Písemka 1 — TOPOLOGIE (celkem 10 bodů, každý podpříklad za bod)

1. Nechť τ_1 (resp. τ_2) jsou dvě topologie na $\mathcal{X}$. Topologii τ_1 nazveme silnější než τ_2 (resp. τ_2 slabší než τ_1) jestliže $\tau_2 \subset \tau_1$. Dokažte následující tvrzení:
a) Identita $(\mathcal{X}, \tau_1) \to (\mathcal{X}, \tau_2)$ je spojitá právě tehdy, když τ_1 je silnější než τ_2.
b) Spojitost zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se nenaruší, jestliže zesílíme topologii na $\mathcal{X}$ nebo zeslabíme topologii na $\mathcal{Y}$.
c) Každé zobrazení z diskrétního topologického prostoru do libovolného topologického prostoru je spojité.
d) Každé zobrazení z libovolného topologického prostoru do triviálního topologického prostoru je spojité.
e) Každé spojité zobrazení z triviálního do diskrétního topologického prostoru je konstantní.

2. Připomeňme, že zobrazení dvou topologických prostorů se nazývá *otevřené* resp. *uzavřené*, je-li obrazem každé otevřené resp. uzavřené množiny množina otevřená resp. uzavřená. Uveďte příklad (s důkazem!)
a) spojitého zobrazení, které není otevřené, je uzavřené,
b) spojitého zobrazení, které není ani otevřené, ani uzavřené,
c) spojitého zobrazení, které není uzavřené, je otevřené,
d) uzavřeného a současně otevřeného zobrazení, které není spojité,
e) spojité bijekce, která není homeomorfismem.

(Návod: zkoumejte například identitu mezi prostory s různou topologií, nebo konstantí zobrazení, využijte příkladu 1 a vlastností homeomorfismu, které jsme dokazovali ve cvičení - příklad 21,22).

Písemka 2. — VARIETY (celkem 10 bodů)

Zvolte si dvě topologické variety, z nichž alespoň jedna bude kompaktní, zkonstruujte na nich atlas, prověřte kompatibilitu souřadnicových systémů, zapište vztahy pro transformaci souřadnic. Dále uveďte dva příklady hladkého nekonstantního zobrazení mezi nimi, souřadnicovou reprezentaci tohoto zobrazení ve vašich souřadnicových systémech, popřípadě geometrickou interpretaci. Diskutujte, zda zobrazení je vnořením, vložením, submerzí. Vyhněte se však příkladům, které jsme již důkladně probírali v semináři, ale příklady, které jsme jen odbyli můžete použít.

Písemka 3. — TENZORY (10 bodů)

1.Nechť e_1, e_2, e_3 je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$, $\omega \in \mathcal{T}_2^2\mathcal{V}$:

$$\omega = 1e_1 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1 +$$

$$+5e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^2 + 3e_1 \otimes e_3 \otimes e^2 \otimes e^2 -$$

$$-5e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^2 - 2e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 -$$

$$-1e_3 \otimes e_2 \otimes e^3 \otimes e^3 + 4e_3 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^2$$

Nechť

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je kovariantní metrika, zadaná v příslušné indukované bázi.

a) symetrizujte ω v horních indexech
b) antisymetrizujte ω v dolních indexech
c) úžete ω v prvém horním a druhém dolním indexu
d) úžete ω vektorovým argumentem $\xi = 1e_1 + e_3$ na druhé pozici
e) úžete ω kovektorovým argumentem $\xi = -\frac{1}{3}e^3 + e^2$ na druhé pozici
f) spočtěte všechny stopy výsledku příkladu d)
g) spočtěte všechny stopy výsledku příkladu e)
h) určete kontravariantní metriku (g^{ij})
i) snižte první horní index u tenzoru ω na pozici druhého dolního pomocí metriky
j) zvedněte dolní index výsledku příkladu c) na pozici druhého horního
(pozn. výsledky, pokud možno, vyjádřete stejnou formou jako je zadání, vždy napište, do jakého prostoru patří váš výsledek)

2. Jednu z výše použitých operací definujte, odvoďte vztahy pro složky a dokažte nezávislost na bázi.

3. Definujte tenzorový součin prostorů $T_1 \otimes T_2$. Lze každý tenzor z $T_1 \otimes T_2$ zapsat ve tvaru $\alpha \otimes \beta$, kde $\alpha \in T_1$, $\beta \in T_2$? Odpověď zdůvodněte.

4. Lze každý tenzor typu $(0, k)$ napsat jako součet symetrického a antisymetrického? Závisí tato skutečnost na k? Zdůvodněte odpověď

Úkol do semináře: Přečtěte si kapitolu Algebra tenzorů z učebního textu, případně také z textu D. Krupky — Matematické základy OTR a pokuste se vyřešit příklady 3–8, 10, 12–14 cvičení - TENZORY.