

MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky



Subriemannovské geometrie

Diplomová práce

Pavla Musilová

Vedoucí práce:
Prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.

Brno 2019

Bibliografický záznam

Autor: Pavla Musilová
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity Brno
Ústav matematiky a statistiky

Název: Subriemannovské geometrie

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Geometrie

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.

Akademický rok: 2018/2019

Počet stran: 88

Klíčová slova: Subriemannovská struktura, distribuce na varietě, neholonomní struktura, geodetiky, Riemannova varieta, konexe, křivost, hamiltonián, teorie řízení

Bibliographic Entry

Author: Pavla Musilová
Faculty of Science, Masaryk University Brno
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Sub-Riemannian Geometry

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Geometry

Supervisor: Prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.

Academic Year: 2018/2019

Number of Pages: 88

Keywords: Subriemannian manifold, distribution, nonholonomic manifold, geodesic, Riemannian manifold, connection, curvature, Hamiltonian, control theory

Abstrakt

V práci shrnujeme základní poznatky o subriemannovských varietách a subriemannovských geodetikách z hlediska různých přístupů. Popisujeme teorii neholonomních riemannovských variet, neholonomních konexí a hledání neholonomních geodetik. Uvádíme do souvislosti přístup neholonomní mechaniky a subriemannovské geometrie a ilustrujeme na konkrétních příkladech.

Abstract

In this thesis we recall basics about subriemannian structures and subriemannian geodesics from the different points of view. We describe the theory of nonholonomic Riemannian structures, nonholonomic connections and nonholonomic geodesics. We are interested in comparison of nonholonomic mechanics and subriemannian geometry in examples.



MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2018/2019

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Mgr. Pavla Musilová, Ph.D.

Program: Matematika

Obor: Geometrie

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PŘF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

Název práce: Subriemannovské geometrie

Název práce anglicky: Sub-Riemannian geometries

Oficiální zadání:

Cílem práce je shromáždit poznatky o geometrické teorii řízení v kontextu subriemannovské geometrie a vnějších diferenciálních systémů. Po studiu vhodné literatury bude zadání upřesněno buď směrem k řešení konkrétnějších aplikací z inženýrské praxe nebo se práce zaměří na původní výsledky motivované aplikacemi.

Literatura:

MONTGOMERY, R. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2002. xix, 259. ISBN 0821841653.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.

Datum zadání práce: 19. 9. 2015

V Brně dne: 29. 11. 2018

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Mgr. Pavla Musilová, Ph.D.
studentka

prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
vedoucí práce

prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a
statistiky

Poděkování:

Především děkuji profesorce Olze Rossi za konzultace, náměty a pomoc při výběru vhodné literatury. Děkuji své mamince za konzultace týkající se fyzikálních úloh a neholonomní geometrie i za závěrečnou korekturu práce. Děkuji prof. Honzovi Slovákovi za vedení práce, konzultace a náměty. Děkuji své rodině za podporu v průběhu celého studia. Práce byla vysázena systémem LaTeX.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 3.ledna 2019

Pavla Musilová

Obsah

Použitá symbolika a označení	9
Úvod	11
Základní pojmy	15
1 Subriemannovská geometrie	19
1.1 Subriemannovská metrika a geodetiky	19
1.2 Kometrika	21
1.3 Existence geodetik v subriemannovské geometrii	23
1.4 Normální, abnormální, regulární a singulární geodetiky	25
1.5 Obecnější přístup k subriemannovským strukturám	27
1.6 Konexe na subriemannovských varietách	28
1.7 Porovnání rovnic odvozených z hamiltoniánu a rovnic pro geodetiky hlavní konexe	30
2 Neholonomní riemannovská geometrie	33
2.1 Neholonomní riemannovská struktura	33
2.2 Geodetiky a konexe neholonomních riemannovských struktur	34
2.3 Křivost	37
2.3.1 Geodetická křivost	37
2.3.2 Schoutenův tenzor křivosti	37
2.4 Symetrická závorka a vnější derivace	38
2.5 Neholonomní Riemannova struktura a mechanika	39
2.6 Subriemannovské versus neholonomní struktury	40
2.6.1 Ekvivalence neholonomních Riemannových struktur	40
2.6.2 Normální subriemannovské geodetiky	42
3 Variační mechanika na Riemannově varietě	45
3.1 Základní struktury geometrické mechaniky	45
3.1.1 Fibrované variety	45
3.1.2 Variační problém na fibrovaných varietách	46
3.2 Mechanika neholonomních systémů	46
3.2.1 Neholonomní Lagrangeova struktura	46

8 OBSAH

3.2.2	Kanonická distribuce	47
3.2.3	Neholonomní variační problém a redukované rovnice	48
3.2.4	Alternativní přístup — Četajevovy rovnice	49
4	Příklady porovnání všech přístupů	51
4.1	Geodetiky v \mathbf{R}^3	51
4.1.1	Subriemannovské geodetiky	52
4.1.2	Geodetiky normální konexe na subriemannovské varietě	56
4.1.3	Neholonomní geodetiky	57
4.1.4	Geodetiky riemannovské struktury s neholonomní vazbou	64
4.1.5	Geodetiky na Riemannově varietě bez vazby a geodetická invariantnost distribuce	67
4.2	Geodetiky fyzikálních úloh — rotační úloha	69
4.2.1	Rotační problém jako úloha na Riemannově varietě s neholonomní vazbou	70
4.2.2	Geodetiky neholonomní struktury pro rotační úlohu	74
4.2.3	Subriemannovské geodetiky pro rotační úlohu	75
4.2.4	Geodetiky normální konexe na subriemannovské varietě pro rotační úlohu	76
4.3	Geodetiky fyzikálních úloh — planimetr	77
4.3.1	Planimetr jako úloha na Riemannově varietě s neholonomní vazbou	78
4.3.2	Geodetiky neholonomní konexe pro úlohu s planimetrem	79
4.3.3	Subriemannovské geodetiky pro úlohu s planimetrem	81
	Závěr	83
	Literatura	85
	Rejstřík	87
	Příloha	89

Použitá symbolika a označení

Kdykoli mluvíme o varietě, máme na mysli hladkou varietu. Kdykoli mluvíme o křivce, máme na mysli hladkou křivku, není-li řečeno jinak. V případech, kdy není riziko nedorozumění, používáme Einsteinovu sčítací symboliku (přes index, který se opakuje nahoře i dole, se sčítá).

Sybolem	$X(f)$	značíme derivaci funkce f ve směru vektorového pole X .
Sybolem	$\mathcal{P}([\cdot, \cdot])$	značíme projekci Lieovy závorky na distribuci \mathcal{D} , tj. $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{D}}$.
Sybolem	I	značíme interval $I = [t_1, t_2]$ resp. podle potřeby $I = [0, 1]$, $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$.
Sybolem	$C^\infty M$	značíme množinu (reálných) hladkých funkcí na varietě M .
Sybolem	$\Gamma(\mathcal{B})$	značíme množinu všech hladkých (lokálních) řezů bandlu \mathcal{B} .
Sybolem	$[\![\dots]\!]$	značíme lineární obal množiny.
Sybolem	∂_X	značíme Lieovu derivaci podél X .
Sybolem	$[X, Y]$	značíme Lieovu závorku vektorových polí X a Y .
Sybolem	(Y, π, X)	značíme fibrovanou varietu s bází X a projekcí π .
Sybolem	Γ_U	značíme množinu všech hladkých řezů fibrované variety na U .
Sybolem	$J^r \gamma, (J_x^r \gamma)$	značíme r -jet řezu γ (v bodě x) fibrované variety.
Sybolem	$J^r Y$	značíme r -té prodloužení fibrované variety.
Sybolem	$\Lambda^k(J^r Y)$	značíme prostor k -forem na prodloužení fibrované variety.

Úvod

Práce je zaměřena na studium subriemannovských struktur, neholonomních riemannovských struktur a variačních úloh s neholonomní vazbou na Riemannově varietě. Zabýváme se souvislostmi mezi těmito přístupy. V inženýrské praxi často vzniká potřeba najít křivky na varietě M , jejichž tečný vektor v každém bodě x leží v daném podprostoru tečného prostoru $T_x M$ (tzv. horizontální křivky). Všechny tři přístupy se hledáním takových křivek zabývají.

Na Riemannově varietě se jedná o variační úlohu, kde lagrangián (kinetická energie) je určen metrikou, distribuce (podbandlu tečného bandlu, v němž má ležet tečný vektor k hledané minimalizující křivce) je dána neholonomní vazbou. Metrika se pak přirozeným způsobem indukuje na tuto distribuci a současně je metrikou jednoznačně určena komplementární distribuce \mathcal{D}^\perp . Variační úlohy můžeme řešit klasickým přístupem, nebo pomocí tzv. Četajevových rovnic.

Naproti tomu, neholonomní riemannovská struktura je zadána pouze distribucí \mathcal{D} na varietě (volbou podbandlu tečného bandlu) opatřenou metrikou a zvolenou komplementární distribucí \mathcal{D}^\perp . Nemáme zadání metriku na celé varietě, nejedná se tedy o Riemannovu varietu.

Subriemannovská struktura je zadána již jen distribucí \mathcal{D} opatřenou metrikou. Každá Riemannova struktura s neholonomní vazbou tak určuje svoji podkladovou neholonomní strukturu a každá neholonomní struktura určuje podkladovou strukturu subriemannovskou. Postupy při hledání minimalizujících křivek (geodetik) jsou však odlišné a porovnáváme je v konkrétních příkladech.

Počátky studia subriemannovských geometrií se (v různých kontextech) datují od konce šedesátých let minulého století, ale některé myšlenky se objevovaly již v pracích Carathéodoryho a Cartana. Samotný koncept *subriemannovské geometrie* vznikl v roce 1986, kdy článek [21] zahájil intenzivní zkoumání těchto struktur. Některá tvrzení týkající se subriemannovských struktur však byla dokázána mnohem dříve, například Chow-Rashevskii teorém už v roce 1938. Za klasickou je nyní považována například publikace [19] (2002), ze které čerpáme především. Nová myšlenka definovat délku pomocí tzv. „minimální kontroly“ přichází až v roce 2016 v publikacích [1] a [4], tento přístup zmíníme v odstavci 1.5.

Ačkoli je studium subriemannovských geometrií více než padesát let staré, je tato tematika v popředí zájmu matematiků zejména pro své výstupy do inženýrské praxe. Některé otázky týkající se subriemannovských geodetik zůstávají stále nevyřešeny.

Teorie zabývající se dynamikou neholonomních systémů začala vznikat mnohem dříve, již

v době vzniku Eulerova a Lagrangeova formalismu. Jsou s ní spojena významná jména jako Lindelöf, Čaplygin, Appel, Bobylev, Cenov, Hamel, Hertz, Magii, Voronec, Žukovskij... V různých formách se objevovala i v pracích Ferrera, Kortewega, Neumanna a mnoha dalších. Studium mechaniky neholonomních systémů je propojeno s problémy mechaniky holonomních systémů, teorií diferenciálních rovnic, tenzorovým počtem a geometrií a vedlo ke vzniku nového odvětví diferenciální geometrie — geometrie neholonomních variet (Schouten, Vagner, Vranceanu). Mechanikou systémů s nelineární neholonomní vazbou se zabývali také Četajev, Johnsen, Novoselov a další.

Poslední desetiletí minulého století je začátkem období intenzivního studia geometrických aspektů neholonomní mechaniky. K autorům prvních prací v této oblasti patří např. Cariëna a Rañada, Giachetta, trojice de León, Marrero a de Diego, Marle, Massa a Pagani, Sarlet a Saunders. Nejdůležitější články těchto i dalších autorů jsou citovány v pracích O. Rossi (Krupkové), která v roce 1997 publikovala zásadní originální výsledky geometrické teorie mechanických systémů s neholonomními vazbami na fibrovaných varietách a jejich prodlouženích [13]. Pokud jde o fyzikální hledisko, vychází mechanika neholonomně vázaných systémů z Četajevovy představy vazebních sil ve tvaru lineární kombinace gradientů nezávislých vazebních podmínek podle rychlostí, jejíž koeficienty jsou funkce mající význam Lagrangeových multiplikátorů. Takto zvolené vazební síly splňují princip virtuálních prací. Odpovídající modifikací Eulerových-Lagrangeových rovnic pak jsou rovnice Četajevovy. V práci O. Rossi [15] je formulován neholonomní variační princip, vycházející z faktu, že neholonomními trajektoriemi jsou prodloužení řezů fibrované variety ležící ve vazební podvarietě, přípustné variace jsou popsány tzv. Četajevovými vektorovými poli, náležejícími tzv. kanonické distribuci. K praktickým výsledkům geometrické teorie pak patří soustava redukováných pohybových rovnic pro hledané trajektorie, bez multiplikátorů.

K nejnovějším publikacím patří práce D.I. Barretta [5], zabývající se izometriemi neholonomních struktur a jejich invarianty.

Velký praktický význam v technice a inženýrské praxi mají mechanické systémy, jejichž neholonomní vazby nepatří mezi klasické. Z hlediska kinematiky jsou takové vazby studovány také v teorii řízení, a to jako subriemannovské struktury. Propojení neholonomní mechaniky a subriemannovské geometrie se tak jeví jako zajímavá myšlenka a podnět k dalšímu výzkumu.

V první kapitole zmiňujeme základní definice a výsledky týkající se subriemannovské geometrie. Vzhledem k tomu, že jde o přehled, uvádíme tvrzení většinou bez důkazu (s odkazem na literaturu). Uvádíme do souvislosti také terminologii různých autorů. Čerpáme především z knih [4] a [19], dále jsme použili publikace [1], [2], [18], [11], [6]. V odstavci 1.7 ukazujeme, že rovnice pro geodetiky odvozené z kometriky resp. hamiltoniánu ([19]) odpovídají rovnicím odvozeným z normální konexe ([18]) a odvozujeme jejich obecný tvar přímo s použitím koeficientů ortonormálních vektorových polí generujících zadanou distribuci.

Druhá kapitola se týká neholonomní riemannovské geometrie, neholonomních geodetik, konexe a křivosti a ukazuje souvislost subriemannovské a neholonomní geometrie. Tvrzení jsou

uváděna bez důkazu, čerpáme z práce [5].

Ve třetí kapitole shrnujeme přístup klasické variační mechaniky a rekapitulujeme obecný postup při hledání geodetik na Riemannově varietě s neholonomní vazbou. Zmíníme také alternativní přístup pomocí Četajevových rovnic. Tyto výsledky jsou standardní s notací používanou především ve fyzice.

Čtvrtá a poslední kapitola je původní a je zaměřena na konkrétní příklady. Pro zadané subriemannovské struktury (tj. na varietě M úplně neintegrabilní distribuce \mathcal{D} opatřené metrikou g) sestavujeme kometriku, hamiltonián a odvozujeme rovnice pro geodetiky. Subriemannovské rovnice sestavujeme také s pomocí koeficientů normální konexe.

Hledáme různé neholonomní riemannovské variety (volbou různých doplňků \mathcal{D}^\perp), jejichž distribuce je totožná s původní zadanou subriemannovskou strukturou, počítáme strukturní konstanty a koeficienty pro neholonomní konexi a odvozujeme rovnice pro neholonomní geodetiky, které řešíme. Ukazujeme, že rovnice závisí na volbě doplňku \mathcal{D}^\perp , ale nezávisí samozřejmě na volbě konkrétní báze v něm.

Dalším přístupem je vložení neholonomní struktury do vhodné Riemannovy variety (tak, aby původní metrika zadaná na distribuci \mathcal{D} byla totožná s metrikou indukovanou z této Riemannovy variety). Odvozujeme rovnice pro geodetiky z lagrangiánu s neholonomní vazbou a tyto rovnice řešíme. Alternativně můžeme hledat geodetiky pomocí Četajevových rovnic. Všechny výsledky porovnáváme.

Jaká je vzájemná souvislost mezi neholonomními a subriemannovskými geodetikami? Je každá subriemannovská geodetika současně neholonomní geodetikou pro nějaký vhodně zvolený doplněk? Existují takové volby doplňků, že každá jejich neholonomní geodetika bude současně geodetikou subriemannovskou? Dávají některé přístupy jednodušší rovnice pro tytéž geodetiky? Tyto otázky jsme si položili v našich příkladech. Některé z příkladů mají přímou vazbu na fyziku a popsali jsme i jejich fyzikální interpretaci.

Základní pojmy

V tomto odstavci stručně shrneme základní pojmy z diferenciální geometrie a definice geometrických objektů, s nimiž budeme pracovat. Zejména zmíníme pojmy týkající se variet, fibrovaných bandlů, tenzorových polí a operací s nimi.

Nechť M je n -rozměrná hladká varieta. *Hladkým vektorovým bandlem* dimenze (hodnosti) k nad M rozumíme trojici (E, π, M) , kde E je hladká varieta a $\pi : E \rightarrow M$ je surjektivní hladké zobrazení (projekce) takové, že platí

- (i) množina $E_x := \pi^{-1}(x)$ je k -rozměrný vektorový prostor, nazýváme ho *fibru* nad bodem $x \in M$,
- (ii) pro každé $x \in M$ existuje okolí $U \subset M$, $x \in U$, a zobrazení $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^k$ splňující $\text{pr}_1 \circ \psi = \pi$, nazýváme ho *lokální trivializace*.

Podbandlem fibrovaného bandlu (E, π, M) rozumíme trojici (E', π', M) , která je fibrovaným bandlem a platí $E' \subset E$, $\pi' = \pi|_{E'}$.

Nechť M je n -rozměrná hladká varieta, $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$ dvě hladké křivky splňující $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$. Řekneme, že křivky γ_1, γ_2 jsou ekvivalentní, jestliže mají stejný Taylorův polynom prvního stupně v nějakém (pak také v každém) souřadnicovém systému. *Tečným vektorem* v bodě $x = \gamma(0)$ nazýváme třídu ekvivalence křivek a značíme

$$\left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t=0} = \dot{\gamma}(0).$$

Množina tříd ekvivalence (tečných vektorů v daném bodě) je přirozeným způsobem opatřena operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem. *Tečným prostorem* k varietě M v bodě x je n -rozměrný vektorový prostor

$$T_x M := \{ \dot{\gamma}(0), \gamma : I \rightarrow M \text{ je hladká, } \gamma(0) = x \}$$

a *tečným bandlem* na varietě M je vektorový bandl

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M, \text{ s projekcí } \pi : TM \ni (x, \dot{\gamma}(0)) \longrightarrow x = \gamma(0) \in M.$$

16 ZÁKLADNÍ POJMY

Hladkým vektorovým polem na M rozumíme hladký řez

$$X : M \ni x \longrightarrow X(x) \in T_x M.$$

Množinu všech hladkých vektorových polí na M značíme $Vec(M) = \Gamma(TM)$. Alternativně lze vektorové pole definovat jako operátor *derivace* na algebře $C^\infty(M)$ hladkých funkcí definovaných na M . V souřadnicích značíme

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Zobrazení $\gamma_{x_0} : I \ni t \rightarrow \gamma_{x_0}(t) \in M$, které je řešením $\dot{\gamma}_{x_0}(x) = X(x)$, $\gamma_{x_0}(0) = x_0$, se nazývá *integrální křivka vektorového pole* X . Vektorové pole X nazýváme *úplné*, jestliže pro každé $x_0 \in M$ je maximální integrální křivka $\gamma_{x_0}(t)$ definována na celém \mathbf{R} . Pro úplné vektorové pole soubor zobrazení

$$\phi_t = e^{tX} : M \ni x \longrightarrow \phi_t(x) = \tilde{\gamma}(t, x) = \gamma_x(t) \in M, \quad t \in \mathbf{R},$$

kde $\gamma_x(t)$ je integrální křivka vektorového pole X s počátkem v x (tj. $\gamma_x(0) = x$) a $\tilde{\gamma} : \mathbf{R} \times M \rightarrow M$, je jednoparametrickou podgrupou grupy difeomorfismů variety M do sebe a nazýváme jej *tokem vektorového pole* X .

Nechť $\varphi : M \rightarrow N$ je hladké zobrazení variet a $x \in M$ bod. *Diferenciálem* neboli *tečným zobrazením* rozumíme zobrazení

$$T\varphi = \varphi_* : TM \ni X(x) \longrightarrow \varphi_* X(x) \in TN,$$

splňující

$$\varphi_*(X(x)) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) \right|_{t=0}, \quad \text{jestliže} \quad X(x) = \left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t=0}, \quad x = \gamma(0).$$

Lieovou závorkou vektorových polí X, Y nazýváme vektorové pole $[X, Y]$ definované vztahem

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad \forall f \in C^\infty M.$$

Množina všech vektorových polí na M s operací Lieovy závorky tvoří Lieovu algebru a pro difeomorfismus $\varphi \in \text{Diff } M$ je zobrazení φ_* homomorfismem Lieových algeber.

Kotečným bandlem na varietě M rozumíme vektorový bandl

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M = \bigcup_{x \in M} (T_x M)^* \text{ s projekcí } \pi : T^*M \ni (x, \omega) \longrightarrow x \in M.$$

Hladké řezy kotečného bandu nazýváme *diferenciální 1-formy* a pro hladké zobrazení $\varphi : M \rightarrow N$ definujeme jeho *pullback* φ^* jako zobrazení kotečných bundlů

$$T^*N \ni (\varphi(x), \omega) \longrightarrow (x, \varphi^* \omega) \in T^*M,$$

vztahem $\varphi^*\omega(X) = \omega(\varphi_*(X))$.

Analogicky označme

$$\mathcal{T}_l^k M = \bigcup_{x \in M} \bigotimes^l T_x M \otimes \bigotimes^k T_x^* M, \text{ s projekcí } \pi : T_l^k M \ni (x, \tau) \longrightarrow x \in M,$$

tenzorový bandl k -krát kovariantních a l -krát kontravariantních tenzorů na M . *Tenzorovým polem typu (k, l)* rozumíme hladký řez tohoto bandlu.

