíme ω vektorem $\xi = e_1 + e_2$, tedy vyčíslíme toto pole na druhém vektorovém argumentu. Vyjde:

$$\iota_2(\xi)\omega = e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 + 3e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 + 5e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 - 11e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 =$$

$$= e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 + 5e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 - 11e_2 \otimes e_1 \otimes e^2$$

(g) Zvedneme první dolní index na pozici třetího horního indexu. Metrika je zadaná jako:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a tudíž:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pro zvednutý index platí:

$$(g \uparrow_1^3 \omega)^{ijk}_l = \omega^{ij}_{ml} mk$$

Celkem vyjde:

$$g \uparrow_1^3 \omega = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 + 3e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 +$$

$$+6e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 \otimes e^2 - 6e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 - 17e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e^1$$

5. Mějme Hilbertův prostor $H = L^2[0,\pi]$ kvadraticky integrovatelných funkcí, se skalárním součinem definovaným jako:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) Ukážeme, že operátor $A(y) = y''$ je symetrický na $DA = \{y \in L^2[0,\pi], y(0) = 0, y(\pi) = 0\}$ Potom musí platit:

$$\langle f''|g\rangle = \langle f|g''\rangle$$

To si snadno ověříme:

$$\int_0^\pi f''g \,\mathrm{d}x = [f'g]_0^\pi - \int_0^\pi f'g' \,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi f'g' \,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\pi fg'' \,\mathrm{d}x = [f'g]_0^\pi - \int_0^\pi f'g' \,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi f'g' \,\mathrm{d}x$$

(b) Nalezneme vlastní čísla a vlastní funkce operátoru A.

$$A(y) = \lambda y \Rightarrow y'' = \lambda y$$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad k^2 - \lambda = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Z podmínek získáme:

$$0 = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi}, \qquad 0 = C_1\sqrt{\lambda} - C_2\sqrt{\lambda} \implies C_1 = C_2$$

Poté lze snadnou úpravou získáme:

$$C_2\left(e^{\sqrt{\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{\lambda}\pi}\right) = 0 \Rightarrow \left(e^{\sqrt{\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{\lambda}\pi}\right) = 0$$

$$e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = -1$$

Vlastní čísla tedy budou:

$$\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

A vlastní funkce:

$$y_n = \left[e^{i\frac{2n+1}{2}x} + e^{-i\frac{2n+1}{2}x}\right] = \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \qquad n \in \mathbf{N}_0.$$