Integrování na varietách – cvičení

0. OPAKOVÁNÍ:

1. Uvažujte systém podmnožin množiny $\mathcal{X}$ σ splňující:
i.$\emptyset, \mathcal{X} \in \sigma$
ii. sjednocení lib. dvou množin ze σ patří do systému σ
iii. průnik libovolného potu množin ze σ patří do systému σ,
dokažte, že systém $\tau = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{X} | \mathcal{U} = \mathcal{X} \backslash \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \sigma\}$ je topologie na $\mathcal{X}$ a σ splývá se systémem všech uzavřených množin v této topologii.

2. Dokažte:
a) Pro libovolnou množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ je množina int$\mathcal{A}$ největší otevřená množina ležící v $\mathcal{A}$.
b) Množina $\mathcal{A}$ je otevřená $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathrm{int}\mathcal{A}$.
c)$\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{int}\mathcal{B} \subset \mathrm{int}\mathcal{A}, \mathrm{ext}\mathcal{B} \supset \mathrm{ext}\mathcal{A}$.
d)Pro libovolnou množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ platí $\mathrm{fr}\mathcal{A} = \mathrm{fr}(\mathcal{X} \backslash \mathcal{A})$.

3. Dokažte: $\overline{\mathcal{A}}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující $\mathcal{A}$.

4. Dokažte:
a)$\overline{\emptyset} = \emptyset$
b)$\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$
c)$\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$

5. Dokažte, že Kuratowského axiomy uzávěru lze použít k zavedení topologie.

6. Vyšetřete spojitost zobrazení $f(x) = x^2, f(x) = x$ z množiny $\mathcal{R}$ s přirozenou topologií do množiny $\mathcal{R}$ s topologií přirozenou (resp. Sorgenfreyovou, konečných doplňků, triviální, diskrétní).

Připomeňme, že *bází* topologie τ rozumíme podsystém σ systému τ takový, že každá neprázdná množina z τ je sjednocením nějakých množin ze σ. Platí, že systém σ je bází nějaké topologie na $\mathcal{X}$ pokud pokrývá $\mathcal{X}$ a k libovolným dvěma množinám $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \sigma$ a libovolnému bodu $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ existuje $\mathcal{W} \in \sigma$ tak, že $x \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

7. Uvažujte množinu $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a systém podmnožin $\sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}\}$. Dokažte, že tento systém tvoří bázi topologie a tuto topologii určete. Nechť $f, g, h : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ jsou definovaná vztahy:
$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 4, f(5) = 5,$
$g(1) = 3, g(2) = 1, g(3) = 2, g(4) = 5, g(5) = 1,$

$h(1) = 3, h(2) = 2, h(3) = 3, h(4) = 4, h(5) = 4,$
Urete jejich body nespojitosti.

8. Dokažte, že euklidovská metrika indukuje přirozenou topologii.

9. a) Uvete příklad, kdy průnik nekonečého systému otevřených množin není otevřená množina.
b) Uvete příklad, kdy sjednocení nekonečného systému uzavřených množin není uzavřená množina.

10. Charakterizujte množiny, pro které platí $fr(\mathcal{A}) = \emptyset$

11. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ platí:
$\mathrm{fr}\mathcal{A} \cup \mathrm{fr}\mathcal{B} = \mathrm{fr}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathrm{fr}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Pokud ano, dokažte, pokud ne, uvete protipříklad a větu opravte.

12. a) Nalezněte všechny topologie na jednoprvkové (resp. dvouprvkové) množině.
b) Kolik existuje topologií na tříprvkové množině?

13. Rozhodněte, zda následující systémy jsou topologie (popřípadě bází nějaké topologie), zdůvodněte:
a)$\mathcal{X} = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}\}$
b)$\mathcal{X} = \mathcal{R}, \tau = \{\emptyset, (-a, a)\}$, kde $a \in \mathcal{R}^+$
c)$\mathcal{X} = \mathcal{R}^2, \tau = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, kde $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ probíhá všechny množiny otevřené v přirozené topologii.

14.Rozhodněte, zda následující množiny jsou kompaktní v přirozené topologii na $\mathcal{R}$: $(0, 1]; [0, 1); (0, 1); \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathcal{N}\}$.

15.Rozhodněte, zda následující množiny jsou kompaktní v Sorgenfreyově topologii na $\mathcal{R}$: $(0, 1]; [0, 1); (0, 1); [0, 1]; \mathcal{R}$.