Distribucí konstantní hodnoti na varietě M rozumíme hladký vektorový podbandl tečného bandlu TM s konstantní dimenzí fibru.

Distribuce \mathcal{D} konstantní hodnoti $r = n - 1$ na varietě M dimenze n se nazývá *kontaktní*, jestliže pro některý generátor $\omega \in T^*M$ jejího anihilátoru (tj. $\mathcal{D} = \ker \omega$) platí $\omega \wedge d\omega \neq 0$.

Fibrováním vnitřním součinem, neboli *metrikou* na vektorovém bandlu \mathcal{D} nad M rozumíme symetrické, pozitivně definitní 2-kovariantní tenzorové pole na \mathcal{D} , tj. hladký řez $g \in \Gamma(S^2(\mathcal{D}^*))$ zadávající v každém bodě $q \in M$ skalární součin na vektorovém prostoru \mathcal{D}_q .

Kapitola 1

Subriemannovská geometrie

V tomto odstavci uvádíme základní definice, tvrzení a další pojmy týkající se subriemannovských geometrií, čerpáme především z publikací [19], [4] a [1].

1.1 Subriemannovská metrika a geodetiky

Subriemannovskou geometrií na varietě M rozumíme *distribuci* konstantní hodnoty (tj. vektorový podbandl $\mathcal{D} \subset TM$ tečného bandlu s konstantní dimenzí fibru) opatřenou fibrováním vnitřním součinem (metrikou) $g(\cdot, \cdot) = \langle \cdot | \cdot \rangle$ definovaným na \mathcal{D} . Trojici (M, \mathcal{D}, g) pak říkáme *subriemannovská struktura* nebo *sub-Riemannova varieta*.

Pozn. 1: Takovou distribuci \mathcal{D} pak budeme nazývat horizontální, stejně jako křivky nebo vektorová pole na M tečná k \mathcal{D} .

Pozn. 2: Obecnější definice uvedená v [1] připouští i subriemannovské struktury s proměnnou hodnotou. Tuto definici uvádíme v odstavci 1.5.

Pozn. 3: O distribuci \mathcal{D} obvykle předpokládáme, že je úplně neintegrabilní (bracket-generating). O varietě M obvykle předpokládáme, že je souvislá. Tyto předpoklady nejsou součástí naší definice. Objeví se jako předpoklady v tvrzeních.

Hladkou křivku $\gamma : I \rightarrow M$ nazveme *horizontální* (nebo též \mathcal{D} -křivkou), jestliže její tečný vektor (derivace) $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}$ pro všechna $t \in I$.

Pozn.: Absolutně spojitou křivku $\gamma : I \rightarrow M$ nazveme *horizontální*, jestliže její derivace leží v \mathcal{D} v každém bodě, ve kterém existuje.

Pro horizontální křivku (\mathcal{D} -křivku) $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$ pak definujeme její délku:

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle} dt. \quad (1.1)$$

Předchozí vztah nám umožňuje zavést *subriemannovskou metriku*, kde vzdálenost dvou bodů $A, B \in M$ je

$$d(A, B) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{A,B}} L(\gamma), \quad (1.2)$$

$\Gamma_{A,B}$ je množina všech (hladkých) horizontálních křivek spojujících body A, B . Je-li $\Gamma_{A,B} = \emptyset$, položíme $d(A, B) = \infty$. Metrice také říkáme *Carnotova-Carathéodoryho vzdálenost*.

Horizontální křivka (\mathcal{D} - křivka) realizující vzdálenost mezi dvěma body se nazývá *subriemannovskou geodetikou*.

Pozn.: Množinu $\Gamma_{A,B}$ lze rozšířit na *Lipschitzovské křivky* (viz [4]), resp. na největší možnou množinu křivek, tzv. *absolutně spojitých* horizontálních křivek (viz např. [19], [4]). Ukazuje se, že vzdálenost $d(A, B)$ se tímto rozšířením nezmění ([19], [4]). Otázka, zda existuje vždy také nějaká *hladká* geodetika spojující dané body, však zůstává dosud nevyřešena ([19]). Geodetiky, kterými se zabýváme v naší práci, budou vždy *hladké* (věta 1.2).

Příklad 1.1: Minimalizace energie

Definujeme *energií* horizontální křivky vztahem

$$E(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{1}{2} \|\dot{\gamma}\|^2 dt.$$

Ukážeme, že křivka $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ minimalizuje energii na množině křivek spojujících body A, B v čase T právě tehdy, když tato křivka minimalizuje funkcionál délky (vztah (1.1)) na množině všech křivek parametrizovaných s konstantní rychlostí $v = \|\dot{\gamma}\| = d(A, B)/T$.

Aplikujeme Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost $\int f g \leq \sqrt{\int f^2} \sqrt{\int g^2}$ na funkci $f = \|\dot{\gamma}\|$ a $g = 1$ pro dané T a křivku $\gamma : [0, T] \rightarrow M$:

$$L(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}\| dt \leq \sqrt{\int_0^T \|\dot{\gamma}\|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^T dt} = \sqrt{2E(\gamma)} \sqrt{T}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $f = v \cdot g$, tj. $\|\dot{\gamma}\| = v = \text{konst.}$

Příklad 1.2: Heisenbergovy geodetiky

Subriemannovská geometrie daná distribucí

$$\mathcal{D} : \mathbf{R}^3 \ni A = (x, y, z) \rightarrow \mathcal{D}_A = \{\vec{a} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in T_A \mathbf{R}^3 \mid \alpha^3 = \frac{1}{2} (x\alpha^2 - y\alpha^3)\} \subset T_A \mathbf{R}^3,$$

spolu s hladkým řezem

$$\langle | \rangle : \mathbf{R}^3 \ni A \longrightarrow \langle | \rangle_A \in S^2(\mathcal{D}_A^*)$$

zadávajícím skalární součin na \mathcal{D}_A vztahem

$$\langle a|b \rangle_A = \alpha^1 \beta^1 + \alpha^2 \beta^2, \quad \text{pro } \vec{a} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3), \vec{b} = (\beta^1, \beta^2, \beta^3) \in \mathcal{D}_A$$

se nazývá *Heisenbergova grupa*. Geodetiky v této subriemannovské geometrii se nazývají *Heisenbergovy geodetiky* a jsou řešením isoperimetrického problému (hledání křivky dané délkou ohraničující maximální plochu). Jedná se o horizontální lify oblouků kružnic (zahrnující úsečku jako degenerovaný případ).

1.2 Kometrika

Zatímco Riemannova metrika je zadána symetrickým kovariantním 2-tenzorem (tedy řezem bandlu $S^2(T^*M)$), v subriemannovské geometrii žádný takový objekt nemáme. Podobnou roli zde hraje tzv. *kometrika*.

Kometrikou na varietě M budeme rozumět hladký řez H bandlu $S^2(TM) \subset TM \otimes TM$, tedy symetrickou bilineární formu na kotečném bandlu variety M .

Věta 1.1: *Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi kometrikami konstantní hodnoti r a r -rozměrnými subriemannovskými strukturami na varietě M .*

Důkaz: Každá kometrika H zadává fibrovanou bilineární formu $(\cdot, \cdot) : T^*M \otimes T^*M \rightarrow \mathbf{R}$, která indukuje zobrazení $\beta : T^*M \ni [q, \mu] \rightarrow [q, \beta_q(\mu)] \in TM$ dané vztahem

$$\nu(\beta_q(\mu)) = (\nu, \mu)_q \quad \text{pro } \nu \in T_q^*M. \quad (1.3)$$

Má-li kometrika H konstantní hodnot r (tj. $\dim \text{Im}(\beta_q) = r$ pro každé $q \in M$), pak jednoznačně určuje subriemannovskou geometrii $(\mathcal{D}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ dimenze r vztahem:

- $\text{Im}(\beta_q) = \mathcal{D}_q, \forall q \in M,$
- $\langle \beta_q(\nu) | X(q) \rangle = \nu_q(X(q))$ pro $X \in \mathcal{D}_q$ a $\nu \in T_q^*M.$

Naopak, každé subriemannovské geometrii odpovídá prostřednictvím předchozích vztahů právě jedna kometrika. Ukážeme to. Nechť $X_i, i = 1, \dots, r$ je lokální ortonormální soubor vektorových polí na \mathcal{D} , tj. $\langle X_i | X_j \rangle_q = \delta_{ij}$. Pak definujme

$$(\mu, \nu)_q = \sum_{i=1}^r \mu_q(X_i(q)) \cdot \nu_q(X_i(q)).$$

Dostáváme

$$\nu_q(\beta_q(\mu)) = (\mu, \nu)_q = \sum_{i=1}^r \mu_q(X_i(q)) \cdot \nu_q(X_i(q)),$$

22 KAPITOLA 1. SUBRIEMANNOVSKÁ GEOMETRIE

odtud

$$\beta_q(\nu) = \sum_{i=1}^r \nu_q(X_i(q))X_i(q) \in \mathcal{D} \quad \text{a} \quad \langle \beta_q(\nu) | X(q) \rangle = \sum_{i=1}^r X^i(q)\nu_q(X_i(q)) = \nu_q(X(q)).$$

Platí $\text{Im}(\beta_q) = \mathcal{D}_q, \forall q \in M$ (obraz je generován například obrazy duální báze k libovolné bázi na TM , která vznikne doplněním báze (X_i)). Sporem předpokládejme, že existují dvě surjektivní zobrazení $\beta_q, \beta'_q : T_q^*M \rightarrow \mathcal{D}$ splňující podmínku

$$\langle \beta_q(\nu) | X(q) \rangle = \nu_q(X(q)).$$

Pak platí

$$\begin{aligned} (\nu, \mu)_q &= \langle \beta_q(\nu) | \beta_q(\mu) \rangle = \langle \beta_q(\nu) | \beta'_q(\mu) \rangle = \nu(\beta'_q(\mu)) = \nu(\beta_q(\mu)) \quad \forall \nu, \mu \in T^*M \implies \\ &\implies \nu(\beta_q(\mu) - \beta'_q(\mu)) = 0 \quad \forall \nu, \mu \in T^*M \end{aligned}$$

a tedy $\beta_q(\mu) = \beta'_q(\mu)$ pro všechna $\mu \in T^*M$.

♡

Funkce

$$\tilde{H} : T^*M \ni [q, \nu] \longrightarrow \tilde{H}(q, \nu) = \frac{1}{2}(\nu, \nu)_q \in \mathbf{R}, \quad (1.4)$$

kde $(\cdot, \cdot)_q$ je fibrovaná bilineární forma daná kometrikou H , se nazývá *subriemannovský hamiltonián* nebo *kinetická energie*.

Získáváme tak korespondenci mezi nezápornými funkcemi $\tilde{H} : T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ kvadratickými na fibrech s konstantní dimenzí fibru (hamiltoniány) a subriemannovskými geometriemi (viz [19]). Hamiltonián je jednoznačně zadán kometrikou předchozí definicí a naopak, kometriku můžeme zkonstruovat z hamiltoniánu následujícím způsobem:

$$(\mu, \nu)_q = \frac{1}{2} \left[\tilde{H}(q, \nu + \mu) - \tilde{H}(q, \nu - \mu) \right].$$

Nechť $X : M \rightarrow TM$ je vektorové pole na varietě M . Funkce

$$P_X : T^*M \ni [q, \nu] \longrightarrow P_X(q, \nu) = \nu(X(q)) \in \mathbf{R}$$

se nazývá *funkce hybnosti* pro vektorové pole X .

Věta 1.2 (O normálních geodetikách): *Nechť $\zeta(t) = (\gamma(t), p(t))$ je řešení Hamiltonových diferenciálních rovnic na T^*M pro subriemannovský hamiltonián H , $t \in [t_1, t_2]$:*

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (1.5)$$

a necht' $\gamma(t)$ je projekce tohoto řešení na M . Pak každý dostatečně malý oblouk křivky γ je (jediná) subriemannovská geodetika spojující jeho koncové body.

Důkaz viz např. [19], [4].

Subriemannovské geodetiky z předchozí věty (tj. takové, které splňují rovnice (1.5)) nazýváme *normální*.

Pozn. 1: Všechny normální geodetiky jsou hladké.

Pozn. 2: Na riemannovskou geometrii můžeme pohlížet jako na speciální případ geometrie subriemannovské, kdy za horizontální distribuci bereme celý tečný bandl. Kometrikou je pak obvyklá inverzní metrika (v souřadnicích (g^{ij})).

Pozn. 3: Zatímco všechny geodetiky v riemannovské geometrii jsou řešením rovnic odvozených z hamiltoniánu (tj. normální), v subriemannovské geometrii toto obecně neplatí. Některé subriemannovské geometrie připouští existenci tzv. *abnormálních geodetik*, jež nejsou řešeními Hamiltonových rovnic. Těmito geodetikami se v práci nebudeme zabývat, jejich definici je věnován odstavec 1.4

1.3 Existence geodetik v subriemannovské geometrii

Zmíníme ještě bez důkazu důležitá tvrzení týkající se existence geodetik v subriemannovské geometrii a definice potřebných pojmů. (Důkazy jsou např. v knize [19].)

Distribuci $\mathcal{D} \subset TM$ nazýváme *involutivní*, jestliže pro libovolná horizontální vektorová pole X a Y je Lieova závorka $[X, Y]$ horizontální vektorové pole. Distribuce \mathcal{D} se nazývá (*úplně*) *integrabilní*, jestliže každým bodem prochází právě jedna maximální podvarieta integrální k této distribuci.

Pozn. 1: Integrabilní a úplně integrabilní znamená totéž.

Pozn. 2: Každá integrabilní distribuce je involutivní. Pro distribuce konstantní hodnoti je také každá involutivní distribuce integrabilní — tj. oba pojmy splývají.

Je-li distribuce $\mathcal{D} \neq TM$ integrabilní, existují body $A, B \in M$, které nelze spojit horizontální křivkou (Frobeniův teorém).

Lieův obal souboru $\{X_i\}$, $i \in I$ vektorových polí je soubor vektorových polí

$$\mathcal{L}(X_i)_{i \in I} = \{X_i, [X_i, X_j], [X_i, [X_j, X_k]], \dots\}.$$

Jestliže Lieův obal souboru (X_i) generuje celý tečný prostor TM , nazýváme soubor (X_i) *závorkově-generující (bracket-generating)*.

Distribuci $\mathcal{D} \subset TM$ nazýváme *úplně neintegrabilní (bracket-generating)*, jestliže každý lokální horizontální soubor vektorových polí $\{X_i\}$ generující \mathcal{D} je závorkově-generující (nad svým definičním oborem).

Pozn. 1: Distribuce konstantní hodnoty tedy dělíme na involutivní=integrabilní a neintegrabilní. Neintegrabilní a úplně neintegrabilní není totéž. Neintegrabilní distribuce nemusí být úplně neintegrabilní.

Věta 1.3 (Chow-Rashevskii): *Nechť (M, \mathcal{D}, g) je subriemannovská struktura na souvislé varietě M , \mathcal{D} je úplně neintegrabilní a vzdálenost d je definována vztahem 1.2.*

(i) (M, d) je metrický prostor.

(ii) Topologie indukovaná metrikou na varietě M je totožná s původní topologií variety, $d : M \times M \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá.

Důkaz viz například [4].

Důsledek: Je-li distribuce $\mathcal{D} \subset TM$ úplně neintegrabilní, pak množina bodů, které lze spojit s bodem A horizontální křivkou, je rovna souvislé komponentě variety M , v níž leží bod A .

Souvislá varieta se závorkově-generující distribucí je tedy *horizontálně-cestově souvislá* (libovolné dva body lze spojit horizontální křivkou).

Věta 1.4 (Lokální existence): *Nechť (M, \mathcal{D}, g) je subriemannovská struktura s úplně neintegrabilní distribucí \mathcal{D} . Každý bod A variety M má okolí U takové, že pro libovolný bod $B \in U$ existuje subriemannovská geodetika spojující A a B .*

Důkaz viz např. [4], [19].

Věta 1.5 (Globální existence): *Nechť (M, \mathcal{D}, g) je subriemannovská struktura s úplně neintegrabilní distribucí \mathcal{D} , varieta M je souvislá a M je úplný metrický prostor vzhledem k subriemannovské metrice. Pak každé dva body $A, B \in M$ mohou být spojeny subriemannovskou geodetikou.*

Důkaz viz např. [4], [19].

1.4 Normální, abnormální, regulární a singulární geodetiky

Zopakujme definici subriemannovské geodetiky z odstavce 1.1.

\mathcal{D} -křivka realizující vzdálenost mezi dvěma body se nazývá *subriemannovskou geodetikou*.

Pozn.: Připomeňme, že každá geodetika může být parametrizovaná s konstantní rychlostí.

Věta 1.6: *Nechť (M, \mathcal{D}, g) je subriemannovská struktura se souvislou varietou M a úplně neintegrabilní distribucí \mathcal{D} a $\gamma : I \rightarrow M$ je po částech hladká subriemannovská geodetika parametrizovaná s konstantní rychlostí. Pak existuje po částech hladká křivka $\psi : I \rightarrow T^*M$, jejíž projekce je γ (tj. $\pi_M(\psi(t)) = \gamma(t)$ pro všechna $t \in I$), která neprotíná nulový řez a splňuje alespoň jednu z následujících podmínek:*

- (i) ψ je řešením rovnic odvozených z hamiltoniánu (tj. $\psi(t)$ je integrální křivkou Hamiltonova vektorového pole X_H na T^*M se subriemannovským hamiltoniánem daným vztahem (1.4)). Navíc pak platí, že křivky ψ i γ jsou hladké.
- (ii) $\psi(t) \in \text{Ker}\beta$, kde zobrazení $\beta : T^*M \rightarrow \mathcal{D}$ je dáno vztahem (1.3) a pro každou po částech hladkou křivku φ splňující $\pi_M(\varphi(t)) = \gamma(t)$ pro všechna $t \in I$ platí

$$\frac{d}{dt}((\psi(t))(X(\gamma(t)))) = (\psi(t))([\beta(\varphi(t)), X]),$$

pro všechna $X \in \Gamma(TM)$ a pro všechna $t \in I$, kde je $\dot{\gamma}(t)$ definováno.

Důkaz věty lze nalézt např. v článku [18].

Pozn.: Věta úzce souvisí s tzv. Pontryaginovým principem maxima.

Geodetika se nazývá *normální*, jestliže splňuje podmínku (i) z věty 1.6, resp. *abnormální*, jestliže splňuje podmínku (ii).

Pozn.: Odstavec uzavřeme přehledem souvislostí pojmů:

- Mohou existovat geodetiky, které jsou současně normální i abnormální.
- Normální geodetiky jsou právě ty, které jsou projekcí řešení rovnic odvozených z hamiltoniánu.
- Normální geodetiky jsou právě ty, které minimalizují vzdálenost i lokálně (libovolné zúžení normální geodetiky na podinterval je opět geodetika, tj. ve smyslu definice, kterou uvedeme v odstavci 2.8.).
- Normální geodetiky jsou hladké.
- Abnormální geodetiky jsou body uzávěru množiny normálních geodetik (viz [1]).
- Abnormální geodetiky nezávisí na subriemannovské metrice, ale pouze na distribuci \mathcal{D} (viz [4], [18]).
- Je-li distribuce \mathcal{D} *silně úplně neintegrabilní* (tj. $T_x M = [X(x) + [Y, Y'](x), Y, Y', X \in \Gamma(\mathcal{D})]$ pro všechna $x \in M$, neexistují abnormální geodetiky (viz [21]).
- Oba typy geodetik mohou být popsány jako charakteristické křivky symplektické formy, tento popis je speciálním případem Pontryaginova principu maxima (viz [4], [1]).
- Geodetiky, které jsou současně normální i abnormální, jsou „degenerované“ v tom smyslu, že k nim existuje více křivek $\psi : I \rightarrow T^*M$ odpovídajících větě 1.6 (viz [18]).
- Normální i abnormální geodetiky mohou být popsány také jako autoparalelní křivky vhodných konexí (tzv. normálních g -konexí a \mathcal{D} -adaptovaných g -konexí, viz a odstavec 1.7. a [18]).
- Kontaktní distribuce nemají abnormální geodetiky (viz [19]).
- V naší práci se budeme zabývat pouze normálními geodetikami.

1.5 Obecnější přístup k subriemannovským strukturám

Nejobecnější definici subriemannovské geometrie uvádí [1], resp. [4]. Pro ucelenost zmíníme také tento přístup.

Nechť M je souvislá varieta. *Subriemannovskou strukturou* na M je dvojice (\mathbf{E}, f) , kde

- \mathbf{E} je euklidovský bandl nad varietou M .
- $f : \mathbf{E} \rightarrow TM$ je morfismus vektorových bandlů.
- Množina *horizontálních* vektorových polí

$$\mathcal{D} := \{f(\sigma) \mid \sigma : M \rightarrow E \text{ je hladký řez}\}$$

je úplně neintegrabilní.

Má-li bandl \mathbf{E} globální trivializaci, nazýváme subriemannovskou strukturu *volná*. Trojici (M, \mathbf{E}, f) nazýváme *sub-Riemannova varieta*. Číslo $k(q) = \dim \mathcal{D}_q = \dim f(\mathbf{E}_q)$ nazýváme hodnotu subriemannovské struktury v bodě q . Je-li stejná pro všechny body $q \in M$, hovoříme o subriemannovské struktuře konstantní hodnoti.

Pozn.: Klasická subriemannovská struktura chápaná jako trojice (M, \mathcal{D}, g) je zahrnuta v této definici. Stačí vzít $\mathbf{E} = \mathcal{D}$ a $f : \mathcal{D} \rightarrow TM$ jako kanonickou inkluzi.

