Písemka — repetitorium

1. Nechť lineární operátory $\varphi, \psi \in L(V,V)$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbf{C}$ komutují (tj. $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$). Ukažte, že podprostor $L = \mathrm{Ker}(\psi - \lambda \mathrm{Id})$ je invariantní vzhledem k operátoru φ pro každé $\lambda \in \mathbf{C}$ (Id je identita).

---

2. Operátor $\varphi : P_1[x] \to P_1[x]$ (nad $\mathbf{R}$) je zadán předpisem

$$\varphi(ax + b) = -ax + a + b.$$

Zvolme skalární součin v $P_1[x]$ takto:

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Dokažte, že operátor φ je symetrický a nalezněte jeho spektrální rozklad:

$$\varphi = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2,$$

projekce $\pi_1(ax + b) = \ldots$ a $\pi_2(ax + b) = \ldots$ zapište předpisem.

---

3. Nechť $V = \mathbf{R}^3$. Nalezněte duální bázi $(\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3)$ k bázi

$$\tilde{e}_1 = (1, 1, 0), \quad \tilde{e}_2 = (0, 1, 1), \quad \tilde{e}_3 = (0, 0, -2).$$

(Zapište ve tvaru $\tilde{e}^i(\xi) = \ldots$ pro $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$.)
Určete složky formy

$$\omega(\xi) = \xi^1 + \xi^2 + \xi^3$$

v této duální bázi.

---

4. Je zadán tenzor $\omega \in \mathcal{T}_2^2(V)$, kde $\dim V = 2$:

$$\omega = e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 + 2e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 \otimes e^1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^1 +$$

$$+3e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^2 + 5e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^1 - 11e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1.$$

a) Určete dimenzi příslušného tenzorového prostoru.

b) Vypište složky tenzoru ω.

c) Antisymetrizujte ω v horních indexech.

d) Symetrizujte ω v dolních indexech.

e) Úžete ω v prvním horním a prvním dolním indexu.

f) Úžete ω vektorovým argumentem $\xi = e_1 + e_2$ na druhé pozici.

g) Zvedněte první dolní index na pozici třetího horního pomocí kontravariantní metriky (g^{ij}) k metrice kovariantní (g_{ij}), kde $g_{11} = 2$, $g_{12} = g_{21} = -1$, $g_{22} = 1$.

Vše zapište ve tvaru jako je zadání ω.

---

5. Nechť $H = L^2[0, \pi]$ je Hilbertův prostor kvadraticky integrabilních funkcí se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že operátor $A(y) = y''$ definovavý na $D(A) = \{y \in L^2[0, \pi], y'(0) = y(\pi) = 0\}$ (tzv. *smíšené podmínky*) je symetrický, tj.

$$\langle A(y)|z\rangle = \langle y|A(z)\rangle, \quad \forall y, z \in D(A).$$

Nalezněte jeho vlastní čísla a vlastní funkce a normujte je.