16.Rozhodněte, zda množina racionálních čísel je kompaktní v přirozené, Sorgenfreyově, diskrétní, triviální nebo v topologii konečných doplňků.

17. Uveďte příklad topologického prostoru a jeho kompaktní podmnožiny, která není uzavřená.

28. Na množině jsou dány dvě různé srovnatelné topologie. Víme-li, že v první z nich je množina souvislá (resp. nesouvislá), lze něco říci o její souvislosti ve druhé topologii?

19. Dokažte, že v definici souvislosti lze pojem otevřená množina nahradit pojmem uzavřená množina.

20. Platí následující tvrzení?
Topologický prostor je souvislý právě tehdy, když každá jeho neprázdná, vlastní podmnožina má prázdnou hranici.

21. Platí, že spojitým obrazem nesouvislého prostoru je nesouvislý prostor!? Pokud ano, dokažte, v opačném případě uveďte protipříklad.

22. Platí, že vzorem nesouvislého prostoru při spojitém zobrazení je nesouvislý prostor!? Pokud ano, dokažte, v opačném případě uveďte protipříklad.

23. Rozhodněte, které z následujících topologických prostorů jsou souvislé:
a) $\mathcal{R}$ s topologií konečných doplňků.
b) Množina $\mathcal{X}$ s topologií konečných doplňků.
c) Graf Dirichletovy f-ce uvažovaný jako podprostor Euklidova prostoru $\mathcal{R}^2$.
d) Množina racionálních čísel v $\mathcal{R}$ s přirozenou topologií.
e) Množina iracionálních čísel v $\mathcal{R}$ s přirozenou topologií.
f) Množina přirozených čísel v $\mathcal{R}$ s přirozenou topologií.
g) Podmnožina $\mathcal{X}\{(x, y) \in \mathcal{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ Euklidova prostoru $\mathcal{R}^2$.
h) Otevřená koule v $\mathcal{R}^n$
i) Sféra
j) Toroid
k) $\mathcal{R}^n \setminus \{0\}$.

24. Definujte *indukovanou topologii* na podmnožině, dokažte, že splňuje axiomy topologie.

25. Rozhodněte o otevřenosti resp. uzavřenosti následujících podmnožin v $\mathbf{R}$ s přirozenou (resp. triviální resp. diskrétní topologií).
a) $[0, \infty)$
b) $(0, 1)$
c) $[0, 1]$
d) $[0, 1)$
Totéž jako podmnožiny $\mathbf{R}_0^+$ s příslušnou indukovanou topologií.

26. Určete vnitřek, vnějšek a hranici množiny $A \subset \mathbf{R}^n$ (s přirozenou topologií) v následujících případech:
a)$A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$
b)$A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$
c)$A = [0, 1] \cap \mathbf{Q}$

27. Dokažte, že uzavřený interval v $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií je kompaktní množina.

28. Dokažte, že množina v $\mathbf{R}^n$ s přirozenou topologií je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a omezená.

29. Rozhodněte o kompaktnosti následujících množin v přirozené topologii:
a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, r > 0, (x, y) \neq (0, 0)\}$
b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0\}$
c) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$
d) $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$
e) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n}, n = 1, 2 \ldots\}$
f) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n}, n = 1, 2 \ldots\} \cup \{0\}$

30. Dokažte: Nechť $f : A \to \mathbf{R}^m, A \subset \mathbf{R}^n$ je spojité zobrazení, A je kompaktní množina, pak $f(A) \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní.

Příklady na tenzory ze skript z forem!

TOPOLOGIE, HOMEOMORFISMY, VARIETY

1. Dokažte, že axiomy:
i) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii) $\rho(y, x) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$
jsou ekvivalentní axiomům MET 1,2,3 metriky (pozitivní definitnost, symetrie, trojúhelníková nerovnost)
(Návod: zkuste do druhého z axiomů dosadit dva z bodů stejné.)

2. Uveďte příklad různých metrik na $\mathbf{R}^2$, které indukují tutéž topologii (např. přirozenou).

3. Dokažte: V Hausdorffově prostoru je každá konečná množina uzavřená.

4. Dokažte: Topologický prostor $\mathcal{X}$ je Hausdorffův právě tehdy, když diagonála $\Delta = \{[x, y] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} | x = y\}$ je uzavřená množina v $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ se součinovou topologií.

$*$ 5. Uveďte příklad úplného a neúplného metrického prostoru, které jsou homeomorfní.