Lipschitzovská křivka $\gamma : I \rightarrow M$ je *horizontální*, jestliže existuje měřitelná funkce

$$u : I \ni t \rightarrow u(t) \in \mathbf{E}_{\gamma(t)}, \quad u \in L^\infty,$$

nazývaná *kontrolní funkce*, tak, že

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t), u(t)), \quad \forall t \in I.$$

Na \mathcal{D}_q je indukována norma (*subriemannovská norma*) vztahem

$$\|\nu\| := \min\{\|u\|, u \in \mathbf{E}_q, \nu = f(q, u)\},$$

kteřá splňuje rovnoběžníkovou rovnost. Můžeme tedy zavést skalární součin

$$\langle \nu | \mu \rangle = \frac{1}{4} (\|\nu + \mu\|^2 - \|\nu - \mu\|^2), \quad \nu, \mu \in \mathcal{D}_q.$$

Subriemannovskou délkou horizontální křivky definujeme vztahem 1.1 a subriemannovskou vzdálenost vztahem 1.2. Nechť $\gamma : I \rightarrow M$ je horizontální křivka, definujme pro $t \in I$

$$u^* := u(t), \text{ pro které } u \in \mathbf{E}_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t), u) \text{ a } \|u\| \text{ je minimální.}$$

Řezu u^* říkáme *minimální kontrolní funkce* asociovaná s křivkou γ . Minimální kontrolní funkce hraje roli při popisu extrémál v subriemannovské geometrii.

1.6 Konexe na subriemannovských varietách

V tomto odstavci formulujeme souvislosti normálních geodetik a normálních g -konexí na subriemannovských varietách. Obecněji je tato problematika řešena v publikaci [18], zabývající se mj. také abnormálními geodetikami a tzv. \mathcal{D} -adaptovanými konexemi.

g -konexe (nebo též β -konexe) na subriemannovské varietě (M, \mathcal{D}, g) je lineární zobecněná konexe na $\pi : T^*M \rightarrow M$ nad zobrazením $\beta : T^*M \rightarrow TM$, daným vztahem (1.3). Tj. je to lineární fibrované zobrazení $\nabla : (T\pi)^*(T^*M) \rightarrow TT^*M$ takové, že $T\pi \circ \nabla = \beta \circ \pi_2$, kde $\pi_2 : (T\pi)^*(T^*M) \rightarrow T^*M$ je projekce pullback bandlu.

Takovou konexi lze také charakterizovat (korespondence je podrobně popsána v článku [7]) jako zobrazení

$$\nabla : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(T^*M) \ni [\eta, \nu] \longrightarrow \nabla_\eta \nu \in \Gamma(T^*M),$$

splňující

- ∇ je \mathbf{R} -lineární v obou argumentech,
- ∇ je $C^\infty M$ -lineární v prvním argumentu,
- $\nabla_\eta(f\nu) = f\nabla_\eta\nu + (\beta \circ \eta)(f)\nu$ pro každé $f \in C^\infty M$, $\eta, \nu \in \Gamma(T^*M)$.

Bez důkazu (viz [18]) uvedeme rovnice pro autoparalelní křivky g -konexe. Nechť $\psi : I \rightarrow T^*M$ je taková křivka, že její projekce $\gamma = \pi \circ \psi$ je horizontální (tj. \mathcal{D} -křivka). ψ se nazývá *autoparalelní* vzhledem ke konexi ∇ , jestliže splňuje $\nabla_\psi \psi(t) = 0$ pro každé $t \in I$. Projekce $\gamma = \pi \circ \psi : I \rightarrow M$ se pak nazývá *geodetikou* konexe ∇ . V souřadnicích jsou autoparalelní křivky $\psi(t) = (x^i(t), p_i(t))$ popsány rovnicemi:

$$\dot{x}^i = \bar{g}^{ij}(x(t))p_j(t), \quad \dot{p}_j(t) = -\Gamma_j^{ik}(x(t))p_i(t)p_k(t), \quad (1.6)$$

kde \bar{g}^{ij} jsou složky subriemannovské kometriky a Γ_j^{ik} jsou koeficienty konexe.

g -konexe ∇ se nazývá *normální*, jestliže pro všechna $\eta, \nu \in \Gamma(T^*M)$ platí

$$\nabla_\eta \nu + \nabla_\nu \eta = \partial_{\beta(\eta)}\nu + \partial_{\beta(\nu)}\eta - d(\nu(\beta(\eta))),$$

kde zobrazení $\beta : T^*M \rightarrow TM$ je dáno vztahem (1.3).

Koeficienty normální g -konexe splňují (viz [18]) vztah

$$\Gamma_k^{ij} + \Gamma_k^{ji} = \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial x^k}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Věta 1.7: *Nechť ∇ je normální g -konexe, pak autoparalelní křivky konexe ∇ (tj. křivky $\psi : I \rightarrow T^*M$ takové, že $\nabla_\psi \psi(t) = 0$ pro každé $t \in I$) jsou právě řešením rovnic odvozených ze subriemannovského hamiltoniánu. Existuje tedy bijektivní korespondence mezi normálními subriemannovskými geodetikami a geodetikami normální konexe ∇ (autoparalelními křivkami).*

Důkaz viz [18]. Analogická tvrzení týkající se abnormálních (singulárních) geodetik a \mathcal{D} -adaptovaných g -konexí jsou formulována a dokázána v článku [18]. Singulárními geodetikami se v této práci nezabýváme.

Připomeňme, že Riemannova metrika G na varietě M je hladký řez bandlu $S^2(T^*M)$. Její zúžení na distribuci \mathcal{D} zadává subriemannovskou metriku vztahem $g(X_q, Y_q) = G(X_q, Y_q)$ pro všechna $X, Y \in \mathcal{D}_q \subset T_qM$.

Věta 1.8: *Nechť (M, \mathcal{D}, g) je subriemannovská struktura a G Riemannova metrika na M taková, že její zúžení na \mathcal{D} je rovno g . Pak každá \mathcal{D} -křivka $\gamma : I \rightarrow M$, která je geodetikou Riemannovy metriky G , je zároveň normální subriemannovskou geodetikou.*

Důkaz viz [18].

Věta 1.9: *Nechť (M, \mathcal{D}, g) je subriemannovská struktura a $\gamma : I \rightarrow M$ je normální subriemannovská geodetika. Pak pro každé $t \in I$ existuje kompaktní okolí J bodu t takové, že křivka γ zúžená na J je geodetikou vzhledem k nějaké Riemannově metrice G na M , jejíž zúžení na \mathcal{D} je rovno g .*

Důkaz viz [18].

Pozn.: Různé Riemannovy metriky mohou dávat stejné subriemannovské struktury (je-li jejich zúžení na distribuci \mathcal{D} totožné). Tyto metriky mají obecně různé geodetiky. Všechny (které jsou tečné k distribuci \mathcal{D}) pak budou normálními subriemannovskými geodetikami). Naopak, každá normální subriemannovská geodetika může být (lokálně) zkonstruována tímto způsobem.

1.7 Porovnání rovnic odvozených z hamiltoniánu a rovnic pro geodetiky hlavní konexe

Nechť M je hladká varieta, označme jako obvykle $(x^i(t), p_i(t))$ lokální souřadnice na T^*M . V tomto odstavci obecně ukážeme, že rovnice (1.5) odvozené z hamiltoniánu:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i},$$

a rovnice (1.6)

$$\dot{x}^i = \bar{g}^{ij}(x(t))p_j(t), \quad \dot{p}_k(t) = -\Gamma_k^{ij}(x(t))p_i(t)p_j(t),$$

kde \bar{g}^{ij} jsou složky subriemannovské kometriky a Γ_k^{ij} jsou koeficienty normální konexe splňující

$$\Gamma_k^{ij} + \Gamma_k^{ji} = \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial x^k}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n$$

jsou totožné. Odvodíme tvar těchto rovnic s použitím koeficientů (ortonormálních) vektorových polí zadávajících distribuci \mathcal{D} .

Nechť \mathcal{D} je k -rozměrná distribuce na TM zadaná ortonormálním souborem vektorových polí X_1, X_2, \dots, X_k , která mají v lokálních souřadnicích vyjádření (používáme Einsteinovu sumační symboliku):

$$X_i = X_i^j(x^u) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Kometrika $(\cdot, \cdot) : S^2T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ je dána vztahem

$$(\nu, \eta) = \left(\sum_{i=1}^k X_i \otimes X_i \right) (\nu, \eta) = \left(\nu_1 \quad \dots \quad \nu_n \right) \bar{G} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

a pro matici $\bar{G} = (\bar{g}^{ab})$ platí

$$\bar{g}^{ab} = \sum_{i=1}^k X_i^a X_i^b.$$

Hamiltonián $H : T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ je pak dán vztahem

$$H(\eta) = \frac{1}{2}(\eta, \eta) = \frac{1}{2}g^{ab}\eta_a\eta_b = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k X_i^a X_i^b \right) \eta_a\eta_b.$$

Rovnice (1.5) i rovnice (1.6) tak přejdou na tvar:

1.7. POROVNÁNÍ ROVNIC ODVOZENÝCH Z HAMILTONIÁNU A ROVNIC PRO GEODETIKY HLAV

$$\dot{x}^a = \left(\sum_{i=1}^k X_i^a X_i^b \right) p_b, \quad \dot{p}_c = - \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial X_i^a}{\partial x^c} X_i^b \right) p_a p_b. \quad (1.8)$$

Tento tvar můžeme používat pro sestavení subriemannovských rovnic dané úlohy přímo ze zadaných ortonormálních generátorů distribuce \mathcal{D} .

Kapitola 2

Neholonomní riemannovská geometrie

V tomto odstavci se zabýváme přístupem z hlediska neholonomní riemannovské geometrie, jak je uveden v práci [5].

2.1 Neholonomní riemannovská struktura

Nechť M je n -rozměrná varieta s distribucí \mathcal{D} konstantní dimenze (hodnosti) r . Je-li distribuce involutivní (integrabilní), budeme ji nazývat také *holonomní*. V opačném případě ji budeme nazývat *neholonomní*.

Označme

$$\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}, \quad \mathcal{D}^{i+1} = \mathcal{D}^i + [\mathcal{D}^i, \mathcal{D}^i] \quad \text{pro } i \leq 1,$$

kde

$$[\mathcal{E}, \mathcal{F}]_q = \{[X, Y](q) : X \in \Gamma(\mathcal{E}), Y \in \Gamma(\mathcal{F})\}$$

pro distribuce \mathcal{E}, \mathcal{F} na M . Získáváme tak posloupnost

$$\mathcal{D}^1 \subseteq \mathcal{D}^2 \subseteq \dots \subseteq TM,$$

přičemž vždy předpokládáme, že \mathcal{D}^i je distribuce s konstantní dimenzí fibrů pro každé i .

Jestliže existuje číslo $n \geq 2$, pro které

$$\mathcal{D}^n = TM, \quad \mathcal{D}^{n-1} \neq TM,$$

nazýváme jej *stupeň neholomnosti* distribuce \mathcal{D} a takové distribuci pak říkáme *úplně neholonomní*. Je-li stupeň neholomnosti $n = 2$, nazýváme navíc distribuci *silně neholonomní*.

Pozn. 1: V kontextu předchozí kapitoly, je úplně neintegrabilní (bracket-generating) distribuce $\mathcal{D} \neq TM$ úplně neholonomní a naopak. Následující větě tedy přesně odpovídá tvrzení 1.3.

Pozn. 2: Integrabilní distribuce konstantní hodnosti odpovídají ve fyzice holonomním vazbám, zatímco neintegrabilní distribuce vazbám neholonomním, odtud název.

Věta 2.1 (Chow-Rashevskii): *Nechť \mathcal{D} je úplně neholonomní distribuce na souvislé varietě M . Pak libovolné dva body v M mohou být spojeny \mathcal{D} -křivkou, tj. křivkou $\gamma : I \rightarrow M$, pro kterou $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}, \forall t \in I$.*

Důkaz viz například [19].

Neholonomní Riemannova varieta nebo též neholonomní Riemannova struktura je čtveřice $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$, kde M je n -rozměrná (souvislá) varieta, \mathcal{D} úplně neholonomní distribuce dimenze $r < n$ na M , \mathcal{D}^\perp komplementární distribuce dimenze $n - r$ na M (tj. $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$) a g je pozitivně definitní metrický tenzor na \mathcal{D} .

Pozn.: Značení \mathcal{D}^\perp je standardní, ale obecně neznamena „kolmost“ – ta není definována, neboť metrický tenzor je zadán pouze na distribuci \mathcal{D} . Je-li však M Riemannova varieta, vzniká neholonomní struktura přirozeně zadáním neholonomní vazby (tj. určením \mathcal{D}^\perp), distribuce \mathcal{D} (kolmá k \mathcal{D}^\perp) je opatřena indukovanou metrikou.

2.2 Geodetiky a konexe neholonomních riemannovských struktur

Nechť M je souvislá n -rozměrná varieta a \mathcal{D} je r -rozměrná neintegrabilní a úplně neholonomní distribuce. *Neholonomní (Koszulova) konexe* na \mathcal{D} je \mathbf{R} -lineární zobrazení

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{D}), \quad (X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y,$$

které je tenzorové v prvním a derivací ve druhém argumentu, tj.

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \quad \nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y, \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}).$$

Symbolem $X(f)$ rozumíme derivaci funkce f ve směru vektorového pole X . Vektorové pole $\nabla_X Y$ pak nazýváme *kovariantní derivace Y ve směru X* .

Pozn. 1: Z vlastností uvedených v definici vyplývá, že kovariantní derivace $\nabla_X Y(q)$ v bodě q závisí pouze na hodnotě $X_q = X(q)$ vektorového pole X v bodě q a hodnotách vektorového pole Y podél \mathcal{D} -křivky tečné k X (důkaz viz [5]), tj. je-li $\gamma(0) = q, \dot{\gamma}(0) = X(q)$, pak

$$[Y_1(\gamma(t)) = Y_2(\gamma(t)) \quad \forall t] \implies [\nabla_X Y_1(q) = \nabla_X Y_2(q)].$$

Pozn. 2: Existuje obecnější definice Koszulovy \mathcal{E} -konexe na \mathcal{D} :

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{E}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{D}),$$

kde \mathcal{E} a \mathcal{D} jsou obecně různé distribuce na varietě M .

Pozn. 3: Kovariantní derivace může být rozšířena na libovolná tenzorová pole, např. pro $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{D}^*)$:

$$\begin{aligned} \nabla_X(f) &= X(f), \\ \nabla_X\omega(Y) &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Neholonomní konexe (na (\mathcal{D}, g)) se nazývá *metrická*, jestliže pro každé $X \in \Gamma(\mathcal{D})$ platí

$$X(g(Y_1, Y_2)) = g(\nabla_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X Y_2). \tag{2.2}$$

Pozn.: Vzorec (2.2) je ekvivalentní požadavku nulovosti *úplné kovariantní derivace* metrického tenzoru $\nabla g \equiv 0$, kde $\nabla g \in S^2(\mathcal{D}^*) \otimes \mathcal{D}^*$:

$$\nabla g(Y_1, Y_2, X) = \nabla_X g(Y_1, Y_2) = X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2).$$

Uvažujme neholonomní Riemannovu strukturu $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ a označme $\mathcal{P} : TM \rightarrow \mathcal{D}$ resp. $\mathcal{P}^\perp : TM \rightarrow \mathcal{D}^\perp$ projekční operátory odpovídající rozkladu $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$, dále označme $\mathcal{P}([\cdot, \cdot]) = [\cdot, \cdot]_{\mathcal{D}}$ projekci Lieovy závorky a $\|\cdot\|$ normu indukovanou na \mathcal{D} metrikou g . Podobně jako v Riemannově struktuře existuje Levi-Civitova konexe (jediná metrická konexe bez torze), existuje také v neholonomní Riemannově struktuře *jediná metrická neholonomní konexe bez torze*, přičemž zde torzí rozumíme (1, 2)-tenzorové pole

$$T : \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{D}),$$

dané vztahem

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]_{\mathcal{D}}.$$

Věta 2.2: *Nechť $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ je neholonomní Riemannova varieta. Existuje právě jedna neholonomní konexe*

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{D}),$$

která je metrická ($\nabla g \equiv 0$) a bez torze ($T \equiv 0$). Tato konexe je dána vztahem nazývaným Koszulova formule:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ + g([X, Y]_{\mathcal{D}}, Z) - g([X, Z]_{\mathcal{D}}, Y) - g([Y, Z]_{\mathcal{D}}, X)$$

pro $X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D})$.

Důkaz viz například [5].

Označme (X_i) , $i = 1, \dots, n$ lokální souřadnicový systém vektorových polí na TM takový, že (X_a) , $a = 1, \dots, r$ je ortonormální souřadnicový systém na \mathcal{D} a (X_λ) , $\lambda = r + 1, \dots, n$ je souřadnicový systém na \mathcal{D}^\perp . Nechť $c_{ij}^k \in C^\infty(M)$ jsou odpovídající strukturní konstanty $[X_i, X_j]_{\mathcal{D}} = c_{ij}^k X_k$ a $\Gamma_{ab}^c \in C^\infty(M)$ koeficienty konexe ∇ :

$$\nabla_{X_a} X_b = \Gamma_{ab}^c X_c.$$

Platí

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}(c_{ab}^c - c_{ac}^b - c_{bc}^a). \quad (2.3)$$

\mathcal{D} -křivku $\gamma : I \ni t \rightarrow \gamma(t) \in M$ nazýváme *neholonomní geodetikou* struktury $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ (*geodetikou neholonomní konexe*), jestliže je autoparalelní, tj.

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Příklad 2.1: Neholonomní geodetiky v souřadnicích

\mathcal{D} -křivka je neholonomní geodetikou právě když splňuje v souřadnicích systém diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\ddot{\gamma}^c(t) + \Gamma_{ab}^c(\gamma(t))\dot{\gamma}^a(t)\dot{\gamma}^b(t) = 0 \quad (2.4)$$

pro každé $t \in I$. Nechť $q \in M$ a $X_q \in \mathcal{D}_q$. Existuje právě jedna neholonomní geodetika (až na případné rozšíření resp. zúžení) $\gamma : I \rightarrow M$, ($0 \in I$) tak, že $\gamma(0) = q$ a $\dot{\gamma}(0) = X_q$. Lze-li definiční obor každé geodetiky

rozšířit na $I = \mathbf{R}$, mluvíme o *geodeticky úplné* neholonomní struktuře. Pro každou neholonomní geodetiku platí $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{konst.}$, má tedy konstantní rychlost. Důkaz nalezneme např. v [5].

2.3 Křivost

V tomto odstavci zavádíme pro neholonomní Riemannovu strukturu další související pojmy podle [5].

2.3.1 Geodetická křivost

Nechť $\gamma : I \rightarrow M$ je \mathcal{D} -křivka v M s jednotkovou rychlostí, tj. $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ pro všechna $t \in I$. *Geodetickou křivostí* křivky γ rozumíme funkci $\kappa_\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}$ danou vztahem:

$$\kappa_\gamma(t) = \|\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t)\|.$$

Neholonomní geodetiky tak můžeme interpretovat jako „nejpřímější“ \mathcal{D} -křivky spojující dva body, tj. křivky s nulovou geodetickou křivostí. Tento přístup nazýváme *Hertzův princip minimální křivosti* (jde o speciální případ Gaussova principu minimální vazby), neholonomní rovnice jsou pak odvozeny jako řešení variační úlohy.

2.3.2 Schoutenův tenzor křivosti

Nechť $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ je neholonomní Riemannova struktura s asociovanou neholonomní konexí ∇ . Tenzor $K \in \mathcal{T}_3^1\mathcal{D}$ daný vztahem

$$K(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]_{\mathcal{D}}} Z - [[X, Y]_{\mathcal{D}}, Z]_{\mathcal{D}}, \quad X, Y, Z \in \Gamma\mathcal{D}$$

se nazývá *Schoutenův tenzor křivosti*.

Schoutenův tenzor křivosti je antisymetrický v prvních dvou argumentech, snížením indexu pomocí metriky g získáme tenzor typu $(0, 4)$ označovaný \hat{K} . Dále pro $W, X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D})$ platí:

- (1) $K(X, Y)Z + K(Y, Z)X + K(Z, X)Y = 0$,
- (2) $\hat{K}(W, X, Y, Z) + \hat{K}(X, W, Y, Z) = 0$.

Pozn. 1: Vlastnost (1) se nazývá první Bianchiho identita, druhá Bianchiho identita obecně pro Schoutenův tenzor neplatí.

Pozn. 2: Definujeme

$$\hat{R}(W, X, Y, Z) = \frac{1}{2} \left(\hat{K}(W, X, Y, Z) - \hat{K}(W, X, Z, Y) \right), \quad \hat{C} = \hat{K} - \hat{R}. \quad (2.5)$$

Tenzor \hat{R} splňuje stejné symetrie jako Riemannův $(0, 4)$ -tenzor křivosti a lze pomocí něj stejným způsobem jako v riemannovské geometrii zavést Ricciho tenzor a skalární křivost. Tenzor \hat{C} , resp. jeho nulovost bude hrát důležitou roli při zkoumání souvislosti mezi subriemannovskými a neholonomními geodetikami.

2.4 Symetrická závorka a vnější derivace

Nechť $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$, *symetrickou závorkou* vektorových polí X, Y rozumíme vektorové pole

$$\langle\langle X : Y \rangle\rangle = \nabla_X Y + \nabla_Y X.$$

Pro libovolná $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ a $f \in C^\infty(M)$ platí

- $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]_D + \frac{1}{2}\langle\langle X : Y \rangle\rangle,$
- $\langle\langle fX : Y \rangle\rangle = Y(f)X + f\langle\langle X : Y \rangle\rangle.$

Výraz $\frac{1}{2}[X, Y]_D$ je antisymetrickou částí a výraz $\frac{1}{2}\langle\langle X : Y \rangle\rangle$ symetrickou částí $\nabla_X Y$. Vzhledem k tomu, že $\frac{1}{2}[X, X]_D = 0$, platí:

\mathcal{D} -křivka $\gamma : I \rightarrow M$ je neholonomní geodetikou právě tehdy, když $\frac{1}{2}\langle\langle \dot{\gamma} : \dot{\gamma} \rangle\rangle \equiv 0$.

