

Zkoušková písemka I. M4010, 8 + 2 body

1. Nalezněte řešení rovnice se zadanou okrajovou podmínkou, proveďte zkoušku:

$$\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = u, \quad u(\cos \sigma, \sin \sigma) = 1.$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Jedná se o obecnou rovnici prvního řádu a budeme ji řešit metodou charakteristik, zvolení a zápis metody ... 0,25 bodu
 - b) Vyřešení odpovídající soustavy obyčejných rovnic ... 0,5 bodu
 - c) Dosazení okrajové podmínky a výsledek ... 0,5 bodu
 - d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu
- Celkem 1,5 bodu, řešení $u(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}-1}$.

2. Nalezněte obecné řešení rovnice i partikulární řešení splňující zadanou okrajovou podmínkou, načrtněte charakteristiky i okrajovou křivku a proveďte zkoušku:

$$2xu_x - yu_y = x^2 + y^2, \quad u(2, y) = 1 - y^2.$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Jedná se o lineární nehomogenní rovnici prvního řádu a budeme ji řešit metodou charakteristik nebo převodem na kanonický tvar, zvolení a zápis metody ... 0,25 bodu
 - b) Vyřešení odpovídající soustavy obyčejných rovnic nebo převod na kanonický tvar a integrace ... 0,5 bodu
 - c) Dosazení okrajové podmínky a výsledek ... 0,5 bodu
 - d) Provedení zkoušky a obrázek ... 0,25 bodu
- Celkem 1,5 bodu, řešení

$$u = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + C(y\sqrt{x}), \quad u_p = \frac{1}{4}(x^2 - 2y^2 - xy^2).$$

3. Klasifikujte rovnici druhého řádu a převedte na kanonický tvar. Lze-li převedená rovnice řešit integrací, vyřešte (proveďte zkoušku - máte-li čas):

$$xu_{xx} - yu_{xy} + u_x = 0$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Klasifikace (určení typu rovnice) ... 0,25 bodu

- b) Nalezení nových proměnných ... 0,5 bodu
 c) Převod na kanonický tvar ... 0,5 bodu
 d) Integrace a řešení, případně provedení zkoušky ... 0,25 bodu
 Celkem 1,5 bodu, řešení: Hyperbolická rovnice,

$$\xi = xy, \eta = y,$$

$$u_{\xi\eta} = 0, u = F(y) + G(xy).$$

4. Řešte počáteční úlohu pro hyperbolickou rovnici a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= u_{xx}(t, x) + 2 \sin x, & (t, x) &\in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \\ u(0, x) &= x^2 + 2x, & x &\in (-\infty, \infty), \\ u_t(0, x) &= x \cos x, & x &\in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Komentář a orientační bodování:

- a) D'Alembertův vzorec a správné dosazení 0,25 bodu
 b) Výpočet prvního integrálu ... 0,5 bodu
 c) Výpočet druhého integrálu ... 0,5 bodu
 d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu
 Celkem 1,5 bodu, řešení

$$\begin{aligned} u(t, x) &= x^2 + 2x + t^2 + 2 \sin x - 2 \sin x \cos t + \\ &+ \frac{1}{2} [(x+t) \sin(x+t) - (x-t) \sin(x-t) + \cos(x+t) - \cos(x-t)]. \end{aligned}$$

5. Řešte úlohu

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, & x &\in (0, \pi), \quad t \in (0, \infty) \\ u(t, 0) &= 0, & t &\in (0, \infty), \\ u(t, \pi) &= 0, & t &\in (0, \infty), \\ u(0, x) &= 2 \cos 3x \sin x, & x &\in (0, \pi), \end{aligned}$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Metoda separace proměnných a zápis rovnic 0,25 bodu
 b) Řešení rovnic ... 0,5 bodu
 c) Dosazení okrajových podmínek ... 0,5 bodu
 e) Výpočet Fourierových koeficientů ... 0,5 bodu
 d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu
 Celkem 2 body, řešení

$$u(t, x) = -e^{-4t} \sin 2x + e^{-16t} \sin 4x.$$