6. Dokažte, že kompaktnost (resp. souvislost, Hausdorffovost, separabilita, metrizovatelnost ...) jsou topologickými invarianty (tj. vlastnost, zachovávající se při homeomorfismu, má-li tuto vlastnost nějaký topologický prostor, pak všechny s ním homeomorfní prostory ji mají také). A co takhle typ spočetnosti?

7. Uveďte příklad topologického prostoru, který není metrizovatelný. (Návod: Ukažte nejprve, že každý metrizovatelný prostor je Hausdorffův a pak najděte příklad ne-Hausdorffovského prostoru.)

$*$ 8. Uveďte příklad topologického Hausdorffova prostoru, který není metrizovatelný.
(Návod: nejprve ukažte, že každý metrizovatelný prostor musí být prvního typu spočetnosti)

$*$ 9. Uveďte příklad topologického Hausdoffova prostoru, prvního typu spočetnosti, který není metrizovatelný.
(Návod: určitě nějaký existuje, ale musí být hrůzostrašný, já bych se raději podívala do skript z topologie.)

10. Jsou následující topologické prostory homeomorfní (uvažujeme vždy s indukovanou přirozenou topologií)? Dokažte.
a) Otevřený kruh a $\mathbf{R}^2$
b) Otevřený čtverec a$\mathbf{R}^2$
c) S^1 a okraj čtverce
d) $\mathbf{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ a válec $S^1 \times \mathbf{R}$
e) $[a,b]$ a (a,b) v $\mathbf{R}$
f) $[a,b]$ a $[a,b)$ v $\mathbf{R}$
g) S^2 a $\mathbf{R}^2$
h) S^1 a $(0,1]$
i) $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^n, n > 1$
j) $\mathbf{R}$ a S^1
k) (a,b) a $(a,b]$ v $\mathbf{R}$
l) $[a,b]$ a S^1
m)-z) vymyslete si další
(Návod: při důkazu homeomorfnosti dvou prostorů stačí takový homeomorfismus najít. Uvědomte si, že každý otevřený interval je homeomorfní s $\mathbf{R}$ a tedy každý otevřený kvádr je homeomorfní s $\mathbf{R}^n$. Při důkazu, že prostory homeomorfní nejsou lze využít topologické invarianty a následující větu: Nechť $y_0 \in Y$ je takový bod, že prostory $X \setminus \{x\}$ a $Y \setminus \{y_0\}$ nejsou homeomorfní pro žádné $x \in X$. Pak ani X a Y nejsou homeomorfní.)

$*$11. Nechť $D^n = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n \mid \|\vec{v}\| \le 1\}$ – jednotková n-koule s okrajem $\partial D^n = S^{n-1}$. Dokažte, že $D^n/\sim$ (kde $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x, y \in \partial D^n$) je homeomorfní s S^n.

$*$12. $S^n = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\vec{v}\| = 1\}$. Dokažte, že $S^n/\sim$ (kde $\vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{w}$) je homeomorfní s reálnou projektivní rovinou $\mathbf{R}P^n$ (množina všech přímek v $\mathbf{R}^{n+1}$).

13. Lze oslabit definici topologické variety? Je možné na základě lokální homeomorfnosti s $\mathbf{R}^n$ dokázat Hausdorffovost nebo spočetnost báze topologie? Pokud ano, dokažte, v opačném případě uveďte protipříklady.

$*$14. Dokažte, že obecná lineární grupa $GL(n, \mathbf{R})$ (regulární čtvercové matice) je hladká varieta. Určete její dimenzi, jakožto vektorového $\mathbf{R}$-prostoru.

$*$15. Dokažte, že $Sl(n, \mathbf{R})$ (matice s jednotkovým determinatem) je její hladká podvarieta, určete dimenzi.

16. Příklady kompaktních souvislých variet dimenze 1 a 2.

17. Dokažte: na kompaktní varietě neexistuje globální souřadnicový systém.
(Návod: opět lze využít toho, že kompaktnost je topologickým invariantem).

18. Nalezněte atlas na $\mathcal{S}^1$. Nalezněte atlas jiný atlas a prověřte, zda je kompatibilní s tím prvním. Je dvojice $(\mathcal{S}^1, \varphi : \mathcal{S}^1 \to \mathbf{R})$, kde φ^{-1} dáno vztahem $x = \cos t, y = \sin t$ souřadnicovým systémem na $\mathcal{S}^1$.