Každá konexe na vektorovém bandlu indukuje operátor vnější derivace, budeme jej označovat symbolem

$$d_p^\nabla : \Omega^p(\mathcal{D}, \mathcal{T}_l^k(\mathcal{D})) \longrightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{D}, \mathcal{T}_l^k(\mathcal{D})).$$

Obecná definice je uvedena v publikaci [5], pro naše účely postačí definovat vnější derivaci pro funkci $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(\mathcal{D})$ a jedna formu $\omega \in \mathcal{D}^* = \Omega^1(\mathcal{D})$. V úpravách využijeme vztahy (2.1).

$$(d_p^\nabla f)(X) = \nabla_X f = X(f),$$

$$\begin{aligned} (d_{\mathcal{D}}^{\nabla} \omega)(X, Y) &= (\nabla_X \omega)(Y) - (\nabla_Y \omega)(X) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) - Y(\omega(X)) + \omega(\nabla_Y X) = \\ &= \nabla_X(\omega(X)) - \nabla_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]_{\mathcal{D}}). \end{aligned}$$

2.5 Neholonomní Riemannova struktura a mechanika

Zde uvádíme pouze stručné srovnání hledání geodetik neholonomní riemannovské struktury a hledání geodetik ve variační mechanice na Riemannově varietě s neholonomní vazbou. Přístupu variační mechaniky bude věnována samostatná kapitola.

Nechť g je Riemannova metrika na n -rozměrné souvislé varietě M , označme x^i souřadnicové funkce lokálního souřadnicového systému (U, φ) , (x^i, \dot{x}^i) odpovídající souřadnice na TM a $(\partial_i) = (\partial/\partial x^i)$. Geodetiky Riemannovy variety (M, g) jsou geodetiky odpovídající Levi-Civitovy konexe ∇ . Zároveň tyto geodetiky minimalizují kinetickou energii danou lagrangiánem

$$L : TM \ni (x^i, \dot{x}^i) \longrightarrow \frac{1}{2} g_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l \in \mathbf{R}, \quad \text{kde } g_{kl} = g(\partial_k, \partial_l),$$

jsou tedy řešením Eulerových–Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad \text{resp. } g_{ij}(\ddot{x}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{x}^k \dot{x}^l) = 0, \quad (2.6)$$

kde $\Gamma_{kl}^j \in C^\infty(M)$ jsou Christoffelovy symboly konexe ∇ :

$$\nabla_{\partial_k} \partial_l = \Gamma_{kl}^j \partial_j, \quad \Gamma_{kl}^j = \frac{1}{2} g^{jm} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Pro křivku $\gamma : t \rightarrow (x^i(t))$ je $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = (\ddot{x}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{x}^k \dot{x}^l) \partial_j$ a podmínku (2.6) lze psát jako požadavek nulovosti formy

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \cdot) \equiv 0.$$

Mějme nyní $n - r$ nezávislých rovnic pro lineární neholonomní vazbu nezávislou na čase:

$$f_j^k(x^i) \dot{x}^j = 0, \quad k = 1, \dots, n - r, \quad f_j^k \in C^\infty(M),$$

kteřá geometricky odpovídá neintegrabilní r -rozměrné distribuci \mathcal{D} na M , předpokládejme, že \mathcal{D} je úplně neholonomní. Označme \mathcal{D}^\perp ortogonální doplněk \mathcal{D} vzhledem k metrice g a symbolem $g' = g_{\mathcal{D}}$ zúžení tenzorového pole g na \mathcal{D} . Pak čtveřice $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g')$ je neholonomní Riemannova struktura a zobrazení \mathcal{P} a \mathcal{P}^\perp jsou ortogonální projekce. Neholonomní konexe v této struktuře je zároveň projekcí původní konexe na \mathcal{D} , tj.

$$\nabla'_X Y = \mathcal{P}(\nabla_X Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}).$$

\mathcal{D} -křivka $\gamma : I \rightarrow M$ je neholonomní geodetika struktury $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g' = g_{\mathcal{D}})$ právě tehdy, když

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}^\perp \quad \forall t \in I.$$

Extremály lagrangiánu kinetické energie s lineární neholonomní vazbou jsou právě neholonomní geodetiky asociované neholonomní Riemannovy struktury.

2.6 Subriemannovské versus neholonomní struktury

Každé neholonomní Riemannově strukturu $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ odpovídá *subriemannovská struktura* (M, \mathcal{D}, g) . Varieta M společně s metrikou d zavedenou vztahem (1.2) tvoří metrický prostor (M, d) . Pro úplně neholonomní distribuci \mathcal{D} je topologie indukovaná subriemannovskou metrikou d na varietě M totožná s původní topologií variety (důkaz viz např. [19]).

\mathcal{D} -křivka $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$ je *normální subriemannovskou geodetikou*, jestliže pro každý interval $[a, b] \subset [t_1, t_2]$ platí, že zúžení $\gamma_{[a,b]}$ realizuje vzdálenost mezi body $\gamma(a), \gamma(b)$, tj. $d(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma_{[a,b]})$.

2.6.1 Ekvivalence neholonomních Riemannových struktur

V tomto odstavci zavádíme pojmy neholonomní geodetická ekvivalence, neholonomní afinita a neholonomní izometrie podle publikace [5].

Řekneme, že neholonomní Riemannovy struktury

$$\mathcal{R} = (M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g) \quad \text{a} \quad \mathcal{R}' = (M', \mathcal{D}', \mathcal{D}'^\perp, g')$$

jsou *neholonomně geodeticky ekvivalentní*, jestliže existuje difeomorfismus $\varphi : M \rightarrow M'$, dávající vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi geodetikami obou struktur, tj. γ je neholonomní geodetika \mathcal{R} právě tehdy, když $\varphi \circ \gamma$ je neholonomní geodetika \mathcal{R}' , φ pak nazýváme *neholonomní geodetická ekvivalence*.

Pro to, aby difeomorfismus $\varphi : M \rightarrow M'$ byl neholonomní geodetickou ekvivalencí je nutné a stačí, že $\varphi_* \mathcal{D} = \mathcal{D}'$ a konexe $\nabla, \varphi^* \nabla$ mají stejné geodetiky.

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- Dvě konexe $\nabla^1, \nabla^2 : \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{D})$ mají stejné geodetiky,
- $\nabla_X^1 X = \nabla_X^2 X$, pro každé $X \in \Gamma(\mathcal{D})$,
- $\langle\langle X : Y \rangle\rangle_1 = \langle\langle X : Y \rangle\rangle_2$ pro všechna $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$.

Řekneme, že neholonomní Riemannovy struktury

$$\mathcal{R} = (M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g) \quad \text{a} \quad \mathcal{R}' = (M', \mathcal{D}', \mathcal{D}'^\perp, g')$$

jsou *neholonomně afinně ekvivalentní*, jestliže existuje difeomorfismus $\varphi : M \rightarrow M'$ tak, že

$$\varphi_* \mathcal{D} = \mathcal{D}' \quad \text{a} \quad \nabla = \varphi^* \nabla',$$

φ pak nazýváme *neholonomní afinita*.

- Každá neholonomní afinita je neholonomní geodetickou ekvivalencí.
- Neholonomní geodetická ekvivalence $\varphi : M \rightarrow M'$ je neholonomní afinitou právě tehdy, když $\varphi^* \nabla'$ je bez torze, tj.

$$(\varphi^* \nabla')_X Y - (\varphi^* \nabla')_Y X = [X, Y]_{\mathcal{D}}, \quad \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}).$$

Řekneme, že neholonomní Riemannovy struktury

$$\mathcal{R} = (M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g) \quad \text{a} \quad \mathcal{R}' = (M', \mathcal{D}', \mathcal{D}'^\perp, g')$$

jsou *neholonomně izometrické*, jestliže existuje difeomorfismus $\varphi : M \rightarrow M'$ tak, že

$$\varphi_* \mathcal{D} = \mathcal{D}', \quad \varphi_* \mathcal{D}^\perp = \mathcal{D}'^\perp \quad \text{a} \quad g = \varphi^* g',$$

φ pak nazýváme *neholonomní izometrie*.

Pozn. 1: Neholonomní izometrie zachovává metriku, neholonomní konexi, tenzor křivosti i projekční operátory, tj. $K = \varphi^* K'$, $R = \varphi^* R'$, $C = \varphi^* C'$, $\varphi_* \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}'(\varphi_*(X))$ a $\varphi_* \mathcal{P}^\perp(X) = \mathcal{P}'^\perp(\varphi_*(X))$ pro všechna $X \in \Gamma(TM)$.

Pozn. 2: Neholonomní izometrie struktury \mathcal{R} do sebe tvoří konečněrozměrnou Lieovu grupu.

Každá neholonomní izometrie je neholonomní afinitou.

2.6.2 Normální subriemannovské geodetiky

Nechť $\mathcal{R} = (M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ je neholonomní Riemannova struktura. Vektorový podbandl $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{S} \neq \mathcal{D}$ se nazývá *geodeticky invariantní v \mathcal{D}* , jestliže pro každou neholonomní geodetiku $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ struktury \mathcal{R} splňující $\dot{\gamma}(0) \in \mathcal{S}_{\gamma(0)}$ platí $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{S}_{\gamma(t)} \forall t \in [0, 1]$.

Věta 2.3: *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- \mathcal{S} je geodeticky invariantní v \mathcal{D} ,
- $\nabla_X X \in \Gamma(\mathcal{S})$ pro každé $X \in \Gamma(\mathcal{S})$,
- $\langle\langle X : Y \rangle\rangle \in \Gamma(\mathcal{S})$ pro všechna $X, Y \in \Gamma(\mathcal{S})$.

Nechť $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ je neholonomní Riemannova struktura a \tilde{g} je rozšíření metriky g na Riemannovu metriku na M takové, že $\mathcal{D} \perp_{\tilde{g}} \mathcal{D}^\perp$. Zobrazení $\iota = \text{id}_M$ je neholonomní Riemannovo vložení struktury $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ do Riemannovy struktury (M, \tilde{g}) . Platí následující tvrzení:

Věta 2.4: *Množina neholonomních geodetik struktury $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ splývá s množinou Riemannových geodetik struktury (M, \tilde{g}) tečných k \mathcal{D} právě tehdy, když \mathcal{D} je geodeticky invariantní v TM .*

Pozn.: Vlastnost být „geodeticky invariantní“ není vlastnost distribuce \mathcal{D} jako takové, týká se celé neholonomní struktury, tj. závisí také na doplňku \mathcal{D}^\perp . Je-li však distribuce nějaké neholonomní struktury geodeticky invariantní, nezáleží na konkrétní volbě rozšíření \tilde{g} původní metriky na celou varietu M .

Věta 2.5: *Je-li \mathcal{D} geodeticky invariantní v TM , pak každá neholonomní geodetika struktury $(M, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, g)$ je normální subriemannovskou geodetikou subriemannovské struktury (M, \mathcal{D}, g) .*

Na závěr odstavce formulujeme nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby silně neholonomní distribuce \mathcal{D} byla geodeticky invariantní.

Věta 2.6: *Silně neholonomní distribuce \mathcal{D} je geodeticky invariantní v TM právě tehdy, když $\hat{C} \equiv 0$ (\hat{C} je definováno vztahem (2.5)).*

Důkaz tvrzení 2.3 až 2.6 viz [5].

Dvě subriemannovské struktury (M, \mathcal{D}, g) a (M', \mathcal{D}', g') jsou (*subriemannovsky*) *izometrické*, jestliže existuje difeomorfismus $\varphi : M \rightarrow M'$ tak, že

$$\varphi_*\mathcal{D} = \mathcal{D}' \quad \text{a} \quad g = \varphi^*g',$$

φ pak nazýváme *subriemannovskou izometrií*.

Jsou-li dvě neholonomní Riemannovy struktury neholonomně izometrické, pak jejich odpovídající subriemannovské struktury jsou subriemannovsky izometrické.

Kapitola 3

Variační mechanika na Riemannově varietě

3.1 Základní struktury geometrické mechaniky

V tomto odstavci shrneme základní pojmy variačního počtu na fibrovaných varietách, čerpáme především z knihy [14].

3.1.1 Fibrované variety

Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta s bází X dimenze n , totálním prostorem Y dimenze $m+n$ a projekcí π . Dále budeme uvažovat jednorozměrnou bází, tj. $n = 1$, jak odpovídá mechanice, na niž se zaměříme. Množinu všech řezů projekce π definovaných na otevřené množině $U \subset X$ označme Γ_U . Trojice $(J^r Y, \pi_r, X)$ je r -té prodloužení fibrované variety (Y, π, X) a symboly $\pi_{r,s} : J^r Y \rightarrow J^s Y$, kde $0 \leq s < r$, označujeme příslušné projekce, $J^0 Y = Y$.

Řez δ projekce fibrované variety $(J^r Y, \pi_r, X)$ nazveme *holonomní*, jestliže existuje řez γ variety (Y, π, X) , pro který platí $\delta = J^r \gamma$.

Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta. Vektorové pole ξ na Y nazýváme *π -vertikální*, jestliže je π -projektabilní a jeho π -projekce ξ_0 (tj. vektorové pole na X splňující $T\pi \circ \xi = \xi_0 \circ \pi$) je nulová. Forma $\eta \in \Lambda^k(J^r Y)$ se nazývá *π -horizontální*, je-li její kontrakce libovolným π -vertikálním vektorovým polem nulová..

Forma $\eta \in \Lambda^k(J^r Y)$ se nazývá *kontaktní*, jestliže pro každý řez γ fibrované variety (Y, π, X) platí $J^r \gamma^* \eta = 0$. Označíme-li souřadnici na bází (t) , souřadnice na Y (t, x^i) , $1 \leq i \leq m$, a souřadnice na $J^r Y$ jsou $(t, x^i, \dot{x}^i = x_1^i, \ddot{x}^i = x_2^i, \dots, \frac{d^p x^i}{dt^p} = x_p^i)$, kde $1 \leq p \leq r$, pak mají kontaktní 1 formy tvar

$$\omega^i = dx^i - \dot{x}^i dt, \quad \omega_q^i = dx_q^i - x_{q+1}^i dt, \quad 1 \leq q \leq r-1,$$

a spolu s formami dt a dx_r^i tvoří bázi 1-forem na prostoru $J^r Y$ adaptovanou ke kontaktní struktuře.

3.1.2 Variační problém na fibrovaných varietách

Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta s jednorozměrnou bází. Horizontální 1-forma $\lambda \in \Lambda_X^1(J^r Y)$, $r \geq 1$, se nazývá *lagrangián r -tého řádu* a dvojice (π, λ) je *Lagrangeova struktura*. Funkce $L = L(t, x^i, \dots, x_r^i)$, kde $\lambda = Ldt$, je vyjádření lagrangiánu v lokálních souřadnicích, se nazývá *Lagrangeova funkce*.

Ke každému lagrangiánu je jednoznačně přiřazena tzv. *Eulerova-Lagrangeova forma* obecně na $J^{2r} Y$, která má v lokálních souřadnicích vyjádření

$$E_\lambda = \sum_{j=0}^r (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j^i} \right) \omega^i \wedge dt.$$

Pro lagrangián prvního řádu (se kterým budeme pracovat ve čtvrté kapitole) tak platí

$$E_\lambda = \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \omega^i \wedge dt.$$

Rovnice pro extrémály lagrangiánu λ lze pak jednoduše zapsat ve tvaru

$$E_\lambda \circ J^2 \gamma = 0.$$

Odvození nalezne čtenář například v práci [14].

3.2 Mechanika neholonomních systémů

Obecný problém neholonomní mechaniky je popsán pomocí geometrické teorie Olgy Rossi (Krupkové), viz například [13], [15], [16].

3.2.1 Neholonomní Lagrangeova struktura

Stručně zrekapitulujeme používaná označení z předchozího odstavce pro případ jednorozměrné báze, uvedeme pojmy a rovnice potřebné pro naše výpočty. Základní fibrovaný prostor je (Y, π, X) , $\dim X = 1$, $\dim Y = m + 1$, vrstva $\pi^{-1}(\{t\}) \subset Y$ nad bodem $t \in X$ je *konfigurační prostor*. První jetové prodloužení je $(J^1 Y, \pi_1, X)$, vrstva $\pi_1^{-1}(\{t\}) \subset J^1 Y$ nad bodem

$t \in X$ je *fázový prostor*. Z dalších prodloužení budeme potřebovat ještě (J^2Y, π_2, X) . Číslo m , $1 \leq i \leq m$, je počet stupňů volnosti mechanické soustavy. (V konkrétních případech v následující kapitole bude obvykle $m = 3$, souřadnice budeme označovat $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.) Uvažujme lagrangeán prvního řádu (horizontální forma na J^1Y) jako kinetickou energii,

$$\lambda = L(t, x^i, \dot{x}^i) dt, \quad L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j, \quad \text{obecně je } L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - U(t, x^i). \quad (3.1)$$

Eulerova-Lagrangeova forma nevázaného systému je

$$E_\lambda = E_i(L)\omega^i \wedge dt, \quad E_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i},$$

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, tj. pohybové rovnice mechanické soustavy pro trajektorie (řezy γ projekce fibrované variety, $\gamma : X \supset t \rightarrow \gamma(t) \in Y$), $\gamma(t) = (t, x^i\gamma(t))$, jsou druhého řádu, $E_i(L) \circ J^2\gamma = 0$, (jejich levé strany jsou afinní ve zrychleních \ddot{x}^i , $1 \leq i \leq m$).

Neholonomní vazba je obecně dána k vazebními podmínkami (rovnicemi)

$$f^a(t, x^i, \dot{x}^i) = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq a \leq k \leq m - 1, \quad \text{rank} \left(\frac{\partial f^a}{\partial \dot{x}^i} \right) = k.$$

Podmínka maximální hodnosti umožňuje (lokálně) zapsat vazební podmínku v explicitním tvaru

$$\dot{x}^{m-k+a} = g^a(t, x^i, \dot{x}^l), \quad 1 \leq k \leq m - 1, \quad 1 \leq l \leq m - k, \quad 1 \leq a \leq k. \quad (3.2)$$

Tyto rovnice definují vazební podvarietu $Q \subset J^1Y$ dimenze $2m - k + 1$ a zobrazení

$$\iota : Q \ni (t, x^i, \dot{x}^l) \longrightarrow (t, x^i, \dot{x}^l, g^a(t, x^j, \dot{x}^s)) \in J^1Y,$$

kde $1 \leq i, j \leq m$, a $1 \leq l, s \leq m - k$, je kanonické vložení.

Pozn.: Formy $\bar{\omega}^i = \iota^*\omega^i$ generují na Q indukovaný kontaktní ideál \bar{I} (anihilátor vázané Cartanovy distribuce). Platí

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^l &= \iota^*\omega^l = dx^l - \dot{x}^l dt, \quad 1 \leq l \leq m - k, \\ \bar{\omega}^{m-k+a} &= \iota^*\omega^{m-k+a} = dx^{m-k+a} - g^a dt, \quad 1 \leq a \leq k. \end{aligned}$$

3.2.2 Kanonická distribuce

S každou neholonomní vazbou je spjata *kanonická distribuce* \mathcal{C} . Je to jeden ze základních objektů geometrické teorie neholonomních systémů. Konstrukce kanonické distribuce je popsána například v [15], [16] nebo [10] a nebudeme se zde zabývat jejím podrobným odvozením. Obsahuje vektorová pole, která jsou v neholonomním problému tzv. *přípustnými variacemi*.

Kanonickou distribucí \mathcal{C} rozumíme distribuci (kodimenze k vzhledem k varietě Q) generovanou $(2(m-k)+1)$ Četajevovými vektorovými poli:

$$\mathcal{C} = \left[\left[\frac{\partial_c}{\partial t}, \frac{\partial_c}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^l} \right] \right], \quad 1 \leq l \leq m-k, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{a=1}^k \left(g^a - \sum_{l=1}^{m-k} \frac{\partial g^a}{\partial \dot{x}^l} \dot{x}^l \right) \frac{\partial}{\partial x^{m-k+a}}, \quad \frac{\partial_c}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{a=1}^k \frac{\partial g^a}{\partial \dot{x}^l} \frac{\partial}{\partial x^{m-k+a}}.$$

Pozn.: Anihilátor kanonické distribuce je

$$\mathcal{C}^0 = [|\varphi^a|], \quad \varphi = \iota^* \omega^{m-k+a} - \sum_{l=1}^{m-k} \frac{\partial g^a}{\partial \dot{x}^l} \iota^* \omega^l, \quad (3.4)$$

Geometrická teorie neholonomních a semiholonomních vazeb a vlastnosti kanonické distribuce je podrobně uvedena například v práci [15], [16] nebo [10].

3.2.3 Neholonomní variační problém a redukované rovnice

Nebudeme zde uvádět odvození rovnic pro *vázaný mechanický systém* ani konstrukci zobrazení *vázané akce* a *vázané Eulerovy-Lagrangeovy formy*. Čtenář je opět nalezne v pracích [15], [16] nebo [10]. Uvedeme jen základní výsledek, tj. rovnice, které budou použity ve čtvrté kapitole pro hledání neholonomních geodetik.

