

Zápočtová písemka M4010, 8 + 2 body

1. Nalezňte řešení rovnice se zadanou okrajovou podmínkou, proveďte zkoušku:

$$u_x^2 + u_y^2 = u, \quad u(\cos \sigma, \sin \sigma) = 1.$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Jedná se o obecnou rovnici prvního řádu a budeme ji řešit metodou charakteristik, zvolení a zápis metody ... 0,25 bodu
- b) Vyřešení odpovídající soustavy obyčejných rovnic ... 0,5 bodu
- c) Dosazení okrajové podmínky a výsledek ... 0,5 bodu
- d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu

Celkem 1,5 bodu, řešení $u(x, y) = \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1)$.

2. Nalezňte obecné řešení rovnice i partikulární řešení splňující zadanou okrajovou podmínkou, načrtněte charakteristiky i okrajovou křivku a proveďte zkoušku:

$$xu_x + yu_y = 2(x^2 + y^2), \quad u(1, y) = 2y^2 + 1.$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Jedná se o lineární nehomogenní rovnici prvního řádu a budeme ji řešit metodou charakteristik nebo převodem na kanonický tvar, zvolení a zápis metody ... 0,25 bodu
 - b) Vyřešení odpovídající soustavy obyčejných rovnic nebo převod na kanonický tvar a integrace ... 0,5 bodu
 - c) Dosazení okrajové podmínky a výsledek ... 0,5 bodu
 - d) Provedení zkoušky a obrázek ... 0,25 bodu
- Celkem 1,5 bodu, řešení

$$u = x^2 + y^2 + C\left(\frac{y}{x}\right), \quad u_p = x^2 + y^2 + \frac{y^2}{x^2}.$$

3. Klasifikujte rovnici druhého řádu a převedte na kanonický tvar. Lze-li převedená rovnice řešit integrací, vyřešte (proveďte zkoušku - máte-li čas):

$$x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} + x u_x = 0.$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Klasifikace (určení typu rovnice) ... 0,25 bodu

- b) Nalezení nových proměnných ... 0,5 bodu
 c) Převod na kanonický tvar ... 0,5 bodu
 d) Integrace a řešení, případně provedení zkoušky ... 0,25 bodu
 Celkem 1,5 bodu, řešení: Parabolická rovnice,

$$\xi = y + \ln x, \quad \eta = y,$$

$$u_{\eta\eta} = 0, u = yC(y + \ln x) + D(y + \ln x).$$

4. Řešte počáteční úlohu pro hyperbolickou rovnici a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= 4u_{xx}(t, x) + \cos^2 x, & (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \\ u(0, x) &= x^3, & x \in (-\infty, \infty), \\ u_t(0, x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Komentář a orientační bodování:

- a) D'Alembertův vzorec a správné dosazení 0,25 bodu
 b) Výpočet prvního integrálu ... 0,5 bodu
 c) Výpočet druhého integrálu ... 0,5 bodu
 d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu
 Celkem 1,5 bodu, řešení

$$u(t, x) = x^3 + 12xt^2 + \frac{1}{4} \ln \frac{x+2t + \sqrt{1+(x+2t)^2}}{x-2t + \sqrt{1+(x-2t)^2}} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 2x \cos 4t.$$

5. Řešte úlohu

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt}, & x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty) \\ u_x(t, 0) &= 0, & t \in (0, \infty), \\ u_x(t, l) &= 0, & t \in (0, \infty), \\ u(0, x) &= -\cos \frac{\pi}{l}x, & x \in (0, l), \\ u_t(0, x) &= \cos^2 \frac{\pi}{l}x - \sin^2 \frac{\pi}{l}x, & x \in (0, l). \end{aligned}$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Metoda separace proměnných a zápis rovnic 0,25 bodu
 b) Řešení rovnic ... 0,5 bodu

- c) Dosazení okrajových podmínek ... 0,5 bodu
e) Výpočet Fourierových koeficientů ... 0,5 bodu
d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu
Celkem 2 body, řešení

$$u(t, x) = -\cos \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi}{l} t + \frac{l}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{2\pi}{l} t.$$

6. Další maximálně 2 body získává student za aktivní účast ve cvičení a plnění domácích úkolů (pokud byly zadávány).