19. Nalezněte různé atlasy na $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3$. Prověřte, jsou-li kompatibilní. Je systém sférických souřadnic $(\mathcal{S}^2, \varphi)$, kde $\varphi^{-1} : x = \cos\phi \sin\theta, y = \sin\phi \sin\theta, z = \cos\theta$ souřadnicovým systémem na $\mathcal{S}^2$?

$*$20. Nechť $M_{m,n}, n > m$ je množina všech matic $m \times n$ nad $\mathbf{R}$ maximální hodnosti. Pak faktormnožina $G_{m,n} = M_{m,n}/GL(n, \mathbf{R})$ podle pravé akce obecné lineární grupy je množina všech m-rozměrných podprostorů vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$. Dokažte. Nalezněte atlas na této množině a určete její dimenzi (tato množina se nazývá Grassmanián prvního řádu, a pro $m = 1$ je to totéž jako reálná projektivní rovina P^{n-1}.

21. Nechť f je zobrazení dvou topologických prostorů, následující podmínky jsou ekvivalentní:
a) f je spojité
b) vzor každé otevřené množiny je otevřená množina
c) vzor každé uzavřené množiny je uzavřená množina
d)$f(cl(A)) = cl(f(A))$
Dokažte.

22. f je homeomorfismus právě tehdy, když je to spojitá otevřená bijekce. Dokažte.

23. Je diskrétní topologický prostor metrizovatelný? Dokažte.

24. Ukažte, že elipsa je difeomorfní s kružnicí.

25. Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ je varieta v $\mathbf{R}^n$, resp. v $\mathbf{R}^m$, $\mathcal{AT}_{\mathcal{X}}$ resp. $\mathcal{AT}_{\mathcal{Y}}$ atlasy na $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$. Označme $\mathcal{AT}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \{\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi \mid (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AT}_{\mathcal{X}}, (\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{AT}_{\mathcal{Y}}\}$, kde $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$. Dokažte, že $\mathcal{AT}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ je atlas na $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ v $\mathbf{R}^{n+m}$.

26. Nechť $\mathcal{X} = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, ukažte, že systém polárních souřadnic je souřadnicovým systémem na $\mathcal{X}$. Platí to i pro $\mathcal{X} = \mathbf{R}^2$?

27. Určete, které z níže uvedených podprostorů Euklidova prostoru jsou topologické variety s okrajem. Určete jejich dimenzi a okraj.
a) Otevřená množina v $\mathbf{R}^n$
b) Uzavřená množina v $\mathbf{R}^n$
c) $\mathcal{X} = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 2\}$
d) $Q^n \subset \mathbf{R}^n$
e) uzavřený jednotkový kruh
f) $[0, 1]^n \subset \mathbf{R}^n$
g) $fr[0, 1]^2 \subset \mathbf{R}^n$
h) reálná projektivní rovina
i) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0\}, x^2 + y^2 = 1\}$
j) Möbiova páska
k) Klainova láhev
l) toroid
m) válec

n) sféra

Dále příklady 1-49 ze str. 237–269 skript Krupka, Musilová, Integrální počet na euklidových prostorech a diferencovatelných varietách.

TENZORY

1. Vektorové prostory $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ nad polem $\mathcal{K}$ jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi. Dokažte.

2. Nechť $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je lineární, pak $\mathrm{Im}(f)$ je podprostorem ve $\mathcal{W}$, $\mathrm{Ker}(f)$ je podprostorem ve $\mathcal{V}$ a platí $\mathrm{dim}\mathrm{Im}(f)+\mathrm{dim}\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{dim}\mathcal{V}$. Dokažte.

3. Nalezněte bázi duální k bázi $e'_1 = 2e_1 - 2e_2, e'_2 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, e'_3 = -1e_3$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Nalezněte složky lineární formy ω v této bázi, je-li $\omega e^1 + e^2 - 2e^3$ v původní nečárkované bázi.

4. Buď (e_i) báze ve $\mathcal{V}$, (e^i) báze ve $\mathcal{V}^*$, k ní duální, $\mathrm{dim}\mathcal{V} = n$. Vypočtěte (pozor na Einsteinovu sčítací symboliku – kde se objeví stejné písmenko nahoře i dole, tam se přes něj sčítá):
a)$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$
b)$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
c)$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$
d)$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
e)$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$
f)$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
g)$\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
h)$\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$

5. Ukažte, že vztah $\xi \otimes \eta = \xi^i \eta^\alpha e_i \otimes f_\alpha$ je definován nezávisle navolbě báze.

6. Přepište následující vztahy do složek:
$(\xi + \eta) \otimes \lambda = \xi \otimes \lambda + \eta \otimes \lambda$
$\xi \otimes (\eta + \lambda) = \xi \otimes \eta + \xi \otimes \lambda$
$(c_1\xi) \otimes (c_2\eta) = c_1c_2\xi \otimes \eta$
Dokažte.