Rovnice neholonomně vázaného systému odpovídající vazbě Q a lagrangiánu λ (tzv. *redukované rovnice*) pro trajektorie tohoto systému mají tvar

$$\begin{aligned} \bar{E}_l \circ J^2 \gamma &= 0, \quad \text{kde} \\ \bar{E}_l &= \varepsilon_l(\bar{L}) - \bar{L}_a \varepsilon_l(g^a), \quad \bar{L} = L \circ \iota, \quad \bar{L}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{m-k+a}} \circ \iota, \\ \varepsilon_l &= \frac{\partial_c}{\partial x^l} - \frac{d_c}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^l}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Na pravé straně předchozího vztahu vystupují *vázané operátory* (viz také (3.3)):

$$\frac{d_c}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{m-k} \dot{x}^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{a=1}^k g^a \frac{\partial}{\partial x^{m-k+a}} + \sum_{l=1}^{m-k} \dot{x}^l \frac{\partial}{\partial \dot{x}^l},$$

$$\frac{\partial_c}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{a=1}^k \frac{\partial g^a}{\partial \dot{x}^l} \frac{\partial}{\partial x^{m-k+a}}.$$

3.2.4 Alternativní přístup — Četajevovy rovnice

Pro získání názorné představy o vázaných mechanických systémech uvažujme nejprve klasickou situaci s *holonomní vazbou* a Lagrangeovou funkcí L . Holonomní vazba je tvaru $f^i(t, x^i) = 0$, $1 \leq i \leq m$, a definuje podvarietu v totálním prostoru Y . V této podvarietě leží všechny přípustné trajektorie mechanického systému. Podmínka je z fyzikálního hlediska zajištěna vazebními silami ortogonálními k vazební podvarietě, které proto při přípustných změnách konfigurace mechanického systému nekonají práci (tzv. *princip virtuálních prací*). Doplněním vazebních sil do pobybových rovnic původně nevázaného systému získáme modifikované pohybové rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + \mu^a \frac{\partial f^a}{\partial x^i} = 0, \quad (3.6)$$

kde funkce souřadnic a času μ_a , $1 \leq a \leq k$, jsou *Lagrangeovy multiplikátory*.

Neholonomní vazba má tvar

$$f^a(1, x^i, \dot{x}^i) = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

a její rovnice definují podvarietu v prvním prodloužení fibrované variety, tj. J^1Y . Neholonomní systémy se řídí tzv. *Četajevovým principem*, podle něž jsou složky vazebních sil určeny parciálními derivacemi funkcí f^a podle rychlostí. Pohybové rovnice, kterých je $m + k$, pak mají tvar

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + \mu^a \frac{\partial f^a}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad (3.7)$$

jedná se o tzv. *Četajevovy rovnice*.

Kapitola 4

Příklady porovnání všech přístupů

4.1 Geodetiky v \mathbf{R}^3

Zvolme na \mathbf{R}^3 globální souřadnicový systém (x, y, z) a vektorová pole v \mathbf{R}^3 generující neintegrabilní distribuci:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Vypočtěme Lieovu závorku (při označení $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$):

$$[X_1, X_2] = \left(X_1^i \frac{\partial X_2^j}{\partial x^i} - X_2^i \frac{\partial X_1^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = 2 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Postupně vyřešíme následující úlohy:

1. Zvolíme metriku na \mathcal{D} tak, aby vektory X_1 a X_2 byly ortonormální, sestrojíme subriemannovskou kometriku a hamiltonián, zapíšeme rovnice (1.5) pro subriemannovské geodetiky.
2. Sestavíme rovnice (1.6) geodetik pro normální konexi na subriemannovské varietě, jejichž řešení by měla odpovídat řešením rovnic (1.5) odvozených z hamiltoniánu.
3. Zvolíme doplněk \mathcal{D}^\perp různými způsoby, u prvního z nich navíc (pro použití druhé a třetí metody) rozlišíme dvě různé volby normovaného vektoru podle následující tabulky:

\mathcal{D}^\perp	normovaný generující vektor X_3	metody výpočtu
První volba doplňku	$X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$	I., II., III.
První volba doplňku	$X_3 = 2 \frac{\partial}{\partial z}$	II., III.
Druhá volba doplňku	$X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$	I., II., III.
Obecná volba doplňku	$X_3 = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial z}$	I.

4. **Metoda I:** Vypočteme strukturní konstanty a koeficienty neholonomní konexe (2.3) a sestavíme neholonomní rovnice (2.4), jejichž řešením budou neholonomní geodetiky, které nalezneme.
5. **Metoda II:** Nalezeneme Riemannovu metriku na \mathbf{R}^3 tak, aby indukovala zvolenou metriku na distribuci \mathcal{D} a zvolený doplněk (tj. aby vektory X_1, X_2 a X_3 tvořily vzhledem k ní ortonormální bázi). Sestavíme lagrangian pro kinetickou energii (3.1) a redukované rovnice (3.5) odpovídající minimalizaci kinetické energie na neholonomní vazbě.
6. **Metoda III:** Alternativně můžeme využít Četajevovy rovnice (3.7).
7. Výsledky všech přístupů porovnáme. Očekáváme, že výsledné geodetiky v žádném případě nebudou záviset na konkrétní volbě normovaného vektoru v rámci téhož doplnku \mathcal{D}^\perp , pouze rovnice mohou být složitější resp. jednodušší pro různé případy. Zjistíme, zda neholonomní geodetiky (pro různé volby doplňků a s použitím různých metod výpočtu) budou splňovat rovnice odvozené ze subriemannovského hamiltoniánu (1.5) (věty 2.5 a 2.6 udávají dostatečnou podmínku). Porovnáme rovnice odvozené z hamiltoniánu (1.5) s rovnicemi geodetik normální konexe na subriemannovské varietě (1.6).

4.1.1 Subriemannovské geodetiky

Distribuci $\mathcal{D} = [|X_1, X_2|]$,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z},$$

můžeme zadat také jako anihilátor formy (pro niž $\omega \wedge d\omega \neq 0$)

$$\omega = \frac{1}{2}(ydx - xdy + dz), \tag{4.1}$$

tu jsme zvolili tak, že současně platí

$$d\omega(X_1, X_2) = (dy \wedge dx)(X_1, X_2) = -1.$$

(Později se k ní vrátíme). Na distribuci $\mathcal{D} = [|X_1, X_2|]$ zvolíme subriemannovskou metriku g takovou, že vektorová pole X_1, X_2 tvoří v každém bodě ortonormální bázi, tj.

$$\mathcal{D}_{(x,y,z)} := \{(u^1, u^2, u^3) \in T_{(x,y,z)}\mathbf{R}^3 \mid u^3 = xu^2 - yu^1\} \quad \text{a} \quad g(u, v) = u^1v^1 + u^2v^2.$$

Sestavme subriemannovskou kometriku a hamiltonián $H : T^*\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$:

$$H(\eta) = (\eta, \eta) = \frac{1}{2}(X_1 \otimes X_1 + X_2 \otimes X_2)(\eta, \eta),$$

kde $\eta(x, y, z) = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ je forma. Dostaneme

$$H(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} [(\alpha - y\gamma)^2 + (\beta + x\gamma)^2] = \frac{1}{2} (\alpha^2 + y^2\gamma^2 - 2\alpha y\gamma + \beta^2 + x^2\gamma^2 + 2\beta x\gamma).$$

Využijeme rovnic (1.5):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \alpha}, & \dot{\alpha} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial \beta}, & \dot{\beta} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial \gamma}, & \dot{\gamma} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic získáme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha - y\gamma, \\ \dot{y} &= \beta + x\gamma, \\ \dot{z} &= (x^2 + y^2)\gamma + (\beta x - \alpha y), \\ \dot{\alpha} &= -x\gamma^2 - \beta\gamma, \\ \dot{\beta} &= -y\gamma^2 + \alpha\gamma, \\ \dot{\gamma} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Normální subriemannovské geodetiky jsou (právě) projekce řešení této soustavy, tj. křivky $\gamma : I \ni t \rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3$ podle věty 1.2.

Tento systém je ekvivalentní souboru jednodušších rovnic (při volbě $a = \alpha - y\gamma$, $b = \beta + x\gamma$ a $\gamma = c$):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a, \\ \dot{y} &= b, \\ \dot{z} &= bx - ay, \\ \dot{a} &= -bc, \\ \dot{b} &= ac, \\ \dot{c} &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pro neznámé funkce a a b získáme homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu (kde jsme označili $c = K$):

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Její řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \sin(Kt + \varphi) \\ A \cos(Kt + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Dále (pro $K \neq 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x} = a &\implies x = \frac{A}{K} \cos(Kt + \varphi) + C, \\ \dot{y} = b &\implies y = \frac{A}{K} \sin(Kt + \varphi) + D, \\ \dot{z} = -ya + xb &= \frac{A^2}{K} + DA \sin(Kt + \varphi) + CA \cos(Kt + \varphi) \implies \\ z &= \frac{A^2}{K}t - \frac{DA}{K} \cos(Kt + \varphi) + \frac{CA}{K} \sin(Kt + \varphi) + B. \end{aligned}$$

Předposlední rovnice odpovídá požadavku na splnění vazební podmínky (4.1)

$$y\dot{x} - x\dot{y} + \dot{z} = 0.$$

Subriemannovskými geodetikami jsou křivky (budeme jim říkat „zobecněné šroubovice“) popsané rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= \frac{A}{K} \cos(Kt + \varphi) + C, \\ y &= \frac{A}{K} \sin(Kt + \varphi) + D, \\ z &= \frac{A^2}{K}t - \frac{DA}{K} \cos(Kt + \varphi) + \frac{CA}{K} \sin(Kt + \varphi) + E. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Přímým dosazením můžeme ověřit, že trajektorie (4.4) spolu s volbou

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{A}{2} \sin(Kt + \varphi) + D\frac{K}{2}, \\ \beta &= \frac{A}{2} \cos(Kt + \varphi) - C\frac{K}{2}, \\ \gamma &= \frac{K}{2}, \end{aligned}$$

splňují soustavu (4.2), tj. funkce $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ jsou řešením soustavy šesti nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu odvozených z hamiltoniánu pro normální subriemannovské geodetiky, vektor $p = (\alpha, \beta, \gamma)$ můžeme nazývat *zobecněnou hybností*.

Zvlášť nyní vyřešíme situaci, kdy $c = \gamma = 0$. Rovnice jsou triviální:

$$\dot{a} = 0, \dot{b} = 0 \implies a = A = \text{konst.}, b = B = \text{konst.}.$$

Pro tento speciální případ dostáváme další geodetiky — přímky

$$\begin{aligned} x &= At + C, \\ y &= Bt + D, \\ z &= (BC - AD)t + E. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tyto přímky vyhovují rovnicím (4.2) odvozeným z hamiltoniánu pro subriemannovské geodetiky, volíme-li zobecněné hybnosti

$$\begin{aligned} \alpha &= A, \\ \beta &= B, \\ \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Příklad 4.1: Příklad výpočtu subriemannovské vzdálenosti

Každé dva dostatečně blízké body $W_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a $W_2 = (x_2, y_2, z_2)$ lze spojit subriemannovskou geodetikou. Tato geodetika je (až na parametrizaci) jediná (věta 1.2). Platí-li pro body W_1, W_2

$$z_2 - z_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2 \tag{4.6}$$

jsou spojeny přímkou (4.5). Její délka je $T\sqrt{A^2 + B^2}$. Není-li splněna podmínka (4.6), můžeme spojit body W_1, W_2 křivkou popsanou vztahy (4.4). Její délka je AT (geodetiky jsou parametrizovány s konstantní rychlostí). Pro první situaci (přímku) vypočteme délku také přímo:

$$x = \frac{x_2 - x_1}{T}t + x_1, \quad y = \frac{y_2 - y_1}{T}t + y_1, \quad z = \left(\frac{y_2 - y_1}{T}x_1 - \frac{x_2 - x_1}{T}y_1 \right)t + z_1, \quad t \in [0, T].$$

Rychlost je pak dána vztahem

$$\begin{aligned} \vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \left(\frac{x_2 - x_1}{T}, \frac{y_2 - y_1}{T}, \frac{y_2 - y_1}{T}x_1 - \frac{x_2 - x_1}{T}y_1 \right) = \frac{x_2 - x_1}{T}(1, 0, -y) + \frac{y_2 - y_1}{T}(0, 1, x) = \\ &= \frac{x_2 - x_1}{T}X_1 + \frac{y_2 - y_1}{T}X_2. \end{aligned}$$

Subriemannovská vzdálenost bodů W_1, W_2 je

$$d(W_1, W_2) = \int_0^T \sqrt{\left[\frac{x_2 - x_1}{T} \right]^2 + \left[\frac{y_2 - y_1}{T} \right]^2} dt = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} T = T\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Konkrétně vypočteme například subriemannovskou vzdálenost bodů $W_1 = (1, 0, 0)$ a $W_2 = (0, 1, \frac{\pi}{2})$ spojených geodetikou

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \ni t \implies \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \in \mathbf{R}^3,$$

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\vec{v}_\gamma\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((-\sin t)^2 + (\cos t)^2) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Bylo by také zajímavé spojit tytéž dva body jinou \mathcal{D} -křivkou a spočítat její délku. To asi přenecháme čtenáři:-).

4.1.2 Geodetiky normální konexe na subriemannovské varietě

Pro distribuci $\mathcal{D} = [X_1, X_2]$, zadanou vektorovými poli

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z},$$

zapišeme subriemannovskou kometriku a její matici $\bar{G} = (\bar{g}^{ij})$. Necht' $\nu = \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz$, $\eta = \eta_1 dx + \eta_2 dy + \eta_3 dz$. kometrika je dána vztahem

$$\begin{aligned} (\nu, \eta) &= (X_1 \otimes X_1 + X_2 \otimes X_2)(\nu, \eta) = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ -y & x & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \bar{G} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro koeficienty normální konexe platí vztahy (1.7):

$$\Gamma_k^{ij} + \Gamma_k^{ji} = \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial x^k},$$

s jejichž využitím sestavíme rovnice (1.6):

$$\dot{x}^i = \bar{g}^{ij}(x(t)) p_j(t), \quad \dot{p}_j(t) = -\Gamma_j^{ik}(x(t)) p_i(t) p_k(t),$$

kde \bar{g}^{ij} jsou složky subriemannovské kometriky a Γ_j^{ik} jsou koeficienty konexe a platí

$$\Gamma_1^{23} + \Gamma_1^{32} = -1, \quad \Gamma_2^{13} + \Gamma_2^{31} = 1, \quad \Gamma_1^{33} = x, \quad \Gamma_2^{33} = y, \quad \text{a } \Gamma_3^{ij} + \Gamma_3^{ji} = 0 \text{ jinak.}$$

Souřadnice na $T^*\mathbf{R}$ označujeme místo $(x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3)$ písmeny $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha - y\gamma, \\
\dot{y} &= \beta + x\gamma, \\
\dot{z} &= -y\alpha + x\beta + (x^2 + y^2)\gamma = -y\dot{x} + x\dot{y}, \quad (\text{rovnice vazby}) \\
\dot{\alpha} &= -\beta\gamma - x\gamma^2, \\
\dot{\beta} &= \alpha\gamma - y\gamma^2, \\
\dot{\gamma} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Získáváme tentýž soubor rovnic, jako jsou rovnice (4.2) odvozené ze subriemannovského hamiltoniánu v předchozím odstavci.

4.1.3 Neholonomní geodetiky

Neholonomní geodetiky — první volba doplňku

Zvolme stejně jako v předchozím odstavci na \mathbf{R}^3 globální souřadnicový systém (x, y, z) a vektorová pole v \mathbf{R}^3 generující neintegrabilní distribuci takto:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Metriku na \mathcal{D} zvolme stejně jako v předchozím případě (vektory X_1 a X_2 tvoří ortonormální soubor) a vyberme doplněk

$$\mathcal{D}^\perp = \left[\left[X_3 = 2 \frac{\partial}{\partial z} \right] \right].$$

Poznamenejme, že pro formu danou vztahem (4.1) pak platí

$$\iota_{X_3} d\omega \equiv 0, \quad \omega(X_3) = 1. \tag{4.8}$$

Pozn.: Výběr doplňku je motivován tím, že pro danou subriemannovskou strukturu na varietě dimenze 3 existuje (až na znaménko) jediná forma ω , splňující $\omega \wedge d\omega \neq 0$, pro kterou $d\omega(X_1, X_2) = \pm 1$ a k ní existuje jediné (opět až na znaménko) vektorové pole X_3 (*Reebovo vektorové pole*) splňující vztahy (4.8).

Pro Lieovy závorky máme

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Projekce Lieovy závorky $[X_1, X_2]_{\mathcal{D}} = 0$, neboť $[X_1, X_2] \in \mathcal{D}_\perp$. Strukturální konstanty (po projekci) tedy jsou $c_{ij}^k = 0$ pro všechna $i, j, k = 1, 2$. S využitím vztahů (2.3) a (2.4) tak získáváme

koeficienty neholonomní konexe a rovnice pro neholonomní geodetiky $\gamma : I \ni t \rightarrow \gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \gamma^3(t)) \in \mathbf{R}^3$:

$$\Gamma_{jk}^i = 0, \text{ pro všechna } i, j, k \in \{1, 2\},$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}^1 &= 0, \\ \ddot{\gamma}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Označíme-li $a = \dot{\gamma}^1$, $b = \dot{\gamma}^2$, získáváme $a = A = \text{konst.}$, $b = B = \text{konst.}$ a

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = A(1, 0, -y) + B(0, 1, x),$$

odtud:

$$\dot{x} = a = A \implies x = At + C,$$

$$\dot{y} = b = B \implies y = Bt + D,$$

$$\dot{z} = -ya + xb = -(Bt + D)A + (At + C)B = BC - AD \implies z = (BC - AD)t + E.$$

Geodetikami jsou přímky

$$\begin{aligned} x &= At + C, \\ y &= Bt + D, \\ z &= (BC - AD)t + E. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Tyto přímky vyhovují rovnicím (4.2) odvozeným z hamiltoniánu pro subriemannovské geodetiky, volíme-li zobecněné hybnosti

$$\begin{aligned} \alpha &= A, \\ \beta &= B, \\ \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Pozn. 1: Je-li doplněk zvolen jako násobek Lieovy závorky generujících polí, jsou vždy koeficienty neholonomní konexe nulové a rovnice triviální.

Pozn. 2: Neholonomní struktura splňuje předpoklady věty 2.5, proto je každá neholonomní geodetika současně geodetikou subriemannovskou (viz vztahy (4.5)). Splnění předpokladů ukážeme v odstavci 4.1.5.

Neholonomní geodetiky — obecná volba doplňku

Zvolme stejně jako v předchozím odstavci na \mathbf{R}^3 globální souřadnicový systém (x, y, z) a vektorová pole v \mathbf{R}^3 generující neintegrabilní distribuci takto:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Metriku na \mathcal{D} zvolme stejně jako v předchozím případě (vektory X_1 a X_2 tvoří ortonormální soubor) a za doplněk budeme tentokrát považovat obecný podprostor generovaný nezávislým vektorem

$$\mathcal{D}^\perp = \left[\left[X_3 = f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + g(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + h(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z} \right] \right],$$

kde funkce f, g, h splňují v každém bodě podmínku pro nezávislost

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ f & g & h \end{vmatrix} = h + fy - gx \neq 0.$$

Matice přechodu mezi standardní bází a novou bází jsou tedy

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ f & g & h \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad T^{-1} = \frac{1}{h + fy - gx} \begin{pmatrix} h - gx & -gy & y \\ fx & h + fy & -x \\ -f & -g & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Určíme nyní (nějakou) Riemannovu strukturu na varietě \mathbf{R}^3 , do níž je vložena naše neholonomní (i předchozí subriemannovská) struktura. Tj. nalezneme takovou metriku na \mathbf{R}^3 , aby vektory X_1, X_2, X_3 tvořily ortonormální soubor vzhledem k ní (tím bude současně zaručeno, že metrika indukovaná na distribuci \mathcal{D} bude odpovídat subriemannovské metrice z předchozích odstavců). Platí

$$G = T^{-1} \cdot (T^{-1})^T = \frac{1}{(h + fy - gx)^2} \cdot \begin{pmatrix} (h - gx)^2 + (gy)^2 + y^2 & (h - gx)fx - (h + fy)gy - xy & -f(h - gx) + g^2y + y \\ (h - gx)fx - (h + fy)gy - xy & (fx)^2 + (h + fy)^2 + x^2 & -f^2x - g(h + fy) - x \\ -f(h - gx) + g^2y + y & -f^2x - g(h + fy) - x & f^2 + g^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní metrika je

$$G^{-1} = T^T \cdot T = \begin{pmatrix} 1 + f^2 & fg & -y + fh \\ fg & 1 + g^2 & x + gh \\ -y + fh & x + gh & x^2 + y^2 + h^2 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Vypočtěme Lieovy závorky

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 2 \frac{\partial}{\partial z}, \\ [X_1, X_3] &= (f_x - yf_z) \frac{\partial}{\partial x} + (g_x - yg_z) \frac{\partial}{\partial y} + (h_x - yh_z + g) \frac{\partial}{\partial z}, \\ [X_2, X_3] &= (f_y + xf_z) \frac{\partial}{\partial x} + (g_y + xg_z) \frac{\partial}{\partial y} + (h_y + xh_z - f) \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

kde indexem značíme parciální derivaci, např. $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ atd.

Nyní vypočteme projekci Lieovy závorky. Označme $X = [X_1, X_2]$. Pro projekce $X_{\mathcal{D}^\perp}$ resp. $X_{\mathcal{D}}$ platí:

$$X_{\mathcal{D}^\perp} = \langle X | X_3 \rangle X_3, \quad X_{\mathcal{D}} = X - \langle X | X_3 \rangle X_3,$$

kde symbolem $\langle X | Y \rangle$ jsme označili funkci na \mathbf{R}^3 , kterou zadává skalární součin definovaný metrikou G . Platí

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]_{\mathcal{D}^\perp} &= \frac{2}{h + fy - gx} X_3, \\ [X_1, X_2]_{\mathcal{D}} &= -\frac{2f}{h + fy - gx} X_1 - \frac{2g}{h + fy - gx} X_2, \end{aligned}$$

pro strukturní konstanty (po projekci) platí

$$c_{12}^1 = -c_{21}^1 = -\frac{2f}{h + fy - gx}, \quad c_{12}^2 = -c_{21}^2 = -\frac{2g}{h + fy - gx}$$

a koeficienty neholonomní konexe jsou

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{2f}{h + fy - gx}, \quad \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{2g}{h + fy - gx}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2f}{h + fy - gx}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{2g}{h + fy - gx}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0. \end{aligned}$$

Sestavíme rovnice pro neholonomní geodetiky

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}^1 - \frac{2f}{h + fy - gx} \dot{\gamma}^1 \dot{\gamma}^2 - \frac{2g}{h + fy - gx} \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 &= 0, \\ \ddot{\gamma}^2 + \frac{2g}{h + fy - gx} \dot{\gamma}^1 \dot{\gamma}^2 + \frac{2f}{h + fy - gx} \dot{\gamma}^1 \dot{\gamma}^1 &= 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Při označení $\dot{\gamma}^1 = a = \dot{x}$, $\dot{\gamma}^2 = b = \dot{y}$, $\dot{z} = -ay + bx = -\dot{x}y + \dot{y}x$ dostáváme rovnice

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{2\dot{y}}{h + fy - gx}(g\dot{y} + f\dot{x}), \\
\ddot{y} &= -\frac{2\dot{x}}{h + fy - gx}(g\dot{y} + f\dot{x}), \\
\dot{z} &= -\dot{x}y + \dot{y}x.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Pozn. 1: Přímou z tvaru rovnic i projekcí je vidět jejich nezávislost na volbě násobku doplňujícího vektoru X_3 , tj. rovnice závisí pouze na neholonomní struktuře (metrice zvolené na distribuci \mathcal{D} a volbě doplňku \mathcal{D}^\perp), nezávisí na výběru konkrétní Riemannovy struktury, do níž ji vkládáme. Pro volbu $X_3 = k(f, g, h)$, $k \neq 0$ budou rovnice geodetik totožné.

Pozn. 2: Zvolíme-li doplňující vektor X_3 přímo jako Lieovu závorku $[X_1, X_2]$ nebo její násobek, budou rovnice vždy triviální (v takovém případě bude projekce Lieovy závorky $[X_1, X_2]_{\mathcal{D}} = 0$, neboť $[X_1, X_2] \in \mathcal{D}^\perp$ a $c_{jk}^i \equiv 0$ resp. $\Gamma_{ji}^i \equiv 0$). Situace je vyřešena i v předchozím odstavci.

Pozn. 3: Neholonomní geodetiky obecně závisí na volbě doplňku, ale (podle věty 2.3) geodetiky dvou neholonomních konexí ∇^1, ∇^2 splývají právě tehdy, když splývá operace symetrické závorky (pro každá dvě vektorová pole $X, Y \in \Gamma D$), tj.

$$\nabla_X^1 Y + \nabla_Y^1 X = \nabla_X^2 Y + \nabla_Y^2 X.$$

Připomeňme, že křivka je geodetika, právě tehdy, když $\langle \dot{\gamma} : \dot{\gamma} \rangle = 0$.

Pozn. 4: Vraťme se k rovnicím (4.2) resp. (4.3) odvozených z hamiltoniánu pro subriemannovské geodetiky. Dosazením $\dot{a} = \ddot{x}$, $\dot{b} = \ddot{y}$, $c = K$ ve druhém souboru rovnic (pro první můžeme postupovat analogicky) získáme soustavu tří rovnic druhého řádu:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\dot{y}K, \\
\ddot{y} &= \dot{x}K, \\
\dot{z} &= \dot{y}x - \dot{x}y.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Porovnáme-li subriemannovské rovnice (4.15) s rovnicemi neholonomními (4.14) pro všechny možné volby doplňků, vidíme, že pouze pro triviální případ $K = 0$ rovnice splývají, jejich řešením jsou přímky (4.5) a v neholonomní situaci to odpovídá volbě doplňku generovaného vektorem

$$X_3 = h \frac{\partial}{\partial z} = \frac{h}{2} [X_1, X_2],$$

tj. $f = 0$, $g = 0$, h je libovolná nenulová funkce (tento případ byl řešen v předchozím odstavci). V ostatních případech jsou neholonomní rovnice nelineární, zatímco subriemannovské rovnice jsou lineární. Některá řešení si však přesto mohou odpovídat, pro různé volby doplňků se řešení pokusíme hledat.

Neholonomní geodetiky — druhá volba doplňku

Pro volbu doplňku

$$\mathcal{D}^\perp = \left[\left[X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right] \right]$$

vypíšeme konkrétně, jak vypadají rovnice odvozené z neholonomní konexe, neboť v dalších odstavcích tutéž situaci řešíme jako úlohu na Riemannově varietě s neholonomní vazbou a tytéž rovnice odvodíme z lagrangiánu.

Do rovnic (4.13) resp. (4.14) tedy dosadíme $f = y$, $g = -x$ a $h = 1$, odtud při označení $\dot{x} = a = \gamma^1$, $\dot{y} = b = \gamma^2$, $\dot{z} = xb - ya = x\dot{y} - y\dot{x}$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-2\dot{y}\dot{z}}{1+x^2+y^2}, \\ \ddot{y} &= \frac{2\dot{x}\dot{z}}{1+x^2+y^2}, \\ \dot{z} &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Další volby doplňku, odpovídající rovnice a řešení

Pomocí programu Maple jsme se pokusili vyřešit soustavu obecných nelineárních rovnic (4.14) pro různé funkce f , g , h zadávající doplněk \mathcal{D}_\perp , jak ukazuje tabulka. Řešení porovnáваме s křivkami (4.4), (4.5), které jsou subriemannovskými geodetikami pro distribuci \mathcal{D} .

Doplňek	f	g	h	$\ddot{x} =$	$\ddot{y} =$
1.	0	0	1	0	0
2.	y	$-x$	1	$\frac{-2\dot{y}\dot{z}}{1+x^2+y^2}$	$\frac{2\dot{x}\dot{z}}{1+x^2+y^2}$
3.	x	y	1	$2\dot{y}(y\dot{y} + x\dot{x})$	$-2\dot{x}(y\dot{y} + x\dot{x})$
4.	x	y	-1	$-2\dot{y}(y\dot{y} + x\dot{x})$	$2\dot{x}(y\dot{y} + x\dot{x})$
5.	1	0	$1 - y$	$2\dot{y}\dot{x}$	$-2\dot{x}\dot{x}$
6.	1	0	$1 + x$	$2\dot{y}\dot{y}$	$-2\dot{x}\dot{y}$
7.	1	1	$1 - y + x$	$2\dot{y}(\dot{y} + \dot{x})$	$-2\dot{x}(\dot{y} + \dot{x})$
8.	-1	1	$1 + y + x$	$2\dot{y}(\dot{y} - \dot{x})$	$-2\dot{x}(\dot{y} - \dot{x})$

Třetí rovnice je vždy stejná, je to rovnice vazby:

$$\dot{z} = \dot{y}x - \dot{x}y. \tag{4.17}$$

Příklad 4.2: Konkrétní neholonomní geodetiky pro různé doplňky

Pokusíme se porovnat neholonomní geodetiky pro různé volby doplňků s geodetikami subriemannovskými.

1. První doplněk. První doplněk (jak jsme se již zmínili) je zvláštní tím, že doplňující vektor je přímo násobkem Lieovy závorky generujících vektorů, v takovém případě je zřejmé, že neholonomní rovnice (2.4) budou triviální. Vidíme, že každá neholonomní geodetika pro volbu doplňku číslo 1 je současně subriemannovskou geodetikou (přímkou) typu (4.5), naopak subriemannovské geodetiky („zobecněné šroubovice“) typu (4.4) nejsou neholonomními geodetikami pro tuto volbu doplňku. Nastává zde tedy inkluze. V odstavci 4.1.5 ukážeme, že je splněna dostatečná podmínka pro tuto inkluzi — *geodetická invariantnost* distribuce.

2. Konstantní řešení. Konstantní řešení (bod) $x = C, y = D, z = E$ splňuje jak neholonomní rovnice pro všechny myslitelné doplňky, tak subriemannovské rovnice. Množina řešení subriemannovských rovnic a množina řešení neholonomních rovnic tak má pro libovolnou volbu doplňku neprázdný průnik. Konstantní řešení však nepovažujeme za geodetiku.

3. Přímková řešení obecně. Jsou-li pro nějaký doplněk generovaný vektorem $X_3 = (f, g, h)$, kde $h + f y - g x \neq 0$, řešením přímky (tj. $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$), pak nastane jedna z následujících možností

a) $f = g = 0$ (první volba doplňku, viz bod 1.).

b) Generátor doplňku je tvaru $X_3 = (-kg, g, h)$, kde $g \neq 0, h \neq g(ky + x)$, a neholonomními geodetikami jsou pouze přímky tvaru

$$x = At + C, \quad y = Akt + D, \quad z = (ACK - AD)t + E.$$

Existují tak další přímky (subriemannovské geodetiky) popsané rovnicemi (4.5), které neholonomními geodetikami pro tento případ nejsou (stačí vzít $B \neq kA$).

4. Druhý doplněk. Přímková řešení rovnic pro doplněk číslo 2 zahrnují tyto možnosti (doplněné o triviální případ konstantního řešení):

1. $x = 0, y = Bt + D, z = E,$

2. $x = At + C, y = RAt + RC, z = E,$

3. $x = At + C, y = 0, z = E,$

4. $x = C, y = D, z = E.$

Můžeme je shrnout do jednotného zápisu:

$$x(t) = At + C, \quad y(t) = Bt + D, \quad BC = AD, \quad \dot{z}(t) = 0.$$

Všechna jsou současně speciálními případy subriemannovských geodetik (přímek) tvaru (4.5), pro které $\dot{z} = 0$.

Dosazením se lze přesvědčit, že rovnicím vyhovuje například také řešení

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = t + C,$$

kteří je speciálním případem subriemannovské geodetiky („zobecněné šroubovice“) tvaru (4.4).

5. Šestý doplněk. Dosazením se můžeme přesvědčit, že řešením rovnic pro doplněk číslo 6 je například křivka zadaná parametricky takto:

$$x = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4e^t}{1 + 16e^{2t}} \right), \quad y = \arctg(4e^t), \quad z = \int xy - y\dot{x}.$$

Tato křivka je sice neholonomní geodetikou pro určitou (naši šestou) konkrétní volbu doplňku, není však geodetikou subriemannovskou. Tj. pro náš šestý doplněk inkluze „subriemannovské geodetiky \supset neholonomní geodetiky“ nenastává.)

Přímková řešení rovnic pro tentýž doplněk číslo 6 mohou být popsána vztahem:

$$x = At + C, \quad y = D, \quad z = -ADt + E$$

a jsou opět speciálním případem subriemannovských geodetik typu (4.5).

6. Závěr. Uvedené příklady naznačují, že mezi subriemannovskými geodetikami a neholonomními geodetikami pro různé volby doplňků není žádný obecnější vztah (například inkluze). Takový vztah by vyžadoval dodatečné předpoklady (viz věta 2.5): Je-li distribuce geodeticky invariantní, pak každá neholonomní geodetika je současně normální subriemannovskou geodetikou (jedná se o dostatečnou, nikoli nutnou podmínku). Je splněna pro první doplněk (ukážeme to v odstavci 4.1.5).

4.1.4 Geodetiky riemannovské struktury s neholonomní vazbou

Konkrétní výpočet neholonomních geodetik - první volba doplňku

Použijeme geometrickou teorii neholonomních mechanických systémů z odstavce 3.2 na náš případ $m = 3$ a $k = 1$ ($Y = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, $X = \mathbf{R}$). Souřadnice označujeme místo indexů (x^i) písmeny (x, y, z) a u jediné vazby budeme v označení ve vztahu (3.2) index a vynechávat, tj. místo g^1 píšeme jen g . Vazbu tedy můžeme zapsat jako

$$\dot{z} = g(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}) = x\dot{y} - \dot{x}y. \quad (4.18)$$

Pro tuto vazbu je odpovídající projekcí kanonické distribuce \mathcal{C} na Y ze vztahu (3.3) právě distribuce \mathcal{D} uvažovaná v předchozích odstavcích. (V případě lineární vazby je kanonická distribuce vždy projektabilní na Y .) Zobrazení ι má tvar

$$\iota : Q \ni (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}) \longrightarrow (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, x\dot{y} - \dot{x}y). \quad (4.19)$$

Na $\mathcal{D} = [[X_1, X_2]]$ je zvolena metrika tak, že vektorová pole X_1, X_2 jsou ortonormální (v bázi X_1, X_2 je dána maticí $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$). Pro všechny tři volby doplňujícího vektoru X_3 postupně najdeme odpovídající metriku $g = (g_{ij})$ na \mathbf{R}^3 , $1 \leq i, j \leq 3$ takovou, že soubor X_1, X_2 a X_3 bude vzhledem k ní ortonormální. Ve všech případech má matice přechodu T od standardní báze $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ k bázi (X_1, X_2, X_3) tvar

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix},$$

třetí řádek matice přechodu souvisí s volbou doplňku. Obecně jsme situaci vyřešili ve vztazích (4.11) až (4.12). Zvolme nyní

$$\mathcal{D}^\perp = \left[\left[X_3 = \frac{\partial}{\partial z} \right] \right].$$

Odpovídající metrika $G = (g_{ij})$ na \mathbf{R}^3 pak je $G = T^{-1}E(T^T)^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & -x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y^2 & -xy & y \\ -xy & 1 + x^2 & -x \\ y & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2} \left[(1 + y^2)\dot{x}^2 + (1 + x^2)\dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2xy\dot{x}\dot{y} + 2y\dot{x}\dot{z} - 2x\dot{y}\dot{z} \right].$$

Při aplikaci vztahů (3.5) používáme symboly ε_x a ε_y místo ε_l , $l = 1, 2$, a index a nabývá pouze jediné hodnoty $a = 1$ (jedna vzební podmínka (4.18)). Získáváme tak

$$\bar{L} = L \circ \iota = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \bar{L}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \circ \iota = 0.$$

Protože je $\bar{L}_1 = 0$, mají rovnice (3.5) tvar

$$\varepsilon_x(\bar{L}) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial x} - \frac{d_c}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}} = -\ddot{x} = 0, \quad (4.20)$$

$$\varepsilon_y(\bar{L}) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial y} - \frac{d_c}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} = -\ddot{y} = 0. \quad (4.21)$$

Rovnice jsou triviální a jsou totožné s rovnicemi odvozenými z neholonomní konexe. Jejich řešením jsou přímky

$$\begin{aligned} x &= At + C, \\ y &= Bt + D, \\ z &= (BC - AD)t + E. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A jak už víme, neholonomní geodetiky (4.22) také splňují soustavu rovnic (4.2) odvozených z hamiltoniánu pro subriemannovské geodetiky, volíme-li zobecněné hybnosti

$$\begin{aligned} \alpha &= A, \\ \beta &= B, \\ \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Vezmeme-li generátor doplňku

$$\mathcal{D}^\perp = \left[\left[X_3 = 2 \frac{\partial}{\partial z} \right] \right]$$

a požadujeme-li, aby soubor (X_1, X_2, X_3) tvořil ortonormální bázi v \mathbf{R}^3 , získáme (obdobně jako v předchozím případě) metriku

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{4} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{4} \\ \frac{y}{4} & -\frac{x}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Lagrangián pro kinetickou energii bude totožný, stejně jako rovnice pro neholonomní vazbu. Geodetiky budou opět přímky popsané vztahem (4.22).

Konkrétní výpočet neholonomních geodetik - druhá volba doplňku

Matice T přechodu od báze $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ k bázi $\left(\frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}, y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$ a matice inverzní jsou

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 1 + x^2 & xy & y \\ xy & 1 + y^2 & -x \\ -y & x & 1 \end{pmatrix},$$

takže metrika na výchozím prostoru, která indukuje euklidovskou metriku na distribuci \mathcal{D} , je

$$G = (T^T T)^{-1} = T^{-1} (T^T)^{-1} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 1 + x^2 & xy & 0 \\ xy & 1 + y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lagrangeova funkce je

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \left[(1 + x^2) \dot{x}^2 + 2xy \dot{x} \dot{y} + (1 + y^2) \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right],$$

vazba je stejná. Platí

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2+y^2} [(1+x^2)\dot{x}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y} + (1+y^2)\dot{y}^2 + (xy - \dot{x}\dot{y})^2] = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

$$\bar{L}_1 = \frac{xy - \dot{x}\dot{y}}{1+x^2+y^2}.$$

Dále dosazujeme do obecných vztahů 3.5 a s použitím stejné symboliky jako u první volby doplňku dostaneme:

$$\varepsilon_x(\bar{L}) = \frac{\partial_c \bar{L}}{\partial x} - \frac{d_c}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial_c \bar{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{d_c}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}} = \ddot{x}, \quad \varepsilon_x(\bar{L}) = -\ddot{x},$$

$$\varepsilon_y(\bar{L}) = \frac{\partial_c \bar{L}}{\partial y} - \frac{d_c}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial_c \bar{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{d_c}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} = \ddot{y}, \quad \varepsilon_y(\bar{L}) = -\ddot{y}.$$

Vazební funkce je dána vztahem (4.18), proto je $\varepsilon_x(g) = 2\dot{y}$, $\varepsilon_y(g) = -2\dot{x}$. Eulerovy-Lagrangeovy výrazy jsou

$$\bar{E}_x = \varepsilon_x(\bar{L}) - \bar{L}_1 \varepsilon_x(g), \quad \bar{E}_y = \varepsilon_y(\bar{L}) - \bar{L}_1 \varepsilon_y(g),$$

$$\bar{E}_x = -\ddot{x} - 2\dot{y} \frac{xy - \dot{x}\dot{y}}{1+x^2+y^2},$$

$$\bar{E}_y = -\ddot{y} + 2\dot{x} \frac{xy - \dot{x}\dot{y}}{1+x^2+y^2}.$$

Získáváme soustavu rovnic druhého řádu, která je (podle očekávání) totožná se soustavou (4.16), odvozenou pro tutéž situaci z neholonomní konexe:

$$\ddot{x} = \frac{-2\dot{y}\dot{z}}{1+x^2+y^2},$$

$$\ddot{y} = \frac{2\dot{x}\dot{z}}{1+x^2+y^2},$$

$$\dot{z} = xy - y\dot{x}.$$

4.1.5 Geodetiky na Riemannově varietě bez vazby a geodetická invariantnost distribuce

Viděli jsme, že pro první volbu doplňku byla množina všech neholonomních geodetik podmnožinou množiny subriemannovských geodetik. V tomto odstavci ukážeme, že je splněna dostatečná

podmínka pro takovou inkluzi (věta 2.5): Distribuce \mathcal{D} je totiž geodeticky invariantní. K důkazu využijeme tvrzení 2.4.

Zkoumejme rovnice geodetik pro lagrangián z odstavce 4.1.4

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}[(1+y^2)\dot{x}^2 + (1+x^2)\dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2xy\dot{x}\dot{y} + 2y\dot{x}\dot{z} - 2x\dot{y}\dot{z}],$$

odpovídající vložení neholonomní struktury do Riemannovy variety s metrikou

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & -x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y^2 & -xy & y \\ -xy & 1+x^2 & -x \\ y & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Sestavme Eulerovy-Lagrangeovy rovnice bez vazby:

$$E_x = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (1+y^2)\ddot{x} - xy\ddot{y} + y\ddot{z} + \dot{y}(\dot{z} - x\dot{y} + \dot{x}y) = 0,$$

$$E_y = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -xy\ddot{x} + (1+x^2)\ddot{y} - x\ddot{z} - \dot{x}(\dot{z} - x\dot{y} + \dot{x}y) = 0,$$

$$E_z = -\ddot{z} + x\ddot{y} - y\ddot{x} = -\frac{d}{dt}(\dot{z} + y\dot{x} - x\dot{y} - K) = 0.$$

Z poslední rovnice plyne

$$\dot{z} = x\dot{y} - y\dot{x} + K, \quad \text{kde } K \text{ je integrační konstanta.}$$

Dosazením $\dot{z} = x\dot{y} - y\dot{x} + K$ do rovnic $E_x = 0$, $E_y = 0$ dostaneme

$$E_x = \ddot{x} + K\dot{y} = 0,$$

$$E_y = \ddot{y} - K\dot{x} = 0.$$

Obecné řešení této soustavy pro $K = 0$ (tj. všechna řešení soustavy, která zároveň splňují podmínku vazby) je

$$\begin{aligned} x &= At + C, \\ y &= Bt + D, \\ z &= (BC - AD)t + E. \end{aligned} \tag{4.23}$$

kde A, B, C, D , a E jsou integrační konstanty.

Pro $K \neq 0$ jsou řešením soustavy funkce

$$\begin{aligned}x(t) &= a \sin |K|t + b \cos |K|t + P, \\y(t) &= -a \cos |K|t + b \sin |K|t + Q, \\z(t) &= \int (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t) + K) dt,\end{aligned}\tag{4.24}$$

kde a, b, P, Q jsou integrační konstanty. Platí

$$x\dot{y} - y\dot{x} = |K| [(a^2 + b^2) + (bP - aQ) \cos |K|t + (bQ + aP) \sin |K|t].$$

Z rovnice $E_z = 0$ pro případ $K \neq 0$ plyne $\dot{z} = x\dot{y} - y\dot{x} + K$, odtud integrací

$$\begin{aligned}\dot{z} &= |K| [(a^2 + b^2) + (bP - aQ) \cos |K|t + (bQ + aP) \sin |K|t], \\z(t) &= |K|(a^2 + b^2)t + (bP - aQ) \sin |K|t - (bQ + aP) \cos |K|t + R.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Dostali jsme tak všechna řešení Eulerových-Lagrangeových rovnic *nevázaného* lagrangiánu. Máme-li z nich však vybrat jen ta, která splňují podmínku vazby, tj. $x\dot{y} - y\dot{x} = \dot{z}$, musíme položit $K = 0$. Řešení (4.24), (4.25), odpovídající nenulové hodnotě K , nesplňují rovnici vazby. Kdybychom do řešení (4.24), (4.25) dosadili $K = 0$, dostaneme

$$x(t) = b + P = B, \quad y(t) = -a + Q = D, \quad z(t) = -(aP + bQ) + R = \bar{Q}, \quad A = C = 0,$$

což odpovídá řešení (4.23).