7. Určete složky tenzoru $\Delta = \delta^i_j f_i \otimes f^j$ vůči bázi $e_i \otimes e^j$, matice přechodu mezi bázemi je A.

8. Je operace tenzorového součinu tenzorů komutativní? Dokažte.

9. Lze každý tenzor jednoznačně vyjádřit ve tvaru součtu symetrického a antisymetrického?

10. Dokažte větu o normálním tvaru bilineární formy (Krupka, str.22).

11. Dokažte, že relace $\sim$ definovaná na množině křivek: $(x_1, \zeta) \sim (x_2, \chi) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \frac{dx^i\zeta}{dt}|_0 = \frac{dx^i\chi}{dt}|_0, i \in \{1, \ldots, n\}$ je relací ekvivalence.

12. Vymyslete si 10 příkladů na antisymetrizaci, symetrizaci (v horních i dolních indexech, úplnou i po dvou), úžení, kontrakci vektorovým argumentem (konkrétně v souřadnicích).

13. Určete dimenzi prostoru (vše nad $\mathbf{R}^n$):
0) všech k-tenzorů
a) úplně symetrických k-tenzorů
b) úplně antisymetrických k-tenzorů
c) k-tenzorů symetrických ve dvou indexech
d) k-tenzorů, antisymetrických ve dvou indexech
e)tenzorů typu $(1, 2)$ symetrických ve spodních dvou indexech (tenzor torze)
f) tenzorů typu $(0, 4)$ antisymetrických v prvních dvou indexech, v posledních dvou indexech a symetrických vůči záměně první a druhé dvojice indexů.
g) stejně jako f), ale navíc splňují rovnost $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$ (tenzor křivosti).

14. Sestavte úplně symetrický tenzor čtvrtého řádu, jehož všechny složky jsou invariantní vůči transformaci souřadni.

Dále příklady ze cvičení týkajících se tenzorů a forem ze skript Krupka, Musilová, Integrální počet na euklidových prostorech a diferencovatelných varietách.

LIEOVY DERIVACE

1. Určete tvar integrálních křivek a jednoparametrickou grupu transformací generovanou vektorovým polem ξ.
a)$\xi = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
b)$\xi = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
c) $\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$
d) $\xi = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + 2x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
e) $\xi = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + 2(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
f) $\xi = \frac{\partial}{\partial x^1}$
g)$\xi = k_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + k_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
h) $\xi = \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$

2. Definujme Lieovu závorku $[\xi, \eta](f) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))$. Odvoďte vyjádření v souřadnicích.

3. Dokažte Jacobiho identitu $[\xi, [\eta, \lambda]] = [[\xi, \eta], \lambda] + [\eta, [\xi, \lambda]]$, dokažte bilinearitu a uzavřenost, antikomutativitu operace Lieovy zavorky.

4. Odvoďte souřadnicové vyjádření pro Lieovu derivaci funkce, vektorového pole, lineární formy.

5. Dokažte: $\partial_\xi f = \xi(f)$ pro funkce
$\partial_\xi \eta = [\xi, \eta]$ pro vektorová pole.

6. Dokažte (značení pochopíte z kontextu):
a) $\partial_\xi (f\omega) = (\partial_\xi f)\omega + f\partial_\xi \omega$
b) $\partial_\xi (\omega(\eta)) = (\partial_\xi \omega)(\eta) + \omega(\partial_\xi \eta)$
c) $\partial_\xi (\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\partial_\xi f$
d) $i_{[\xi,\eta]} = \partial_\xi i_\eta - i_\eta \partial_\xi$
e) $\partial_{f\xi}\omega = f\partial_\xi \omega + \mathrm{d}f \wedge i_\xi \omega$
f) $\partial_\xi (\lambda \wedge \varrho) = \partial_\xi \lambda \wedge \varrho + \lambda \wedge \partial_\xi \varrho$
g) $i_{f\xi} = f i_\xi$
h) $i_\xi (f\omega) = f i_\xi \omega$

j) $\partial_\xi (\tau \otimes \chi) = \partial_\xi \tau \otimes \chi + \tau \otimes \partial_\xi \chi$
k) $\partial_{[\xi,\zeta]}\tau = \partial_\xi \partial_\zeta \tau - \partial_\zeta \partial_\xi \tau$