Vidíme, že množina neholonomních geodetik neholonomní struktury odpovídající našemu prvnímu doplňku (popsaných rovnicemi (4.22) v odstavci 4.1.4) splývá s množinou těch geodetik Riemannovy struktury (do níž je naše neholonomní struktura vložena), jež jsou tečné k distribuci \mathcal{D} (křivky popsané rovnicemi (4.23)). Distribuce \mathcal{D} je proto geodeticky invariantní podle tvrzení 2.4.

Na závěr kapitoly se podíváme na některé příklady s výstupem do fyziky opět pomocí přístupu variační mechaniky, neholonomní riemannovské geometrie a subriemannovské geometrie (tentokrát v obráceném pořadí).

4.2 Geodetiky fyzikálních úloh — rotační úloha

Uvažujme o zjednodušené situaci při pohybu brusle. Brusle, na níž je připevněn nůž, se může otáčet o libovolný úhel. Brusle se také může pohybovat translačním pohybem po ledové ploše, ale pouze ve směru nože. Chceme-li tedy změnit směr jízdy, je třeba otočit nůž o vhodný úhel. Z kinematického hlediska situace odpovídá modelu, ve kterém jsme označili $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

souřadnice těžiště, pro jednoduchost je můžeme umístit do středu nože, a $z \in \mathbf{R}$ úhel natočení nože vůči ose x . Vazební podmínka pro rychlost těžiště je určena jako

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan z \quad \Longrightarrow \quad \dot{y} \cos z - \dot{x} \sin z = 0. \quad (4.26)$$

Zvolme bázi na $T\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_3 &= [X_1, X_2] = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Vektorová pole X_1 a X_2 generují distribuci \mathcal{D} na $T\mathbf{R}^3$ odpovídající vazbě (4.26). V subriemannovské úloze zvolíme metriku na distribuci \mathcal{D} tak, aby vektorová pole byla X_1, X_2 byla ortonormální. Pro neholonomní úlohu zvolíme neholonomní strukturu tak, aby metrika na distribuci \mathcal{D} zůstala stejná jako v subriemannovské úloze a doplněk \mathcal{D}^\perp byl generovaný vektorovým polem X_3 . Pro úlohu na Riemannově varietě s neholonomní vazbou zvolíme Riemannovu metriku G tak, aby vektorová pole X_1, X_2 a X_3 tvořila ortonormální bázi.

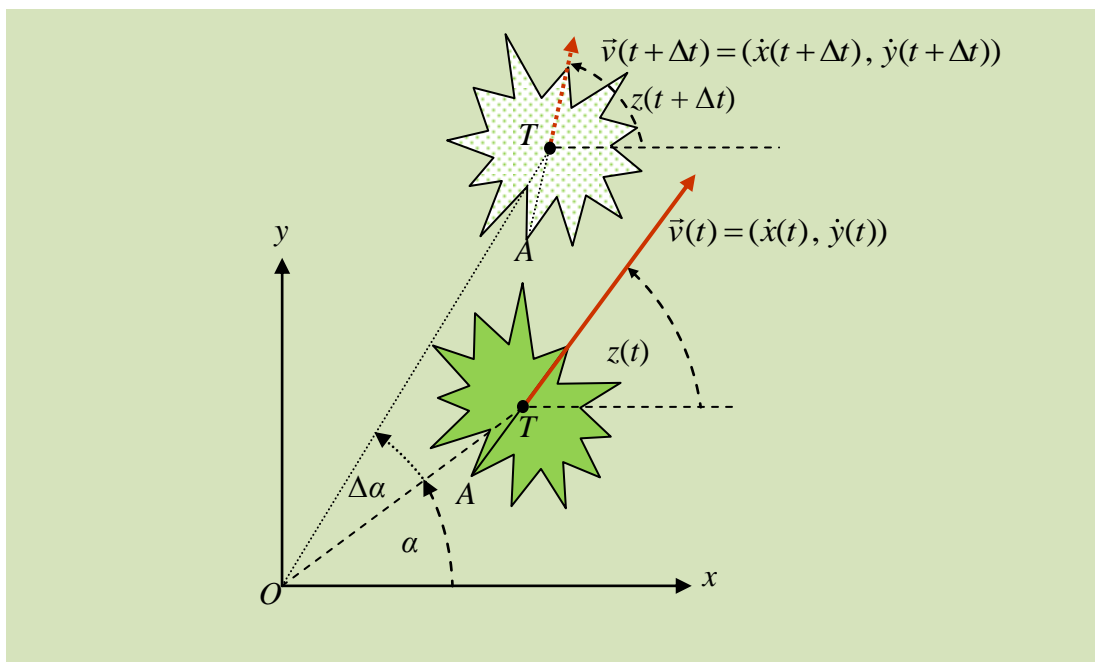
Pro matici přechodu platí

$$T = \begin{pmatrix} \cos z & \sin z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin z & -\cos z & 0 \end{pmatrix}, \quad T = T^T = T^{-1} = (T^T)^{-1} \Longrightarrow G = E = G^{-1}.$$

Podíváme se na problém nyní v opačném pořadí: nejprve očima fyziky jako na neholonomní úlohu na Riemannově varietě, poté najdeme geodetiky neholonomní struktury a nakonec jako na subriemannovskou úlohu.

4.2.1 Rotační problém jako úloha na Riemannově varietě s neholonomní vazbou

Tuhé těleso (obrázek 4.1) se pohybuje v rovině xy translačním pohybem rychlostí $\vec{v}(t)$ (rychlost těžiště T) a otáčí se úhlovou rychlostí $\dot{z}(t)$ kolem osy kolmé k rovině xy a procházející bodem T . Rychlost bodu T je stále rovnoběžná s osou AT pevnou v tělese. Označíme $T = (x, y)$, $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ a položíme hmotnost $m = 2$, moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm a kolmé k rovině pohybu $J = 2$ (v odpovídajících jednotkách). Tuto volbu jsme udělali proto, aby kinetická energie objektu přesně odpovídala metrice, kterou budeme používat v dalších odstavcích.



Obr. 4.1 Rotační úloha.

Základní fibrovanou varietou je $(Y, \pi, X) = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3, \pi, \mathbf{R})$ se souřadnicemi (t, z, x, y) . Prvním prodloužením je fibrovaná varieta $(J^1Y, \pi_1, X) = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, \pi_1, \mathbf{R})$ se souřadnicemi $(t, z, x, y, \dot{z}, \dot{x}, \dot{y})$. Ve stejné symbolice jako v předchozích odstavcích získáváme

$$L = \dot{z}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad \text{Lagrangoeva funkce,}$$

$$\dot{y} = g(t, z, x, y, \dot{z}, \dot{x}) = \dot{x} \tan z \quad \text{vazba,}$$

$$\iota: Q \ni (t, z, x, y, \dot{z}, \dot{x}) \longrightarrow \iota(t, z, x, y, \dot{z}, \dot{x}) = (t, z, x, y, \dot{z}, \dot{x}, \dot{x} \tan z) \in J^1Y,$$

$$\bar{L} = L \circ \iota = \dot{z}^2 + \dot{x}(1 + \tan^2 z), \quad \bar{L}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \circ \iota = 2\dot{x} \tan z,$$

$$E_z = \varepsilon_z(\bar{L}) - \bar{L}_1 \varepsilon_z(g),$$

$$E_x = \varepsilon_x(\bar{L}) - \bar{L}_1 \varepsilon_x(g),$$

$$E_z = 0, \quad E_x = 0, \quad \text{pohybové rovnice.}$$

Dále použijeme obecné vztahy (3.5). Dostaneme:

$$\varepsilon_z(\bar{L}) = \frac{2\dot{x}^2 \tan z}{\cos^2 z} - 2\dot{z},$$

$$\varepsilon_z(g) = \frac{\dot{x}}{\cos^2 z},$$

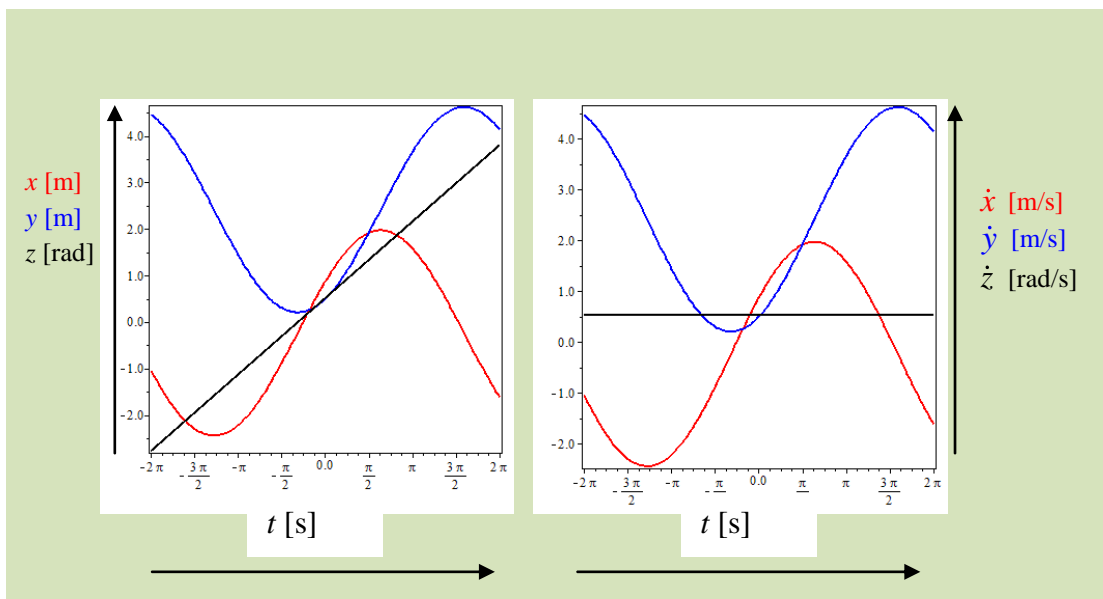
$$E_z = \frac{2\dot{x}^2 \tan z}{\cos^2 z} - 2\ddot{z} - 2\dot{x} \tan z \frac{\dot{x}}{\cos^2 z} = -2\ddot{z},$$

$$\varepsilon_x(\bar{L}) = -\frac{4\dot{x}\dot{z} \tan z}{\cos^2 z} - 2\ddot{x}(1 + \tan^2 z),$$

$$\varepsilon_x(g) = -\frac{\dot{z}}{\cos^2 z},$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{4\dot{x}\dot{z} \tan z}{\cos^2 z} - 2\ddot{x}(1 + \tan^2 z) + 2\dot{x} \tan z \frac{\dot{z}}{\cos^2 z} \\ &= -\frac{2}{\cos^2 z} (\ddot{x} + \dot{x}\dot{z} \tan z). \end{aligned}$$

Řešení:



Obr. 4.2 Řešení rotační úlohy.

$$z(t) = At + B \quad A, B \text{ integrační konstanty} \quad B = z(0), \quad A = \dot{z}(0),$$

$$\ddot{x} + A\dot{x} \tan(At + B) = 0,$$

$$\ddot{x} + \dot{x}\dot{z} \tan z = 0 \implies \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -A \tan(At + B) \quad \text{pro } A \neq 0$$

$$\implies \ln |\dot{x}| = \ln |\cos(At + B)| + \text{konst} \implies$$

$$\implies \frac{\dot{x}}{\cos(At + B)} = C,$$

tj.

$$x(t) = \frac{C}{A} \sin(At + B) + D, \quad y(t) = -\frac{C}{A} \cos(At + B) + E, \quad z(t) = At + B \quad (4.27)$$

nebo (pro $A = 0$)

$$x(t) = (C \cos B)t + D, \quad y(t) = (C \sin B)t + E, \quad z(t) = B. \quad (4.28)$$

S dosazením okrajových podmínek

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\dot{x}(0)}{A \cos B} [\sin(At + B) - \sin B] + x(0), \\ y(t) &= -\frac{\dot{x}(0)}{A \cos B} [\cos(At + B) - \cos B] + y(0). \end{aligned}$$

Pro $A = 0$ dostaneme $\ddot{x} = 0$, tj. $x(t) = \dot{x}(0)t + x(0)$, $y(t) = \dot{x}(0)t \tan B + y(0)$. Grafy na obrázku 4.2 jsou sestrojeny v Maple pro $A = \pi/6 \text{ rad}^{-1}$, $A = \pi/6 \text{ rad}$, $\dot{x}(0) = 1 \text{ m s}^{-1}$, $x(0) = \cos \pi/6 \text{ m}$, $y(0) = \sin \pi/6 \text{ m}$.

Pro $A = 0$ je vazební síla nulová (těleso se netočí a jeho těžiště se pohybuje rovnoměrně přímočaře, jeho rychlost stále splňuje vazební podmínku, aniž k tomu potřebuje vazební sílu). Počáteční podmínka pro složky rychlosti musí samozřejmě odpovídat vazební podmínce. Pro $A \neq 0$ jde o rovnoměrný pohyb po kružnici, vazební síla odpovídá síle dostředivé.

Kontrola rovnic pomocí Lagrangeových multiplikátorů (Četajevovy rovnice (3.7)) souhlasí. Rovnice pomocí multiplikátoru s vazbou $f = \dot{y} - \dot{x} \tan z$ jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\mu \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0 &\implies -\ddot{x} = \mu \tan z, \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -\mu \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 &\implies -\ddot{y} = -\mu, \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = -\mu \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0 &\implies -\ddot{z} = 0. \end{aligned}$$

Odtud rovnice pro z a x jsou stejné jako při předchozím postupu, mají tedy stejné řešení.

Pozn.: V souvislosti s rotační úlohou se ukazuje zajímavá analogie. Chápeme-li proměnnou z nikoli jako úhel, ale jako standardní z -souřadnici v \mathbf{R}^3 (v metrech), představují neholonomní geodetiky (4.27) šroubovice. Tato situace má důležitou fyzikální interpretaci: Víme, že šroubovice jsou řešením pohybových rovnic nabitě částice v homogenním magnetickém poli (v našem

případě půjde o situaci, kdy jeho indukce $\vec{\mathcal{B}}$ má směr osy z , tj. $\vec{\mathcal{B}} = (0, 0, \mathcal{B})$. Vazební síla má (pro případ naší vazby $f = \dot{y} - \dot{x} \tan z$) tvar

$$\vec{F} = \mu \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) = (-\mu \tan z, \mu, 0).$$

Pomocí Četajevových rovnic a dosazením řešení (4.27) úlohy o rotaci dostaneme

$$\begin{aligned} F_x &= -\mu \tan z = \ddot{x} = -A\dot{y}, \\ F_y &= \mu = \ddot{y} = A\dot{x}, \\ F_z &= 0. \end{aligned}$$

Toto vyjádření představuje Lorentzovu magnetickou sílu $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}$, působící na částici s nábojem e v homogenním magnetickém poli o indukci $\vec{\mathcal{B}} = (0, 0, \mathcal{B})$. Konstanta $|A| = |e|\mathcal{B}$ (při jednotkové hmotnosti částice) představuje tzv. cyklotronovou frekvenci. (Poznamenejme ještě, že řešení (4.27) odpovídá specifickému požadavku $\dot{z}(t) = A$.) Matematická formulace této úlohy i její řešení budou stejné, jako v našem případě brusle.

4.2.2 Geodetiky neholonomní struktury pro rotační úlohu

Zvolme varietu $M = \mathbf{R}^3$ s globálním souřadnicovým systémem (x, y, z) a na ní distribuci \mathcal{D} zadanou jako v předchozím odstavci

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Zvolme doplněk

$$\mathcal{D}^\perp = \left[\left[\sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y} \right] \right].$$

Pro Lieovu závorku platí $[X_1, X_2] = X_3$, její projekce na \mathcal{D} je tedy nulová, stejně tak strukturní konstanty a koeficienty neholonomní konexe. Rovnice (2.4) jsou triviální:

$$\ddot{\gamma}^1 = \dot{a} = 0, \quad \ddot{\gamma}^2 = \dot{b} = 0 \implies a = C, \quad b = A$$

a

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = B(\cos z, \sin z, 0) + A(0, 0, 1),$$

odtud

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A \implies z = At + B, \\ \dot{x} &= C \cos z \implies x = \frac{C}{A} \sin(At + B) + D, \\ \dot{y} &= C \sin z \implies y = -\frac{C}{A} \cos(At + B) + E. \end{aligned}$$

Celkem

$$x(t) = \frac{C}{A} \sin (At + B) + D, \quad y(t) = -\frac{C}{A} \cos (At + B) + E, \quad z(t) = At + B$$

nebo (pro $A = 0$)

$$x(t) = (C \cos B)t + D, \quad y(t) = (C \sin B)t + E, \quad z(t) = B.$$

Řešení přesně odpovídá geodetikám Riemannovy struktury s neholonomní vazbou — (4.27) a (4.28).

4.2.3 Subriemanovské geodetiky pro rotační úlohu

Zvolme varietu $M = \mathbf{R}^3$ s globálním souřadnicovým systémem (x, y, z) a na ní distribuci \mathcal{D} zadanou jako anihilátor formy

$$\omega = \sin z dx - \cos z dy.$$

Tato situace odpovídá vazební podmínce

$$\dot{y} \cos z - \dot{x} \sin z = 0.$$

Distribuce \mathcal{D} může být generována například vektory

$$\mathcal{D} = [|X_1, X_2|],$$

kde

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Uvažujme subriemanovskou metriku na \mathcal{D} tak, že vektorová pole X_1, X_2 jsou ortonormální. Spočtěme Lieovu závorku

$$[X_1, X_2] = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y}$$

a platí

$$\begin{vmatrix} \cos z & \sin z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin z & -\cos z & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Distribuce je tedy úplně neintegrabilní. Sestavíme hamiltonián, označme $\eta = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$:

$$H(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}(X_1 \otimes X_1 + X_2 \otimes X_2)(\eta, \eta) = \frac{1}{2}(\alpha^2 \cos^2 z + 2\alpha\beta \cos z \sin z + \beta^2 \sin^2 z + \gamma^2).$$

Získáváme soustavu šesti nelineárních rovnic odvozených z hamiltoniánu (1.5):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= 0 \implies \alpha = R, \\ \dot{\beta} &= 0 \implies \beta = S, \\ \dot{\gamma} &= \alpha^2 \cos z \sin z - \alpha\beta \cos 2z - 2\beta^2 \sin z \cos z = \frac{1}{2}[R^2 - S^2] \sin 2z - RS \cos 2z, \\ \dot{x} &= \alpha \cos^2 z + \beta \cos z \sin z = \cos z[R \cos z + S \sin z], \\ \dot{y} &= \beta \sin^2 z + \alpha \cos z \sin z = \sin z[R \cos z + S \sin z], \\ \dot{z} &= \gamma.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Rovnice v této práci nebudeme řešit. Jejich řešení vede na eliptický integrál (třetí rovnici lze substitucí převést na rovnici matematického kyvadla $\ddot{z} = q \sin z$). Můžeme však porovnat řešení rovnic pro neholonomní geodetiky, dané vztahy (4.27) a (4.28). Pro volbu zobecněných hybností $\gamma = 0$, $\alpha = \dot{x} = C \cos B$ a $\beta = \dot{y} = C \sin B$ jsou přímkové neholonomní geodetiky popsané vztahy (4.28) řešením subriemannovských rovnic. Ostatní neholonomní geodetiky dané vztahy (4.27) subriemannovskými geodetikami nejsou.

4.2.4 Geodetiky normální konexe na subriemannovské varietě pro rotační úlohu

Pro ilustraci odvodíme rovnice také pomocí normální konexe (v odstavci 1.7 jsme obecně ukázali, že půjde o tytéž rovnice). Mějme distribuci $\mathcal{D} = [X_1, X_2]$ z předchozího odstavce, zadanou ortonormálními vektorovými poli

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}$$

zapišeme subriemannovskou kometriku a její matici $\overline{G} = (\overline{g}^{ij})$. Necht' $\nu = \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz$, $\eta = \eta_1 dx + \eta_2 dy + \eta_3 dz$. kometrika je dána vztahem

$$(\nu, \eta) = (X_1 \otimes X_1 + X_2 \otimes X_2)(\nu, \eta) = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 z & \cos z \sin z & 0 \\ \cos z \sin z & \sin^2 z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \overline{G} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}.$$

Pro koeficienty normální konexe platí vztahy (1.7):

$$\Gamma_k^{ij} + \Gamma_k^{ji} = \frac{\partial \overline{g}^{ij}}{\partial x^k},$$

s jejichž využitím sestavíme rovnice (1.6):

$$\dot{x}^i = \overline{g}^{ij}(x(t))p_j(t), \quad \dot{p}_j(t) = -\Gamma_j^{ik}(x(t))p_i(t)p_k(t),$$

kde \overline{g}^{ij} jsou složky subriemannovské kometriky a Γ_j^{ik} jsou koeficienty konexe a platí

$$\Gamma_1^{ij} + \Gamma_1^{ji} = 0, \quad \Gamma_2^{ij} + \Gamma_2^{ji} = 0, \quad \Gamma_3^{12} + \Gamma_3^{21} = \cos 2z,$$

$$\Gamma_3^{22} = \sin 2z, \quad \Gamma_3^{11} = -\sin 2z, \quad \Gamma_3^{13} + \Gamma_3^{31} = 0, \quad \Gamma_3^{23} + \Gamma_3^{32} = 0.$$

Souřadnice na $T^*\mathbf{R}$ označujeme místo $(x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3)$ písmeny $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$:

$$\dot{\alpha} = 0 \implies \alpha = R,$$

$$\dot{\beta} = 0 \implies \beta = S,$$

$$\dot{\gamma} = \alpha^2 \cos z \sin z - \alpha\beta \cos 2z - 2\beta^2 \sin z \cos z = \frac{1}{2}[R^2 - S^2] \sin 2z - RS \cos 2z,$$

$$\dot{x} = \alpha \cos^2 z + \beta \cos z \sin z = \cos z [R \cos z + S \sin z],$$

$$\dot{y} = \beta \sin^2 z + \alpha \cos z \sin z = \sin z [R \cos z + S \sin z],$$

$$\dot{z} = \gamma.$$

Získáváme opět stejný soubor rovnic, jako jsou rovnice odvozené ze subriemannovského hamiltoniánu v předchozím odstavci.