l) $\partial_{f\xi}\zeta = [f\xi, \zeta] = f[\xi, \zeta] - (\partial_\zeta f)\xi$
m) $\partial_\xi \varrho = \mathrm{d}\mathrm{i}_\xi \varrho + \mathrm{i}_\xi \mathrm{d}\varrho$
n) $\mathrm{i}_\xi(\varrho \wedge \theta) = \mathrm{i}_\xi \varrho \wedge \theta + (-1)^q \varrho \wedge \mathrm{i}_\xi \theta$
o) $\partial_\xi \mathrm{i}_\xi \varrho = \mathrm{i}_\xi \partial_\xi \varrho$
p) $\xi\, \omega(\zeta) - \zeta\, \omega(\xi) - \omega([\xi, \zeta]) = \mathrm{d}\omega(\xi, \zeta) \quad$ pro $p = 0$, $q = 1$

7. Dokažte, že metrika $g = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ je invariantní vůči jednoparametrické grupě generované polem ξ právě tehdy, splňuje-li Killingovy rovnice.

8. Vymyslete si 5 konkrétních příkladů na výpočet Lieových derivací (vektorových a tenzorových polí) v souřadnicích a ty spočítejte.

METRIKA, KONEXE

1. Vyjádřete indukovanou metriku na sféře (jako podvarietě $\mathbf{R}^3$), na torusu, na válci.

2. Uveďte příklad, kdy na podvarietě pseudoriemannovy variety nelze indukovat metriku.

3. Odvoďte transformační vztah pro koeficienty Γ^k_{ij} lineární konexe. Pro $\mathbf{R}^2$ je odvoďte také v polárních souřadnicích.

4. Dokažte, že T aR jsou tenzorová pole (odvozením transformačních vztahů).

5. Vyjádřete T^k_{ij} a R^l_{kij} pomocí Γ^a_{bc}. Vyšetřete symetrie tenzorů T a R.

6. Odvoďte hodnoty koeficientů Γ^i_{jk} pro kanonickou lineární konexi.

7. Dokažte, že paralelní přenos je lineární zobrazení.

8. Určete geodetiky v $\mathbf{R}^n$ s kanonickou lineární konexí.

9. Určete složky kanonické lineární konexe na $\mathbf{R}^2$ v polárních sou-

řadnicích a napište rovnici geodetik.

10. Vypočtěte délkový element dl^2 na sféře $\mathcal{S}^2$ ve sférických souřadnicích.

11. Určete prostoročasovou (pseudo)metriku rotujícího korouče, která vznikne transformací $t' = t, r' = r, \varphi' = \varphi + \Omega t, z' = z$ z (pseudo)metriky $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$.

12. Buď $\mathcal{V}, g)$ Minkowského vektorový prostor na $\mathcal{V}$. Nechť $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ je yobrayení takové, že

- φ je bijekce
- metrický tenzor je invariantní vzhledem k zobrazení φ

a) Ukažte, že φ je lineární
b) Označme $C = (c^i_j)$ matici zobrazení φ,$G = (g_{ij})$, resp. $G^{-1} = (g^{ij}$ matici složek tenzoru g, resp. inverzní matici (v nějaké pevně zvolené bázi). Dokažte, že platí:

$$g_{kl} = c^i_k c^j_l g_{ij}$$
$$g^{kl} = c^k_i c^l_j g^{ij}$$

Určete det$C$. Napište tyto vztahy v maticové podobě.
c) Ukažte, že všechna taková zobrazení tvoří grupu vzhledem ke skládání zobrazení (Lorentzova grupa transformací).
d) Označme $\overline{C}(\overline{(c)}^i_j)$ matici zobrazení φ v normální bázi tenzoru g. Co platí pro det$\overline{C}$ a $\overline{c}^0_0$?
e) Ukažte, že Lorentzovy transformace φ, reprezentované v normální bázi tenzoru g maticemi $\overline{C}$ takovými, že $\overline{c}^0_0 \geq 1$ tvoří podgrupu Lorentzovy grupy.
f) Vyšetřete, zda také transformace, pro které platí (v normální bázi):

- det$\overline{C} = 1, \overline{c}^0_0 \geq 1$
- det$\overline{C} = -1, \overline{c}^0_0 \geq 1$
- det$\overline{C} = 1, \overline{c}^0_0 \leq 1$
- det$\overline{C} = -1, \overline{c}^0_0 \leq 1$

tvoří podgrupu Lorentzovy grupy.