4.3 Geodetiky fyzikálních úloh — planimetr

Planimetr je přístroj na měření obsahů ploch. Jeho poloha je určena dvěma souřadnicemi bodu C v rovině, tj. $C = (x, y)$, kde C je bod kontaktu kolečka s vodorovnou podložkou (není to těžiště) a dvěma úhly θ a φ (viz obrázek 4.3). Pro plnou funkčnost planimetru bychom měli kromě neholonomní vazby brát v úvahu ještě dvě vazby holonomní, ty nebudeme pro tuto ukázkou uvažovat. Jak funguje přístroj je popsáno například v [9].

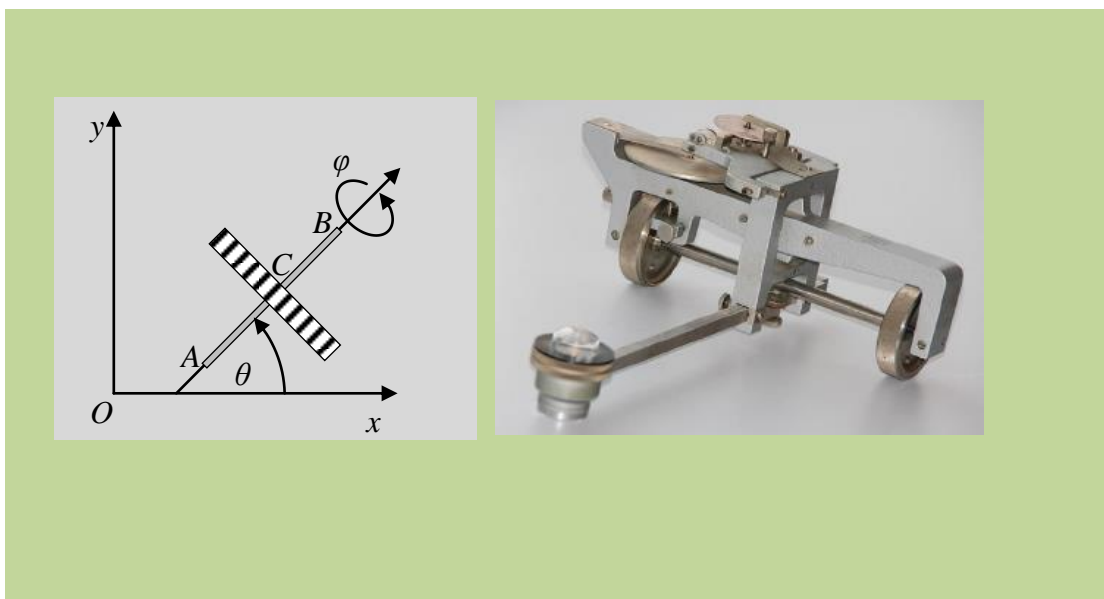
Neholonomní vazební podmínku můžeme zapsat ve tvaru

$$\dot{\varphi} = \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta. \quad (4.30)$$

4.3.1 Planimetr jako úloha na Riemannově varietě s neholonomní vazbou

Lagrangeova funkce a neholonomní vazba ve vhodných jednotkách jsou

$$L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2, \quad \dot{\varphi} = \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta.$$



Obr. 4.3 Planimetr.

Opět s použitím stejné symboliky a rovnic (3.5) získáváme

$$\bar{L} = L \circ \iota = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 + (\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta)^2, \quad \bar{L}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \circ \iota = 2(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta)$$

a

$$\varepsilon_x(\bar{L}) - \bar{L}_1 \varepsilon_x(g) = 0, \quad \varepsilon_y(\bar{L}) - \bar{L}_1 \varepsilon_y(g) = 0, \quad \varepsilon_\theta(\bar{L}) - \bar{L}_1 \varepsilon_\theta(g) = 0.$$

Redukované rovnice tedy jsou

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(1 + \sin^2 \theta) - \ddot{y} \sin \theta \cos \theta + \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + \dot{y}\dot{\theta} \sin^2 \theta &= 0, \\
-\ddot{x} \sin \theta \cos \theta + \ddot{y}(1 + \cos^2 \theta) - \dot{x}\dot{\theta} \cos^2 \theta - \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= 0, \\
\ddot{\theta} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Řešení té poslední je jasné: $\theta = At + B$. Po vynásobení první z rovnic (4.31) $\cos \theta$ a druhé $\sin \theta$ a sečtení, resp. po vynásobení první z těchto rovnic $\sin \theta$, druhé $\cos \theta$ a odečtení dostaneme

$$\begin{aligned}
\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta &= 0, \\
2(\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta) + \dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta &= 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Derivováním rovnice vazby dostaneme

$$(\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta) + (\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta) = \ddot{\varphi}. \tag{4.33}$$

S uvážením druhé rovnice (4.32) dostaneme

$$\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta + \ddot{\varphi} = 0. \tag{4.34}$$

První rovnice sady (4.32), rovnice (4.34) a vazba dávají soustavu

$$\begin{aligned}
\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta &= 0, \\
\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta &= -\ddot{\varphi}, \\
\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta &= \dot{\varphi},
\end{aligned}$$

kde $\theta = At + B$. Řešení této soustavy s programem Maple je v příloze, ale bude získáno také v následujícím odstavci pomocí rovnic pro neholonomní konexi.

4.3.2 Geodetiky neholonomní konexe pro úlohu s planimetrem

Příkladu s planimetrem řešeném v předchozím odstavci odpovídá distribuce $\mathcal{D} = [[X_1, X_2, X_3]]$ na varietě $M = \mathbf{R}^4$:

$$X_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

a volba doplňku

$$\mathcal{D}_\perp = [[X_4]], \quad X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Soubor X_1, X_2, X_3, X_4 je ortonormální vzhledem k metrice odpovídající použitému lagrangiánu.

Vypočtěme Lieovy závorky:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad [X_2, X_3] = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Distribuce je tedy úplně neintegrabilní.

Pro Lieovy závorky platí:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = \frac{\sqrt{2}}{2} X_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} X_4, \quad [X_2, X_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}} X_1.$$

Vidíme, že strukturální konstanty (vypočtené z projekcí Lieových závorek na \mathcal{D}) jsou

$$c_{13}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c_{31}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c_{23}^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c_{32}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c_{12}^i = c_{21}^i = 0.$$

Pro koeficienty neholonomní konexe platí

$$\Gamma_{31}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \Gamma_{32}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{jinak } \Gamma_{jk}^i = 0$$

a neholonomní geodetiky jsou popsány rovnicemi

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}^1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^3, \\ \ddot{\gamma}^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}^1 \dot{\gamma}^3, \\ \ddot{\gamma}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Při označení $\dot{\gamma}^1 = a$, $\dot{\gamma}^2 = b$, $\dot{\gamma}^3 = c$ můžeme vyjádřit řešení

$$a = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} Ct + \omega\right), \quad b = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} Ct + \omega\right), \quad c = 0,$$

nebo

$$a = A, \quad b = B, \quad C = 0.$$

Dosadíme-li $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = aX_1 + bX_2 + cX_3$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos(Ct + D) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} Ct + \omega\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(Ct + D) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} Ct + \omega\right), \\ \dot{y} &= \sin(Ct + D) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} Ct + \omega\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(Ct + D) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} Ct + \omega\right), \\ \dot{\theta} &= 0 \implies \theta = Ct + D, \\ \dot{\varphi} &= \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta, \quad \varphi = -\frac{1}{C} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} Ct + \omega\right). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Odtud po integraci prvních dvou rovnic řešení:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 + \sqrt{2}} \sin \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) Ct + D + \omega \right] + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2 - \sqrt{2}} \sin \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) Ct + D + \omega \right], \\
 y &= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2 + \sqrt{2}} \cos \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) Ct + D + \omega \right] - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} \cos \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) Ct + D + \omega \right], \\
 \theta &= Ct + D, \\
 \varphi &= -\frac{1}{C} \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} Ct + \omega \right).
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

nebo (pro $C = 0$)

$$\begin{aligned}
 x &= Kt + L, \\
 y &= Mt + N, \\
 \theta &= P, \\
 \varphi &= (K \sin P - M \cos P)t + R.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Přímým dosazením lze ověřit, že oboje řešení (4.36) i (4.37) splňují rovnice (4.31). Geodetiky nalezené pomocí lagrangianu jako úloha na Riemannově varietě s neholonomní vazbou jsou (v souladu s naším očekáváním) opět totožné s geodetikami odvozenými z neholonomní konexe.

4.3.3 Subriemannovské geodetiky pro úlohu s planimetrem

Příkladu s planimetrem odpovídá distribuce $\mathcal{D} = [[X_1, X_2, X_3]]$ se subriemannovskou metrikou g na \mathcal{D} takovou, že vektorová pole

$$X_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

tvoří ortonormální soubor.

Nyní sestavíme subriemannovské rovnice. Můžeme použít hamiltonián a rovnice (1.5) nebo normální konexi a rovnice (1.6). My využijeme přímo rovnice (1.8), sestavené z koeficientů ortonormálních generátorů distribuce X_1, X_2, X_3 , které byly odvozeny v odstavci 1.7. Při označení souřadnic na T^*M písmeny $(x, y, \theta, \varphi, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ máme:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha \cos^2 \theta + \beta \cos \theta \sin \theta + \alpha \frac{\sin^2 \theta}{2} - \beta \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} + \delta \frac{\sin \theta}{2}, \\
\dot{y} &= \beta \sin^2 \theta + \alpha \cos \theta \sin \theta + \beta \frac{\cos^2 \theta}{2} - \alpha \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} - \delta \frac{\cos \theta}{2}, \\
\dot{\theta} &= \gamma, \\
\dot{\varphi} &= \alpha \frac{\sin \theta}{2} - \beta \frac{\cos \theta}{2} + \frac{1}{2} \delta, \\
\dot{\alpha} &= 0, \\
\dot{\beta} &= 0, \\
\dot{\gamma} &= \frac{1}{4} [\alpha^2 - \beta^2] \sin 2\theta - \frac{1}{2} \alpha \beta \cos 2\theta - \alpha \delta \frac{\cos \theta}{2} - \beta \delta \frac{\sin \theta}{2}, \\
\dot{\delta} &= 0.
\end{aligned}$$

Opět nebudeme rovnice řešit, jen zjistíme, zda neholonomní geodetiky splňují subriemannovské rovnice. Pro speciální případ (4.37) neholonomní geodetiky subriemannovské rovnice splňují, a to pro volbu zobecněných hybností $\alpha = \dot{x}$, $\beta = \dot{y}$, $\gamma = \dot{\theta}$ a $\delta = \dot{\varphi}$. Neholonomní geodetiky popsané vztahy (4.36) subriemannovské rovnice nesplňují.

Závěr

Po úvodní rekapitulaci pojmů a souvislostí týkajících se subriemannovské geometrie v první kapitole, neholonomní geometrie ve druhé kapitole a variační mechaniky v kapitole třetí, jsme se ve čtvrté kapitole zabývali porovnáním všech přístupů a konkrétními výpočty subriemannovských a neholonomních geodetik pro zadané struktury.

Co se týče subriemannovských geodetik, ukázali jsme obecně, že rovnice odvozené z hamiltoniánu a rovnice odvozené z normální konexe jsou totožné, uvedli jsme nový tvar subriemannovských rovnic — odvozený přímo z koeficientů ortonormálního souboru vektorových polí generujících úplně neintegrabilní distribuci \mathcal{D} .

Co se týče neholonomních geodetik, naše konkrétní příklady ukazují, že i když rovnice pro geodetiky odvozené z neholonomní konexe (geodetiky neholonomní konexe) i rovnice s neholonomní vazbou odvozené z lagrangiánu daného rozšířením metriky na celou varietu (geodetiky Riemannovy struktury s neholonomní vazbou) musí vždy dávat stejné geodetiky (a stejné geodetiky dostaneme také s pomocí Četajevových rovnic), mohou být rovnice z neholonomní konexe výrazně jednodušší. Pro jednu ze zvolených distribucí jsme rovnice neholonomních geodetik odvodili dokonce se zcela obecnou volbu doplňku.

Ukázali jsme, že v případě, kdy na varietě dimenze tři volíme doplněk k dvojrozměrné distribuci tak, že je generován Lieovou závorkou dvou vektorových polí generujících distribuci, jsou rovnice odvozené z neholonomní konexe vždy triviální.

Při porovnání neholonomních a subriemannovských rovnic a geodetik jsme zjistili, že mezi nimi pravděpodobně není žádná obecná souvislost. Pro některé volby doplňků byly neholonomní geodetiky podmnožinou množiny subriemannovských geodetik. Pro jiné tato inkluze splněna nebyla. Pro jeden z příkladů jsme ověřili, že zvolená distribuce je tzv. geodeticky invariantní (což je dostatečná podmínka pro to, aby každá neholonomní geodetika byla současně geodetikou subriemannovskou).

Rovnice byly mnohdy nelineární a ne vždy se nám jejich řešení podařilo nalézt. K řešení některých nelineárních souborů jsme použili program Maple, jehož výstupy jsou uvedeny jako příloha k práci. Dále jsme zařadili příklady s fyzikální tematikou a s fyzikálním komentářem. Také pro ně jsme odvodili subriemannovské rovnice i neholonomní rovnice a pokusili se je řešit. U fyzikálních příkladů jsme rovnice odvozené z neholonomní konexe vyřešili a ověřili jsme, že získaná řešení odpovídají geodetikám Riemannovy struktury s neholonomní vazbou. Dále

jsme zjistili, které z neholonomních geodetik jsou současně geodetikami subriemannovskými a které naopak subriemannovské rovnice nemohou splňovat. Přestože mezi subriemannovskými a neholonomními geodetikami obecná souvislost není (s výjimkou geodeticky invariantních distribucí), je možné využít neholonomní konexe pro hledání vhodných \mathcal{D} -křivek v technických a fyzikálních aplikacích. Neholonomní konexe totiž v našich příkladech vedla k výrazně jednodušším rovnicím než byly subriemannovské a to by mohlo být v inženýrské praxi podstatné. Tato tematika nabízí samozřejmě další nevyřešené otázky, vhodné k pokračování výzkumu.

Literatura

- [1] Agrachev, A., Barilari, D., Boscain, U. (2016). *Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry*, Sissa.
- [2] Agrachev, A., Sachkov, Y. (2004). *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer-Verlag.
- [3] Barilari, D., Boscain, U., Siagalotti, M. (2016). *Geometry, Analysis and Dynamics on sub-Riemannian Manifolds*, Vol. I, European Mathematical Society.
- [4] Barilari, D., Boscain, U., Siagalotti, M. (2016). *Geometry, Analysis and Dynamics on sub-Riemannian Manifolds*, Vol. II., European Mathematical Society.
- [5] Barrett, D.I. (2016), *Contributions to the Study of Nonholonomic Riemannian Manifolds*. Ph.D thesis, Rhodes University.
- [6] Calin, O., Mangione, V. (2003). *Variational Calculus on Sub-Riemannian Manifolds*. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.8, No.1, 2003, p. 21-32. Geometry Balkan Press.
- [7] Cantrijn, F., Langerock, B. (2003). *Generalised Connections over a Vector Bundle Map*. Differential Geometry and its Applications 18 (2003), p. 295-317. Elsevier.
- [8] Cortés, J., de León, D., de Diego, M, Marínez, S. (2003) *Geometric Description of Vakhonomic and Nonholonomic Dynamics. Comparison of Solutions*. SIAM J. Control Optim. 41 (5)(2003) p. 1389-1412.
- [9] Czudková, L., Musilová, J. (2013). *Nonholonomic mechanics: A practical application of the geometrical theory on fibred manifolds to a planimeter motion*. International Journal of Non-linear Mechanics. 50 (2013), p. 19-24.
- [10] Čech, M. (2018), *Teorém Emmy Noetherové a zákony zachování v neholonomní mechanice*. Disertační práce MU Brno.

- [11] Doležal, M. (2017), *Reprezentační techniky v geometrii a analýze*. Diplomová práce MU Brno.
- [12] Hrdina, J., Návrát, A., Vašík, P. (2015). *Control of 3-Link Robotic Snake Based on Conformal Geometric Algebra*, Advances in Applied Clifford Algebras, Springer Basel.
- [13] Krupková, O. (1997). *Mechanical Systems with Non-holonomic Constraints*. Journal of Math. Physics, Vol. 38, 1997, p. 5098-5126.
- [14] Krupková, O. (1997). *The Geometry of Ordinary Variational Equations*. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1678, 1997 Springer Verlag Berlin.
- [15] Krupková, O. (2009). *The Nonholonomic Variational Principle*. J. Phys. A: Math. Theor. Vol. 42, 2009, p. 185-201.
- [16] Krupková, O. (2010). *Geometric Mechanics on Nonholonomic Submanifolds*. Communications in Mathematics, Vol. 18, 2010, 1, p. 51-78.
- [17] Lang, S. (1999). *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer-Verlag.
- [18] Langerock, B. (2003). *A Connection Theoretic Approach to Sub-Riemannian Geometry*. Journal of Geometry and Physics, Vol. 43, 2003, p. 203-230, Elsevier.
- [19] Montgomery, R. (2002). *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*. American Mathematical Society.
- [20] Neimark, J. I., Fufaev, N. A. (1972). *Dynamics of Nonholonomic Systems*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 33, 1972 AMS Providence Rhode Island.
- [21] Strichartz, R. (1986). *Subriemannian Geometry*. Journal of Differential Geometry, Vol. 24, No.2, 1986, p. 221-263, International Press of Boston.
- [22] Vašík, P. (2017). *Mathematical Models of Robotic Mechanisms Control*, Habilitační práce, VUT Brno.
- [23] Wang, Z. Ma, S., Li, B., Wang, Y. (2011). *A Unified Dynamic Model for Locomotion and Manipulation of a Snake-like Robot Based on Differential Geometry*. Science China 2011, Vol. 54 No. 2, p. 318-333, China press and Springer-Verlag.

Rejstřík

- diferenciál, 16
- diferenciální forma, 16
- distribuce, 17, 19, 33
 - úplně neintegrabilní, 23, 24
 - holonomní, 33
 - integrabilní, 23, 33
 - involutivní, 23
 - kanonická, 48
 - kontaktní, 17
 - neholonomní, 33
 - silně, 33
 - neintegrabilní, 23, 33
- ekvivalence
 - afinní, 41
 - geodetická, 40
- energie, 20
- forma
 - Eulerova-Lagrangeova, 46
 - horizontální, 45
 - kontaktní, 45
- geodetická
 - úplnost, 37
 - invariance, 42
 - křivost, 37
- geodetika
 - abnormální, 23, 25
 - Heisenbergova, 20
 - konexe, 28
 - neholonomní, 36
 - normální, 23
 - subriemannovská, 20, 25
 - abnormální, 26
 - normální, 26, 40
- hamiltonián, 22
- Heisenbergova grupa, 21
- holonomní řez, 45
- hybnost, 22
- izometrie
 - neholonomní, 41
 - subriemannovská, 43
- křivka
 - autoparalelní, 29
 - hladká, 15
 - horizontální, 19
 - integrální, 16
 - Lipschitzovská, 28
- kinetická energie, 22
- kometrika, 21
- konexe, 28
 - Kozsulova, 34
 - neholonomní, 34
 - metrická, 35
 - normální, 28
 - subriemannovská, 28
- kontaktní
 - forma, 45
 - ideál, 47
 - struktura, 46
- kontrolní funkce, 27
- Koszulova formule, 36

kotečný bandl, 16

Lagrangeova

funkce, 46

struktura, 46

Lagrangeovy multiplikátory, 49

lagrangian, 46

Lieův obal, 24

metrika, 17

Carnot-Carathéodoryho, 20

subriemannovská, 20, 28

neholonomní

afinita, 41

geodetická ekvivalence, 40

izometrie, 41

Riemannova struktura, 34

podbandl, 15

princip virtuálních prací, 49

prostor

fázový, 47

konfigurační, 46

pullback, 16

rovnice

Četajevovy, 49

autoparalelních křivek, 28

Eulerovy-Lagrangeovy, 68

modifikované, 49

neholonomních geodetik, 37

normálních geodetik, 23, 30

pohybové, 46

redukované, 48

z hamiltoniánu, 23

Schoutenův tenzor křivosti, 37

struktura

neholonomní, 34

subriemannovská, 19, 27

subriemannovská

geometrie, 19, 27

konexe, 28

metrika, 19, 28

norma, 28

struktura, 19, 27

varieta, 19

tečný

bandl, 15

prostor, 15

vektor, 15

tenzorové pole, 17

tok vektorového pole, 16

věta

Chow, 24

Chow-Rashevskii, 24, 34

o normálních geodetikách, 23

varieta

fibrovaná, 45

hladká, 15

Riemannova, 45

neholonomní, 34

sub-Riemannova, 19, 27

vektorové pole, 16

úplné, 16

Četajevovo, 48

Reebovo, 57

vertikální, 45

vektorový bandl, 15

závorka

Lieova, 16

symetrická, 38

Příloha